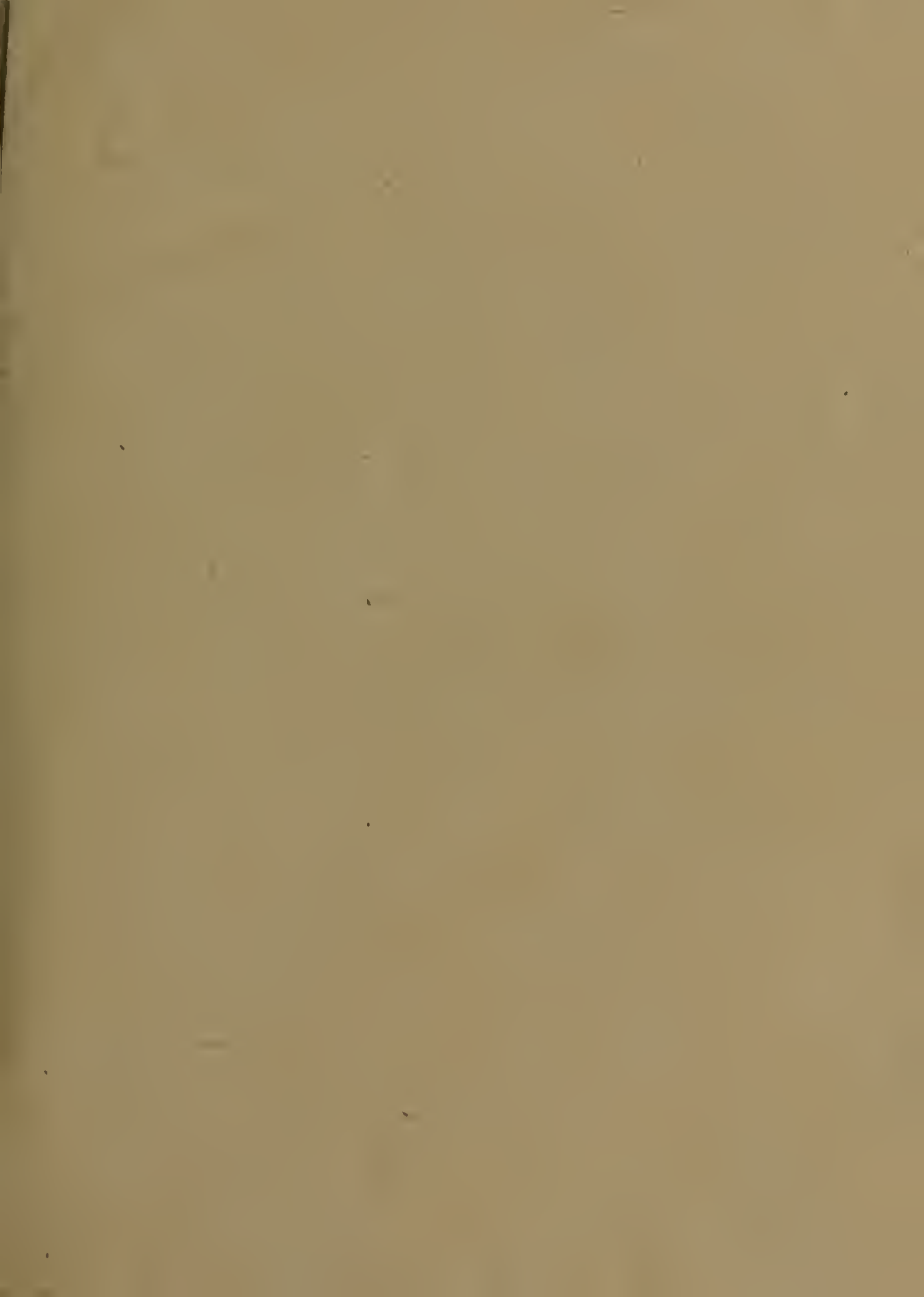




S. 1109. B. 3



THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY



M E L A N G E S

MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS TERTIUS.

BRITISH MUSEUM

S. 1109.B.3.

~~BRITISH MUSEUM~~

M É L A N G E S

D E

PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE

D E L A

SOCIÉTÉ ROYALE
D E T U R I N

POUR LES ANNÉES 1762-1765.



A T U R I N , M D C C L X V I .

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

A V E C P E R M I S S I O N .

MELANGES

DE

MEMBRES DU MUSEUM

DE L'HISTOIRE

DE LA NATURE

DE PARIS

PARIS, CHEZ LA SOCIÉTÉ



PARIS, CHEZ LA SOCIÉTÉ

DE L'HISTOIRE

DE LA NATURE

T A B L E

des Mémoires contenus dans ce Volume.

<i>Mémoire sur la différente dissolubilité des sels neutres dans l'esprit de vin, contenant des observations particulières sur plusieurs de ces sels.</i> PAR M. MACQUER . . .	page 1
JOHANNIS FRANCISCI CIGNA <i>de novis quibusdam experimentis eléctricis</i>	31
Hujus Opusculi impressa exemplaria jam inde a die 21. Februarii hujus anni 1766. doctis. Viris & Amicis Auctor distribuerat.	
<i>De l'action de la chaux vive sur différentes substances.</i> PAR M. LE COMTE SALUCES	73
<i>Expériences pour chercher les causes des changemens qui arrivent au sirop violat par le mélange de différentes substances.</i> PAR LE MEME	153
JOHANNIS - BAPTISTAE GABER <i>de humoribus animalibus specimen tertium</i>	165
CAROLI ALLIONII <i>stirpium aliquot descriptiones cum duorum novorum generum constitutione</i>	176
<i>Manipulus insectorum Taurinensium a CAROLO ALLIONIO editus</i>	185
JOH. PETRI MARIAE DANA <i>de Hirudinis nova specie, nota, remediisque adhibendis</i>	199
EJUSDEM <i>de quibusdam Urticae marinae vulgo dictae differentiis</i>	213

<i>Éclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes.</i> PAR M. EULER	page 1
<i>Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses.</i> PAR M. EULER	27

Recherches sur l'intégration de l'équation $(\frac{d dz}{d t^2}) = a a$

$(\frac{d dz}{d x^2}) + \frac{b}{x} (\frac{d z}{d x}) + \frac{c}{x^2} z$. PAR M. EULER . p. 60

Recherches sur la construction des nouvelles Lunettes à 5 & 6 verres, & leur perfection ultérieure. PAR M. EULER . 92

Formules de Dioptrique nécessaires pour l'intelligence du Mémoire précédent. PAR M. DE LA GRANGE . . . 152

Observationes circa integralia formularum $\int x^m dx (1-x^n)^{\frac{a}{n}}$,
posito post interationem $x = 1$, Auctore L. EULERO 156

Solution de différens problèmes de calcul intégral par M. DE LA GRANGE . . . 179

Extrait de différentes Lettres de M. D'ALEMBERT à M. DE LA GRANGE écrites pendant les années 1764. & 1765. 381

MEMOIRE

*Sur la différente dissolubilité des Sels neutres dans
l'esprit de vin contenant des observations
particulieres sur plusieurs de ces Sels.*

PAR M. MACQUER.

L'Examen des propriétés des Sels neutres est une des plus importantes, mais en même tems une des plus vastes matières que nous offre la Chimie, sur tout si l'on étend comme celà est à propos la dénomination de *Sels neutres* à toutes les combinaisons des acides quelconques avec toutes les substances terreuses, alkalines salines & métalliques, avec les quelles ces acides sont capables de s'unir. La classe de ces corps composés ou surcomposés est si étendue qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on les connoisse tous; il en reste un grand nombre que les Chymistes n'ont jamais vû, & l'on peut dire même que toutes les propriétés des Sels neutres les plus communs, & les plus usités, ne nous sont point encore connues.

Une des propriétés de ces Sels qu'il est le plus important de connoître c'est leur dissolubilité plus ou moins grande, c'est cette propriété qui peut donner le plus de lumière sur le véritable état, ou sur le degré de saturation réciproque de leurs acides & de leurs bases; il est aisé de sentir aussi que c'est de cette même propriété que dépendent principalement les phenomenes de leur cristallisation & que par conséquent elle est intimement liée avec la théorie de cette grande & interessante operation.

Mais quelques belles que soient les spéculations qu'on puisse faire sur ces objets, il n'est pas moins certain qu'elles ne peuvent être qu'incertaines & même trompeuses, à moins qu'elles ne soient fondées sur les faits, or les faits nous manquent précisément sur cette matière, ou du moins nous pouvons assurer qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on ait conitaté tous ceux qu'il est essentiel de connoître. Plusieurs bons Chymistes ont à la vérité déterminé la quantité que peut dissoudre l'eau de plusieurs des Sels neutres des plus connus & c'est assurément un très-grand avantage, mais l'eau n'est pas le seul dissolvant qui ait de l'action sur les Sels; l'esprit de vin qui est un menstrue tenant en même tems de la nature de l'eau, & de celle de l'huile est capable d'agir aussi sur ces composés & d'en dissoudre plusieurs, en plus grande quantité que l'eau même; or personne que je sache n'ait entrepris de déterminer quels sont les Sels, dont l'esprit de vin est le dissolvant & de quelle quantité il se charge de chacun de ces Sels; on sçait seulement en gros qu'il y a certains Sels, que l'esprit de vin dissout tels que la *terre foliée*, le *Sel sedatif*, tandis qu'il ne touche point à d'autres, mais c'est là tout ce que l'on sçait, & cet objet mérite assurément bien qu'on se donne la peine de l'examiner plus à fond; une suite d'expériences exactes sur cette matière ne peut donc manquer de repandre du jour non seulement sur la nature des différens Sels, mais encore sur celle de l'esprit de vin; lors qu'on connoîtra bien quels sont les Sels que ce menstrue dissout, quels sont ceux qu'il ne dissout point, on sera à portée d'entreprendre une autre suite d'expériences relatives à la cristallisation de ces derniers qu'on pourra procurer par des additions successives de différentes quantités d'esprit de vin dans l'eau qui les tient en dissolution. Enfin l'esprit de vin étant un des dissolvans qu'on peut employer avec le plus de succès dans l'analyse des végétaux &

3

des animaux par les menstrues, laquelle est sans contredit la plus exacte & la plus sûre de toutes, on fera à portée de connoître quelles sont celles des parties Salines de ces composés que l'esprit de vin en peut extraire, & de les séparer ensuite de ce dissolvant pour les obtenir dans leur état naturel, & sans qu'elles aient souffert la moindre altération.

Ce sont là les principales considérations qui m'ont déterminé à entreprendre le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Illustre Academie des Sciences de Turin, & de soumettre à ses lumières; mais, comme je l'ai déjà remarqué cet objet est d'une étendue si considérable, qu'il seroit impossible de l'épuiser dans un seul Memoire; j'ai donc été obligé de me borner dans celui-ci à un certain nombre de Sels, j'ai choisis ceux qui résultent de l'union des trois acides minéraux, *Vitriolique, Nitreux & Marin*, avec la *Terre calcaire, l'Alkali fixe végétal, l'Alkali fixe minéral, ou la base du Sel commun, l'Alkali volatil, l'Argent, le Cuivre, le Fer & le Mercure.*

Comme la qualité de l'esprit de vin peut influencer beaucoup sur les résultats des expériences de la nature de celles dont je vais rendre compte, il est à propos que je détermine de quel espèce étoit l'esprit de vin dont je me suis servi; il a été le même pour toutes les expériences, j'ai cru devoir me servir d'esprit de vin le plus déphlegmé & le mieux rectifié qu'il seroit possible, mais rectifié sans aucune addition ny intermède, & simplement par des distillations bien ménagées & suffisamment réitérées; dans l'appréhension ou qu'il ne fut altéré par l'action des intermèdes, ou qu'il n'en enlevât quelques portions avec lui dans la distillation, & que cela n'occasionnât quelque faux résultat dans les expériences. Celui dont je me suis servi & qui avoit été rectifié comme je l'ai dit sans aucun intermède, pesoit six gros cinquante quatre grains dans

une fiole qui contient juste une once d'eau distillée, le Thermomètre de M. de Réaumur étant à 10 degrés au dessus du terme de la glace. Je sçai qu'il est possible d'avoir de l'esprit de vin encore plus déphlegmé, j'en ai vû qui ne pesoit que six gros 48 à 49 grains dans la bouteille d'une once d'eau, mais j'ai donné la préférence a celui dont je viens de parler, par les raisons que j'ai dites, sauf à regarder comme nulles les quantités de Sel qu'il pourroit dissoudre à raison de son peu de flegme surabondant, quand ces quantités ne seroient que proportionnées à ce peu de flegme, c'est-à-dire assés petites, pour ne pouvoir être ni pesées, ni même appréciées.

En second lieu comme l'eau de la cristallisation des Sels pouvoit contribuer aussi à en faire dissoudre une beaucoup plus grande quantité dans l'esprit de vin, tous ceux des Sels que j'ai soumis à mes expériences, ont été d'abord entièrement dépouillés de leur eau de cristallisation par la déliquescence la plus exacte, j'ai versé dans un matras sur chacun de ces Sels ainsi préparés une demi once de mon esprit de vin; j'ai mis le matras bouché, sur un bain de sable & je l'ai chauffé jusqu'à ce que l'esprit de vin commençat à bouillir, j'ai filtré cet esprit de vin tout bouillant, je l'ai laissé refroidir pour observer les cristallisations qui pourroient se faire par refroidissement, après quoi j'ai fait évaporer entièrement cet esprit de vin pour recueillir & peser ce qu'il laissoit de résidu salin. Toutes ces circonstances ont été observées pour chacune de mes expériences; elles ont été aussi répétées chacune deux fois de la même manière, avec cette différence que la seconde fois je faisois bruler mon esprit de vin après la digestion sur le Sel, au lieu de l'évaporer, pour examiner les phenomenes que sa flamme pourroit présenter.

Tartre vitriolé.

Après avoir composé le *tartre vitriolé* moi même par la combinaison exacte & jusqu'au point précis de saturation de l'acide vitriolique avec l'alkali fixe végétal très-pur, après l'avoir exactement desséché, je l'ai traité comme je l'ai dit avec une demi once de mon esprit de vin, cet esprit de vin n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & n'a laissé par son évaporation entière qu'une quantité trop petite de matière saline pour pouvoir être pesée & appréciée, ce qui me détermine à la regarder comme nulle par la raison que j'ai dite, & à conclure que l'esprit de vin ne dissout point le *Tartre vitriolé*. La flamme de l'esprit de vin qui avoit bouilli sur ce Sel ne différoit absolument en rien, de celle de l'esprit de vin le plus pur.

Nitre ordinaire.

Le Nitre que j'avois aussi composé moi même, comme je l'ai fait à l'égard de tous les autres, s'est dissous dans l'esprit de vin bouillant à la quantité de 4 grains sur la demi once d'esprit de vin, laquelle pèse 288 grains une partie de ces 4 grains de Nitre s'est cristallisée très-confusément par le refroidissement. La flamme de cet esprit de vin étoit beaucoup plus grande, plus haute, plus ardente, plus jaune, & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur. La capsule dans laquelle cet esprit de vin avoit été brûlé est restée sèche, & j'y ai trouvé les quatre grains de Nitre sec. Je crois pouvoir conclure de cette expérience que l'esprit de vin dissout à l'aide de la chaleur de l'ébullition $\frac{4}{333}$ de son poids de Nitre.

*Sel marin à base d'alkali végétal nommé communement
Sel fébrifuge de Sylvius.*

L'esprit de vin après avoir bouilli sur le *Sel marin à base d'alkali fixe végétal*, n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement; par l'évaporation il a laissé près de 5 grains de ce Sel. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord comme celle de l'esprit de vin pur, mais elle est bientôt devenue grande, jaune, ardente, & lumineuse; il s'est trouvé pareillement 5 grains de Sel après cette combustion ainsi l'esprit de vin dissout $\frac{5}{288}$ de son poid du Sel dont il est question.

Sel de Glauber.

L'esprit de vin traité comme à l'ordinaire par l'ébullition sur le *Sel de Glauber* desséché, n'a rien laissé cristalliser de sensible par le refroidissement; il n'a rien laissé non plus après son évaporation, ny après sa combustion; cependant sa flamme avoit une couleur rouge considérable, mais malgré cette couleur de la flamme je crois pouvoir conclure que l'esprit de vin ne dissout point le Sel de Glauber, car on verra qu'il ne faut qu'une quantité infiniment petite de Sel pour changer totalement le caractère de la flamme de l'esprit de vin,

*Nitre à base d'alkali marin nommé communement
Nitre quadrangulaire.*

L'esprit de vin traité avec le *Nitre quadrangulaire* a laissé cristalliser par le refroidissement, mais très-confusément, une assez bonne quantité de ce Sel; par l'évaporation & la déliiccation du tout, il s'en est trouvé 15 grains. La flamme de cet esprit de vin étoit d'un jaune lumineux

rougeatre depuis le commencement jusqu'à la fin ; elle étoit décrépitante & même comme fulgurante & détonnante sur la fin ; après l'entière combustion, il s'est trouvé 18 grains de Nitre quadrangulaire un peu humide, qui le font réduits à 15 grains par la dessiccation. Il résulte de cette expérience que l'esprit de vin dissout $\frac{15}{100}$ de son poids de Nitre quadrangulaire.

Sel commun.

Le *Sel commun* traité avec l'esprit de vin ne s'est point dissous en quantité bien appréciable. Cependant la flamme de l'esprit de vin dans lequel il avoit bouilli avoit une couleur rouge considérable, & étoit plus grande & plus ardente que celle de l'esprit de vin pur.

Sel ammoniacal vitriolique.

J'ai fait le *Sel ammoniacal vitriolique*, qu'on nomme aussi *Sel ammoniac secret de Glauber*, en combinant ensemble jusqu'au point de saturation de l'acide vitriolique concentré avec de l'alkali volatil concret dégagé du Sel ammoniac par l'alkali fixe ; il s'est fait dans l'instant du mélange une très-vive effervescence ; il s'est excité beaucoup de chaleur ; il s'en est élevé beaucoup de vapeurs fort épaisses d'une odeur singulière. Ce Sel étant au point de saturation & bien desséché étoit très-blanc, d'une saveur vive & piquante, mais ni acide, ni alkaline, il s'est cristallisé en aiguilles comme le Nitre, & ne s'est point humecté à l'air. L'esprit de vin qui avoit bouilli sur ce Sel à laissé former par le refroidissement (le thermomètre de M. de Raumur étant à 14 degrés au dessus de zero) quelques petits cristaux au tour du matras, ces cristaux étoient comme des points si petits que je n'ai pû en distinguer

tinguer la figure à la loupe , cet esprit de vin n'a laissé par son entière évaporation qu'un enduit extrêmement mince & inappréciable. Sa flamme d'ailleurs ne différoit en rien de celle de l'esprit de vin pur. Je conclus de là que l'esprit de vin ne dissout point le Sel ammoniacal vitriolique.

Nota. J'ai réitéré l'expérience précédente avec du Sel ammoniacal vitriolique, au quel j'avois donné pour base l'alkali volatil *fluor* du Sel ammoniac dégagé par la chaux, & il n'y a point eû de différence dans les résultats.

Sel ammoniacal nitreux.

J'ai fait du *Sel ammoniacal nitreux* en mêtant jusqu'à parfaite saturation de l'esprit volatil de Sel ammoniac dégagé par la chaux avec de l'acide nitreux très-pur. Cette combinaison s'est faite presque sans effervescence, mais il s'en est élevé un quantité très-considérable de vapeurs blanches fort épaisses. Ces vapeurs viennent des portions d'acide & d'alkali volatil qui s'élèvent avant de s'être combinées & qui se rencontrent & s'unissent en l'air. Ce Sel après avoir été desséché avoit une saveur de nitre très-fraiche, mais beaucoup plus vive & plus piquante que celle du nitre à base d'alkali fixe. L'esprit de vin, après avoir bouilli sur ce Sel, & en avoir dissous beaucoup comme on va le voir, le laissoit cristalliser abondamment par le moindre refroidissement; ces cristaux étoient en petites aiguilles de la figure de celles du nitre, l'esprit de vin chargé de ce Sel m'a paru avoir un odeur approchante de celle de l'*ether nitreux* il a laissé après son entière évaporation un gros & demi, ou 108 grains de nitre ammoniacal. La flamme de cet esprit de vin étoit plus blanche & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur; elle noircissoit un peu les corps blancs qu'on y exposoit comme le fait celle
de

de l'ether ; après que cette flamme a eu cessé d'elle même ; il est resté environ la moitié de la liqueur qui avoit une saveur de nitre ammoniacal très-forte.

La portion de ce Sel qui s'étoit cristallisée dans l'esprit de vin , étoit en cristaux transparens par ce qu'ils retenoient vraisemblablement de l'esprit de vin dans leur cristallisation , comme les Sels cristallisés dans l'eau retiennent pareillement une certaine quantité de cette eau dans leur cristaux. J'ai laissé ces cristaux exposés à l'air pendant cinq ou six jours le thermomètre étant à 18 & 19 degrés ; ils ont perdu de leur transparence mais ne sont point devenus friables & en poudre comme ceux du Sel de Glauber , & autres Sels qui perdent beaucoup de leur eau de cristallisation par la seule exposition à l'air ; au contraire , ils ont acquis un consistence plus ferme , & adheroient assés fortement au verre qui les contenoit. L'esprit de vin dissout comme en le voit par cette expérience $\frac{108}{300}$ de son poids de Sel ammoniacal nitreux.

Sel ammoniac.

L'esprit de vin traité par la methode commune à toutes mes autres expériences avec le Sel ammoniac ordinaire , à dissout de ce Sel , & en a laissé cristalliser une quantité sensible par le refroidissement ; il s'est trouvé après son entière évaporation qu'il en avoit dissous 24 grains. La flamme de cet esprit de vin ne m'a pas paru différer de celle de l'esprit de vin pur. L'esprit de vin dissout donc $\frac{24}{300}$ de son poids de Sel ammoniac.

Sel vitriolique à base calcaire ou sélénite.

Comme les Chymistes favent présentement que les *Pierres spéculaires gypseuses* sont des Sels neutres formés de l'union

de l'acide vitriolique avec de la terre calcaire ; qu'elles ne font en un mot que ce qu'on nomme *sélénite*, j'ai choisi pour l'expérience présente de notre Pierre spéculaire des environs de Paris. Après l'avoir bien lavée & netoyée, je l'ai calcinée & je l'ai traitée avec l'esprit de vin comme les autres Sels. Ce qu'il en a laissé après son entière évaporation n'étoit qu'un enduit infiniment mince & trop peu considérable pour pouvoir être recueilli & apprécié, ainsi je mets ce Sel, par les raisons que j'ai dites, au nombre de ceux que l'esprit de vin ne dissout pas. La flamme d'ailleurs de cet esprit de vin n'avoit rien d'extraordinaire.

Nitre à base calcaire.

J'ai fait le *Nitre calcaire* en combinant ensemble jusqu'au point de saturation de l'acide nitreux très-pur avec de la *craye de champagne* lavée, après avoir filtré cette dissolution, je l'ai faite évaporer jusqu'à forte pellicule & l'ayant laissé exposée au frais de la nuit, le thermomètre étant à 11 degrés au dessus de zero, cette liqueur s'est coagulée en une masse cristallisée en petites aiguilles extrêmement fines rassemblées en faisceaux & formant comme de pinceaux ou brosses; il y avoit autour de la capsule qui contenoit cette matière quelques points cristallisés en cristaux plus petits que les plus petits grains de sablon, ces points étoient environnés circulairement de petites aiguilles pareilles à celles de brosses, & ces aiguilles y aboutissoient comme à un centre, en sorte que cela representoit autant de petits soleils rayonnans, qu'il y avoit de points. Ce Sel avoit une faveur très-acre & très-amère & attiroit fortement l'humidité de l'air. Ayant voulu achever de le dessécher à feu modéré, je n'ai pu y réussir pendant plus de 24 heures; ce n'étoit toujours qu'une
liqueur

liqueur visqueuse, un peu rousse, couverte d'une peau; elle se coaguloit lors qu'elle n'étoit plus chauffée, mais elle se resolvoit en liqueur tout de suite par l'humidité de l'air quoique le tems fût alors très-sec (c'étoit le 3 Juin) & que le thermomètre fût à 22 degrés, elle avoit la consistance & la *poifferie* du miel. J'ai donc été obligé d'employer le feu nud au lieu du bain de sable dont je me servois d'abord pour dessécher; elle s'est reduite par la dessiccation entière en une matière blanche ayant l'apparence d'une terre, il ne s'est néanmoins exhalé pendant cette dessiccation aucunes vapeurs d'acide nitreux. J'ai pulvérisé ce Sel & l'ai mis tout chaud dans un matras; il est si déliquescent que malgré la promptitude avec laquelle je faisois cet opération, il s'humectoit un peu, étant même encore chaud. J'ai versé dessus tout de suite la quantité ordinaire d'esprit de vin, & j'ai observé que cet esprit en dissolvoit beaucoup sans le secours de l'ébullition; à ce degré de chaleur il en a dissous une plus grande quantité, & s'en est même saturé, car il restoit encore au fond du Sel non dissous. L'esprit de vin chargé de ce nitre calcaire avoit une couleur rousse & une consistance huileuse à peu près comme celle de l'huile d'amandes. Ayant laissé refroidir cette dissolution, je n'y ai remarqué aucune cristallisation; il est vrai qu'il faisoit alors fort chaud; le thermomètre étoit à 22 degrés. Il s'est seulement formé au fond de la liqueur un léger sédiment terreux roussâtre. J'ai fait évaporer cette dissolution spiritueuse jusqu'à siccité; elle s'est desséchée à une chaleur beaucoup moindre que n'avoit fait ce même Sel dissous dans l'eau; le résidu sec pesoit une demi once c'est-à-dire 288 grains autant que l'esprit de vin employé. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord semblable à celle de l'esprit de vin ordinaire, mais elle est bien-tôt devenue grande, lumineuse, rouge, décrépitante & péillante;

elle a laissé après s'être éteinte un résidu blanc salin très-abondant & déliquescent.

Sel marin à base calcaire.

J'ai fait dissoudre de la même craye dans de bon acide marin jusqu'à parfaite saturation il en a résulté une liqueur saline neutre qui ayant été filtrée & évaporée avoit une faveur salée acre & amère. La dessiccation de ce Sel s'est faite un peu plus facilement que celle du nitre calcaire cependant il a fallu employer aussi le feu nud, & le Sel qui est resté m'a paru aussi avide de l'humidité & aussi *déliquescent* que le nitre calcaire. L'esprit de vin traité avec ce *Sel marin calcaire* en a dissous aussi son poids égal, & la flamme de cet esprit de vin étoit toute semblable à celle de l'esprit de vin saturé de nitre calcaire.

Vitriol de lune.

J'ai fait le *Vitriol de lune* qui est une combinaison de l'acide vitriolique avec l'argent, par précipitation, de la manière suivante. J'ai versé de l'acide vitriolique concentré dans une dissolution d'argent faite par l'acide nitreux; il s'est fait aussi tôt, comme cela arrive toujours, un dépôt blanc qui est un composé d'acide vitriolique & d'argent & que je crois devoir nommer *Vitriol de lune* ou d'argent. Il ne s'est presque pas excité de chaleur dans cette opération; j'ai versé plus d'acide vitriolique qu'il n'en falloit pour séparer tout l'argent d'avec l'acide nitreux. La liqueur ayant été étendue dans de l'eau distillée pour faciliter la précipitation étoit très-acide; je l'ai décantée dessus le dépôt; j'ai séparé du vitriol de lune tout l'excès d'acide, ou plutôt tout l'acide libre, par plusieurs lotions dans de l'eau distillée & par im-

tions

13

tions dans le papier gris , jusqu'à ce que ce Sel ne fit plus aucune impression de rouge sur le papier bleu après avoir parfaitement desséché ce Sel, je l'ai fait bouillir dans mon esprit de vin , il ne s'en est rien dissous , & la flamme de cet esprit de vin ne différoit en rien de celle de l'esprit de vin pur.

Nitre de lune nommé communement cristaux de lune.

J'ai fait dessécher parfaitement des *cristaux de lune* & ayant versé dessus la quantité ordinaire de mon esprit de vin , il m'a paru qu'il s'en dissolvoit : la liqueur mise à bouillir a pris une odeur d'éther nitreux , & s'est un peu troublée par une espèce de poudre noirâtre ; je l'ai filtrée toute bouillante comme dans toutes les autres expériences ; à mesure quelle se refroidissoit , il y paroïssoit une grande quantité de cristaux figurés en Rombes minces qui se formoient à la surface. Ces Rombes sont produits par quatre triangles un peu inclinés dans le même sens, en sorte qu'ils ne sont pas dans un même plan , leurs sommets réunis font au milieu du Rombe une espèce de pointe pyramidale mais fort peu élevée , & leurs côtés communs représentent deux diagonales qui se coupent leur milieu. Le tout ressemble donc à une Pyramide à quatre faces extrêmement basse & comme aplatie : chaque face triangulaire paroît formée de lignes parallèles au côté opposé au sommet. L'esprit de vin après son entière évaporation a laissé un gros 12 grains de ce Sel nitreux. Sa flamme étoit plus blanche & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur & accompagnée d'un peu de fuliginosité. L'esprit de vin dissout donc $\frac{66}{268}$ de son poids de Nitre de lune.

Lune cornée.

J'ai fait de la *Lune cornée* en versant de l'acide marin dans une dissolution d'argent par l'acide nitreux, & je l'ai traitée comme j'avois fait le vitriol de lune par un lavage à l'eau distillée, jusqu'à ce qu'elle ne donnât plus aucune marque d'acidité. L'esprit de vin n'en a rien dissous même à l'aide de l'ébullition. La flamme de cet esprit de vin n'avoit rien de particulier.

Vitriol de mercure.

Le Sel résultant de l'union de l'acide vitriolique avec le mercure que je nomme *Vitriol de mercure* & qu'il faut bien distinguer du *Turbith minéral*, en ce que ce dernier ne contient presque point, ou même point du tout d'acide vitriolique, ce *Vitriol de mercure*, dis-je, a été fait par le même procédé dont j'ai parlé pour le *Vitriol de lune*, c'est-à-dire en versant de l'acide vitriolique dans une dissolution de mercure faite par l'acide nitreux. Je n'ai lavé que légèrement à l'eau distillée le dépôt blanc qui se forme dans cette opération, par ce qu'on sçait que par un grand lavage on lui enlève tout son acide & qu'on le réduit en une espèce de précipité jaune indissoluble même dans l'eau & qu'on nomme *Turbith minéral*, ou plus-tôt parce qu'on décompose cette combinaison & qu'on la sépare en deux autres dont l'une est le *Turbith* dont je viens de parler & l'autre reste dissoute dans l'eau des lavages & ne contient que fort peu de mercure tenu en dissolution par une très-grande quantité d'acide : or ce n'étoit ni l'une ni l'autre de ces préparations de mercure dont j'avois intention de reconnoître le degré de dissolubilité dans l'esprit de vin ; ayant donc lavé légèrement, comme je l'ai dit, le *Vitriol mercureiel* qui s'étoit formé dans

dans mon opération, je l'ai fait sécher parfaitement au bain de sable; il étoit après cette dessiccation très-blanc & très-beau; je l'ai traité avec l'esprit de vin jusqu'à l'ébullition comme les autres, & je n'ai remarqué aucune dissolution: ayant filtré cette liqueur toute chaude, il ne s'y est rien cristallisé par le refroidissement; il n'est rien resté non plus après son entière évaporation. La flamme de cet esprit de vin étoit comme celle de l'esprit de vin pur; elle n'a laissé aucun résidu sensible après qu'elle a eu cessé d'elle-même; le vaisseau dans lequel cet esprit de vin avoit brûlé étoit sec; il avoit seulement une légère saveur acerbe métallique & l'ayant frotté avec un papier bleu mouillé, ce papier s'est trouvé un peu rougi. Il suit de là que l'esprit de vin ne dissout point sensiblement le Sel vitriolique mercuriel, ou Vitriol de mercure, même à l'aide d'un peu d'acide libre.

Nitre de Mercure.

Ayant fait dissoudre jusqu'à saturation du Mercure dans de l'acide nitreux très-pur j'ai obtenu une grande quantité de cristaux de *Sel nitreux mercuriel* que je nomme *Nitre de Mercure*; j'ai lavé ces cristaux à plusieurs eaux distillées & je les ai fait égoutter sur du papier gris; après les avoir parfaitement séchés, je les ai traités par l'ébullition avec l'esprit de vin comme les Sels cy dessus; ces cristaux qui étoient blancs avant d'avoir bouilli dans l'esprit de vin sont devenus par cette ébullition d'un jaune citronné un peu gris. L'esprit de vin qui avoit servi à cette opération ayant été évaporé entièrement n'a laissé qu'un léger enduit d'un Sel un peu argentin & si mince que je n'ai pu le recueillir. La flamme de cet esprit de vin ne diffère point sensiblement de celle de l'esprit de vin pur, cependant elle a donné quelques légères marques de fuliginosité; il est resté, après qu'elle a eu cessé d'elle

d'elle même, un enduit Saliu argentin comme après l'évaporation; cet enduit a un peu rougi le papier bleu; ayant lavé à plusieurs eaux distillées le Nitre mercuriel sur lequel l'esprit de vin avoit bouilli, il m'a paru que l'eau en dissolvoit fort peu & il a pris une couleur de plus en plus jaune, come celà arrive au Turbith minéral je ne tire pour le présent d'autre conséquence de cette expérience, si non que l'esprit de vin ne dissout qu'une quantité presque insensible du Nitre de Mercure dans l'état ou je l'ai employé: comme je trouve quelque chose de singulier dans ce fait, je me propose de faire dans la suite d'autres expériences pour l'éclaircir.

Mercure sublimé corrosif.

De tous les composés de Mercure & d'acide marin, c'est celui qu'on nomme *sublimé corrosif* qui est le plus salin, & c'est par cette raison que je l'ai choisi par préférence aux autres pour en examiner la dissolubilité dans l'esprit de vin; j'ai donc fait bouillir de mon esprit de vin sur ce Sel, & l'ayant filtré tout chaud j'ai observé qu'il se cristallisoit beaucoup de Sel par le refroidissement, cet esprit de vin a laissé par son entière évaporation deux gros & demi & un scrupule, ou 204 grains de Sublimé corrosif. Sa flamme étoit d'abord comme celle de l'esprit de vin ordinaire, mais bien-tôt elle est devenue plus grande, plus jaune, & plus lumineuse; elle étoit mêlée de quelques traits de couleur bleue sur tout sur la fin elle étoit très-décrépitante. L'esprit de vin dissout donc $\frac{204}{368}$ de son poids de sublimé corrosif. Il est vray que voyant que l'esprit de vin dissolvoit beaucoup de ce Sel par l'ébullition, je l'ai laissé bouillir plus long tems que les autres Seis.

Vitriol de mars.

Ayant desséché du *Vitriol de mars* au bain de sable sans le liquesfier, je l'ai fait bouillir avec mon esprit de vin; il m'a paru qu'il ne se dissolvoit rien ou qu'infiniment peu de chose. L'esprit de vin décanté de dessus ce Sel n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & par son entière évaporation il n'a laissé qu'un léger enduit brun trop peu considérable pour pouvoir être recueilli. Cet esprit de vin a brûlé comme l'esprit de vin pur & n'a laissé dans la capsule ou il avoit brûlé qu'une tache brune. Ayant appliqué un papier bleu mouillé sur cette tache, il a été rougi sensiblement. Il paroît par cette expérience que l'esprit de vin ne dissout point le *Vitriol martial*.

Nitre de mars.

J'ai fait dissoudre peu à peu de la limaille de fer non rouillée dans de l'acide nitreux très-pur; il m'a été impossible de saturer cet acide au point de ne plus rougir le papier bleu; la dissolution s'est épaissie considérablement; j'y ai ajouté de l'eau & de nouvelle limaille, le tout s'est mis en une espèce de pâte & malgré cela la dissolution étoit encore fort acide; elle étoit de couleur rousse rougeâtre; je l'ai faite évaporer à siccité; il s'est exhalé pendant cette évaporation beaucoup de vapeurs acides d'une odeur très-pénetrante. Le résidu sec étoit de couleur brune. Je l'ai traité avec l'esprit de vin; ce dissolvant a pris dessus, à l'aide d'une chaleur modérée, une couleur rouge de briques assés foncée, mais l'ayant porté jusqu'à l'ébullition, il a perdu presque toute sa couleur en déposant un sédiment considérable. Cet esprit de vin filtré & évaporé jusqu'à siccité n'a laissé que quatre

grain de matière acide d'un jaune de safran très-foncé ; ce Sel martial a eu beaucoup de peine à se dessécher entièrement & étoit si déliquescent qu'il s'est humecté étant même encore chaud. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord comme à l'ordinaire, mais quand il y en a eu environ un tiers de brulé, elle est devenue rouge & pétillante & a duré de la sorte jusqu'à la fin ; il est resté dans la capsule un enduit rouge brun assés considérable & un peu de liqueur fort acerbe & fort acide. Il faut remarquer sur cette expérience que l'esprit de vin dissoudroit vraisemblablement une beaucoup plus grande quantité de ce Nitre martial sans le secours d'aucune humidité, si l'on pouvoit le dessécher entièrement sans séparer presque tout l'acide nitreux d'avec le fer, mais cet acide tient si peu à ce métal que je crois que cela n'est pas possible.

Sel marin martial.

J'ai fait dissoudre peu à peu de la limaille de fer bien nette dans de bon acide marin ; la dissolution s'est très-bien faite sans que le fer se changeat en safran de mars & sans s'épaissir. Il est à remarquer au sujet de cette dissolution, que les vapeurs qui s'en élèvent ont une odeur désagréable pénétrante & fort différente de celle de l'acide marin pur ; elles sont aussi fort inflammables & font une explosion violente quand on les allume dans une vaisseau clos. J'ai fourni une grande quantité de limaille à cette dissolution, même après qu'il n'y avoit plus d'effervescence, mais malgré cela elle rougissoit toujours un peu le papier bleu. Je l'ai faite évaporer, il s'est formé dessus une pellicule saline luisante & un peu chatoyante. L'ayant laissée refroidir quand elle a été à ce point, elle s'est toute coagulée en cristaux confus dont je n'ai pû distinguer la figure même à la loupe. Ayant continué l'éva-

poration

poration au bain de sable jusqu'à siccité, la dessiccation a eu beaucoup de peine à se faire; il a fallu une journée entière pour cela; sur la fin ce Sel avoit une odeur tout à fait semblable à celle du Vitriol de mars lors qu'on le dessèche. Ce même Sel marin martial avoit une couleur de rouille assés claire & assés vive lors qu'il n'étoit que médiocrement chauffé, mais cette couleur devenoit beaucoup plus rouge & plus brune, lors qu'il l'étoit d'avantage. L'esprit de vin a pris par l'ébullition sur ce Sel une couleur de rouille un peu trouble & un peu changeante par l'opposition, ou l'interposition de la lumière; ayant soumis cette dissolution à l'évaporation il a fallu beaucoup de tems pour dessécher entièrement le résidu, il pesoit un demi gros ou 36 grains; il étoit d'une couleur jaune brune, s'humectoit à l'air mais lentement; il lui a fallu sept ou huit jours pour se résoudre totalement en liqueur. La flamme de cet esprit de vin étoit assés blanche, & assés brillante, à mesure que la déflagration avançoit elle devenoit plus lumineuse & plus blanche; elle étoit accompagnée sur la fin de beaucoup de petites étincelles blanches & brillantes comme des étoiles d'artifice; il est resté après cette combustion un résidu jaune brun assés considérable d'une saveur martiale styptique. L'esprit de vin dissout donc $\frac{10}{200}$ de son poids de *Sel marin martial*.

Vitriol de cuivre.

Le *Vitriol de cuivre* desséché parfaitement est devenu presque blanc; l'esprit de vin que j'ai fait bouillir dessus n'a pris aucune couleur; le même esprit de vin n'a laissé aucun résidu par son entière évaporation; il a brûlé comme de l'esprit de vin pur, & n'a pareillement laissé aucun résidu après sa déflagration. Ce qui prouve que l'esprit de vin ne dissout point le Vitriol de cuivre.

Nitre à base de cuivre

J'ai fait dissoudre du cuivre rouge très-pur dans de l'acide nitreux aussi très-pur ; la dissolution s'est faite d'elle-même très-rapidement après qu'elle a été entièrement saturée de cuivre, elle avoit une couleur bleue tirant sur le verd céladon ; elle étoit troublée par une chaux de cuivre de même couleur, mais infiniment plus pâle que la liqueur & presque blanche. J'ai fait évaporer cette dissolution au bain de sable, il s'est formé dessus une pellicule de cristaux confus ; l'ayant alors laissée refroidir, elle s'est coagulée toute entière en une masse de petits cristaux si confus, qu'il m'a été impossible d'en discerner la figure, même à l'aide d'une bonne loupe ; ces cristaux se sont ensuite humectés & resous totalement en liqueur en fort peu de tems. J'ai remis cette liqueur en évaporation, la pellicule s'est reformée de nouveau & par le refroidissement toute la masse s'est encore coagulée ; ayant entrepris de la dessécher ensuite entièrement ; elle s'est liquéfiée à la première impression de la chaleur, mais comme elle restoit toujours en cet état, j'ai augmenté le feu ; alors quoiqu'à la réserve de la pellicule de la surface, ce Sel demeurat toujours liquide, il a commencé à en sortir beaucoup de vapeurs d'acide nitreux très-pénétrantes ; ces vapeurs m'ont fait connoître que cette liquidité que j'attribuois à de l'eau surabondante au Sel n'étoit qu'une vraie fusion de ce même Sel, & que ce ne seroit qu'en lui enlevant son acide par l'action du feu, en le décomposant en un mot totalement que je pourrois l'amener sur le feu à l'état de solidité sèche ; l'ayant donc retiré de dessus le feu, il s'est figé sur le champ en une matière très-dure & fort avide de l'humidité de l'air ; j'ai pulvérisé promptement ce Sel & après l'avoir mis encore chaud dans un matras, j'ai versé par dessus la

la quantité ordinaire d'esprit de vin. Je l'ai laissé agir à froid pendant deux jours : dans cet espace de tems, il a pris une belle couleur bleue de saphir assés foncée, & il est resté au fond du matras une espèce de chaux de cuivre d'un verd bleu pâle. Par l'ébullition cette couleur n'a point pris plus d'intensité ; j'ai donc filtré la liqueur elle a passé très-claire & du plus beau bleu de saphir ; il est resté sur le filtre beaucoup de chaux de cuivre de couleur de verd de gris fort pâle. Cette dissolution après son entière évaporation a laissé 48 grains de Nitre à base de cuivre. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord comme à l'ordinaire, mais elle est bien-tôt devenue beaucoup plus blanche, plus lumineuse & d'un verd très-beau, cette flamme étoit accompagnée d'une quantité assés considérable de fumée fuligineuse noirissante : il s'est formé au tour de la liqueur enflammée un bourlet de matière verte qui s'est noirci en partie par la chaleur & qui a pris un caractère charbonneux, aussi s'est elle allumée, elle bruloit en rougissant comme un charbon ; il est resté après la flamme cessée d'elle même, une quantité assés considérable de Sel bleu, en liqueur. L'esprit de vin a dissous comme on voit dans cette expérience ^{de} de son poids de *Nitre à base de cuivre*.

Sel marin à base de cuivre.

J'ai pris pour composer le *Sel marin à base de cuivre* du fil de cuivre rouge très-pur, je l'ai mis dans l'acide marin assés fort, distillé par l'acide vitriolique pur à la manière de Glauber ; la surface du cuivre s'est ternie promptement, mais sans qu'il parut aucun autre signe de dissolution ; il a fallu le secours du bain de Sable pour faire agir l'acide sur ce metal, alors les signes ordinaires aux dissolutions des métaux par les acides ont parus, mais
je

je fus étonné de voir que la liqueur, à mesure que la dissolution se faisoit, au lieu de prendre une couleur verte, comme je m'y attendois, prenoit au contraire une couleur de café qui devenoit de plus en plus brune & foncée. Lors que la dissolution a été à peu près au point de saturation elle étoit un peu épaisse elle rougissoit encore sensiblement le papier bleu, quoique d'ailleurs l'acide ne parut plus du tout agir sur le cuivre qui restoit. J'ai versé cette dissolution dans une capsule pour l'évaporer & ayant rincé le matras avec de l'eau, j'ai vû aussi avec surprise que le peu de dissolution brune qui restoit dans le matras est devenue d'un très-beau verd tirant sur le bleu aussi tôt qu'elle a été étendue dans l'eau, & cette couleur s'est communiquée au reste de la dissolution dans laquelle j'avois mêlé cette rinçure. Par l'évaporation elle s'est réduite presque toute en cristaux de couleur verte & figurés en aiguilles; le peu de liqueur qui baignoit ces cristaux étoit redevenue fauve brun par l'évaporation; enfin lors que tout a été évaporé jusqu'à siccité, le verd des cristaux a disparu & tout étoit absolument brun: j'ai mis ce Sel tout chaud dans mon esprit de vin, ce dissolvant a pris presque aussi tôt un verd très-foncé, & a dissous beaucoup de ce Sel sans le secours d'autre chaleur que celle de l'air, qui à la vérité étoit très-grande ce jour là & de 28 à 29 degrés (c'étoit le 26. Août.) L'esprit de vin chargé de ce Sel a fourni après fort peu d'évaporation beaucoup de cristaux du plus beau verd ils étoient éguillés & comme soyeux; par la désiccation, ils ont perdu tout leur verd & sont devenus absolument bruns: ils pesoient 48 grains après avoir été bien desséchés. La flamme de l'esprit de vin chargé de ce Sel étoit du plus beau verd; on y appercevoit cependant des espèces de fulgurations blanches & rouges; il est resté après la combustion de l'esprit de vin beaucoup de Sel dont une partie étoit verte & l'autre brune.

Les

Les changemens de couleur qui arrivent à ce Sel suivant la quantité d'eau plus ou moins grande à laquelle il est uni ont quelque chose de singulier & de remarquable ; lors qu'il est sec, ou qu'il ne contient que très-peu d'eau, il est d'un jaune fauve foncé brun ; à mesure qu'on y ajoute de l'eau, il devient successivement verd d'olives, beau verd de pré plein & foncé, verd bleuâtre, & enfin lors qu'il est étendu dans beaucoup d'eau, il est entièrement bleu, mais clair ; il repasse ensuite successivement par toutes ces mêmes couleurs, jusqu'à redevenir tout brun, à mesure qu'on fait évaporer l'eau qui le tient dissous. Ces phenomenes m'ont fait soupçonner que ce Sel de couleurs si différentes lors qu'il est plus ou moins sec pourroit être la matière d'une sorte d'*encre de sympathie*. Jen ai fait l'essai ; ayant tracé des caractères sur du papier blanc avec sa dissolution étendue dans beaucoup d'eau laquelle est comme je l'ai dit d'un bleu pâle ces caractères après qu'ils se furent séchés simplement à l'air étoient invisibles à cause du peu d'intensité de la couleur ; mais les ayant chauffés, j'ai vû aussi tôt paroître l'écriture d'un jaune vif très-beau. Cette couleur qui n'est qu'une teinte affoiblie du fauve brun qu'a le Sel en masse lors qu'il est parfaitement desséché, m'a rappelé que M. Baumé très-habile Chimiste de cette Ville avoit publié dès 1757 dans les cours de chymie que nous faisons ensemble, une encre de sympathie dont les effets sont tous semblables à celle dont je parle actuellement, & comme la base de l'encre de M. Baumé est du cuivre de même que dans celle-cy, quoique le procédé qu'il a donné pour la faire soit différent, je ne doute nullement que ces deux encres sympathiques ne soient essentiellement de même espèce & je reconnois avec plaisir que M. Baumé est le premier qui ait observé cette sorte d'encre, & qui en ait parlé, ce Chimiste convenoit en annonçant cette encre qu'elle n'avoit pas

pas la propriété de redevenir invisible par la simple exposition à l'air aussi parfaitement que l'encre sympathique tirée du cobalt & s'est toujours proposé de lui donner cette qualité, mais des recherches d'une plus grande importance l'en ont empêché jusqu'à présent; celle dont je viens de parler avoit aussi le même défaut, mais après les observations que j'avois faites sur les changemens de couleur du Sel de cuivre, & sur la cause prochaine de ces changemens il m'étoit bien facile de donner à cette encre la propriété désirée; on a vû que la différence des couleurs du Sel marin cuivreux dépend uniquement de la quantité d'eau plus ou moins grande à laquelle il est uni, si donc lors qu'il paroît en jaune par la déscication parfaite sur le papier, il ne disparoît point ensuite entièrement par l'exposition à l'air, cela ne peut venir que de ce qu'il n'attire pas assés promptement & assés efficacement l'humidité de l'air, & en effet ce Sel quoique deliquescent n'est pas à beaucoup près du nombre de ceux qui possèdent cette qualité au plus haut point; il ne s'agissoit donc pour donner à l'encre en question la propriété de dispaître entièrement que de la rendre plus avide de l'humidité de l'air que ne l'est naturellement le Sel marin cuivreux, & c'est à quoi je suis parvenu facilement en mêlant dans sa dissolution un autre Sel exempt de toute couleur, qui ne peut le décomposer & qui est infiniment plus deliquescent; il y en a assûrement plusieurs qui peuvent être employés pour cela avec succès; j'avois sous la main le Sel marin à base de craye qui m'avoit servi dans mes expériences précédentes; j'en ai mêlé dans la dissolution de Sel maria cuivreux à peu près autant qu'elle pouvoit contenir de ce dernier Sel; j'y ai ajoaté un peu d'excès d'acide marin & de l'eau, enforte que le tout avoit une couleur d'aigue marine assés belle, & ayant fait l'épreuve de cette encre, j'ai trouvé qu'elle dispaïsoit presque aussi bien

que

que celle de cobalt je rappelle au reste icy que l'acide marin qui m'a servi pour ma dissolution de cuivre avoit été distillé par l'acide vitriolique libre, parce qu'il n'est pas impossible qu'un peu de ce dernier acide mêlé avec le premier ne contribue aux effets dont j'ai parlé; j'avertis aussi ceux qui voudroient vérifier cette encre que c'est le Sel marin à base de craye au quel j'ai donné la préférence sur les autres Sels marins à base calcaire, parce qu'il m'a paru par des expériences faites antérieurement sur les combinaisons de l'acide marin avec différentes terres calcaires, que les Sels qui en résultoient n'étoient pas tous également déliquesçens, & que celui-cy l'étoit beaucoup plus que la plus part des autres.

Je n'attache au reste aucune prétention à cette espèce d'encre de sympathie, non seulement, par ce que je n'en suis pas le premier observateur, mais encore par ce que ce n'est là qu'un de ces petits faits curieux qui se présentent comme d'eux mêmes aux Chimistes dans leurs recherches & aux quels on ne doit donner qu'un moment d'attention quand on a pas intention d'en développer la theorie. Je ne me suis peut être que trop arrêté à celui-cy, c'est pourquoi je me hâte de revenir à mon objet principal.

Les expériences dont j'ai rendu compte dans ce memoire, quoique déjà nombreuses, ne le sont cependant point encore assés à beaucoup près pour en tirer des conséquences & une theorie générale; elles font entrevoir à la verité que les Sels neutres sont d'autant plus dissolubles dans l'esprit de vin, que leur acide est moins fortement uni avec leur base, & qu'à cet égard, ils suivent par rapport à l'esprit de vin à peu près la même règle que par rapport à l'eau, mais la saturation plus ou moins parfaite de l'acide des Sels n'est certainement point l'unique cause de leur différent degré de dissolubilité dans

l'esprit de vin, car il y en a qui se dissolvent en plus grande quantité dans ce menstree que dans l'eau même. Le principe phlogistique, ou inflammable, influe probablement beaucoup dans les effets de ces dissolubilités, mais je le repete, nous n'avons point encore assés de faits connus sur ces objets pour en developper la Theorie générale. Je m'abstiens donc pour la présent de toute speculation à cet égard, & je me borne à quelques réflexions particulières sur les expériences dont j'ai rendu compte.

En rassemblant sous un même point de vue tous les Sels vitrioliques que j'ai examinés, il se trouve qu'il n'y en a aucun que l'esprit de vin ait dissous, ou du moins dont il ait dissous une quantité sensible, & le Sel de Glauber est le seul qui ait apporté quelque changement à sa flamme. Si cette indissolubilité se soutient dans les autres Sels vitrioliques qui me restent à examiner, elle fera une nouvelle preuve de la superiorité déjà reconnüe de l'acide vitriolique sur les autres acides à raison de sa plus grande simplicité & de la plus grande force avec laquelle il est capable d'adhérer à toutes les substances susceptibles d'union avec les acides, aussi ais-je déjà fait observer ailleurs que dans la classe des Sels vitrioliques nous n'en connoissons encore aucun qui ne soit cristallisable, ou dont la qualité deliquescente annonce une connexion foible de l'acide avec sa base.

Comme aucun de mes Sels vitrioliques ne s'est trouvé sensiblement dissoluble dans l'esprit de vin, il n'est point étonnant, qu'ils n'ayent occasionné aucun changement à la flamme de cet esprit, mais on pourroit être surpris que je n'aye observé aucune couleur verte à la flamme de celui que j'avois fait bouillir sur le vitriol de cuivre, tandis que M. Bourdelin dit dans son memoire sur le Sel sedatif imprimé dans les memoires de l'Academie des sciences de Paris pour l'année 1755, qu'ayant fait bruler de
l'esprit

L'esprit de vin sur du vitriol de cuivre, il à observé une belle couleur verte dans sa flamme. Il est très-certain cependant que la contradiction qui se trouve entre nos deux expériences n'est qu'apparente, & qu'elles sont exactement vraies l'une & l'autre. M. Bourdelin avoit pour but dans le memoire que je viens de citer, non d'examiner le degré de différente dissolubilité des Sels dans l'esprit de vin, mais de reconnoître s'il s'en trouveroit quelqu'autre que le Sel sedatif qui eut la propriété de communiquer une couleur verte à sa flamme, il n'étoit pas nécessaire en conséquence que ce savant Chimiste prit comme moi la précaution de priver ses Sels de leur eau de cristallisation avant de les soumettre à l'action de l'esprit de vin, aussi ne dit il point qu'il eut desséché le vitriol de cuivre, sur le quel il a fait son expérience, & l'on ne doit point douter que ce ne soit l'eau de cristallisation de ce Sel qui l'ait rendu miscible à l'esprit de vin en quantité suffisante pour verdir la flamme, d'autant plus qu'il est prouvé par plusieurs des expériences dont j'ai rendu compte qu'il ne faut qu'une quantité de Sel infiniment petite, pour changer considérablement la flamme de cette liqueur. Ces différences demontrent bien au reste, combien il étoit nécessaire que je prisse la précaution de priver mes Sels de toute humidité surabondante, pour en reconnoître au juste le degré de dissolubilité.

Si nous jettons après cela aussi un coup d'œil général sur le Sels nitreux nous verrons, que tous ceux que j'ai soumis à l'expérience se sont comportés à l'égard de l'esprit de vin bien différemment des Sels vitrioliques on fait que l'acide nitreux tient en général infiniment moins que l'acide vitriolique aux différentes substances qui peuvent former des Sels neutres avec ces acides; il est démontré aussi en chymie que ce même acide renferme le

principe inflammable dans sa composition ; or il est très probable que ce sont là les deux causes principales de la dissolubilité des Sels dans l'esprit de vin, aussi résulte-t-il des expériences que j'ai rapportées, que presque tous les Sels nitreux sont dissolubles dans l'esprit de vin, & la plus part même en quantité assez considérable ; il y a cependant deux de ces Sels qui font une sorte d'exception le premier c'est le Nitre de Mercure dont l'esprit de vin n'a pas dissous une quantité sensible, & le second c'est le Nitre de mars dont le menstrue n'a dissous que fort peu, quoique ce dernier Sel soit très déliquescent & paroisse par cette qualité devoir être un des plus dissolubles. Je n'ajoute rien pour le présent à ce que j'ai dit aux articles de ces Sels, ce sont de ces effets dont la cause demande à être recherchée par un plus grand nombre d'expériences ; mais il est bon de remarquer encore au sujet de nos Sels nitreux qu'il n'y en a aucun qui n'ait altéré sensiblement la flamme de l'esprit de vin, ce qui indique toujours une grande disposition de leur part à s'unir à ce dissolvant en tout ou en partie. Au reste cette alteration de la flamme de l'esprit de vin par les Sels neutres est encore un objet important, qui mérite beaucoup d'attention & dont il paroît qu'on pourra retirer autant de connoissances nouvelles sur la nature des Sels, que de leur dissolubilité même, mais il demande aussi une nombreuse suite d'expériences & d'observations. Nous entrevoyons seulement par celles qui sont déjà faites, que la flamme de l'esprit de vin peut recevoir trois sortes d'alterations de la part des Sels. La première c'est de devenir plus jaune, plus rouge, plus grande, & plus décrépitante ; la seconde c'est d'être plus blanche, plus lumineuse, & en même tems plus ou moins fuligineuse, & la troisième, c'est de contracter quelque couleur particulière, comme par exemple la couleur verte que lui don-

nent les Sels à base de cuivre. Je soupçonne que la première de ces qualités a lieu lors que c'est le Sel neutre entier & comme Sel neutre, qui agit dans cette flamme, que la seconde est produite particulièrement par l'acide des Sels, lequel donne à l'esprit de vin un caractère plus ou moins approchant de celui de l'éther, & que la troisième est due principalement à la base ou à la substance qui est unie à l'acide des Sels, mais tout ceci a besoin d'une plus grande suite d'expériences pour être éclairci.

Enfin les phénomènes des Sels neutres contenant l'acide marin réunis aussi sous un même point de vue nous font connoître que ces Sels se sont dissous pour la plus part dans l'esprit de vin, & ont causé de l'alteration à sa flamme; ainsi à cet égard l'acide marin paroît différer de l'acide vitriolique à peu près comme l'acide nitreux, mais il est bien remarquable que le composé de mercure, & d'acide marin soit infiniment plus dissoluble dans l'esprit de vin que les Sels résultans de l'union de cette substance métallique avec les autres acides, & que ce même composé, (*le sublimé corrosif*) se dissolve en plus grande quantité dans l'esprit de vin que dans l'eau même. L'acide de ce Sel, ni même la manière particulière dont il est uni au mercure ne paroissent pas les seules causes de cette singulière dissolubilité; je soupçonne que la nature de cette substance métallique très abondante en principe inflammable & qui est peut être même celle de toutes qui en contient le plus, influë pour beaucoup dans les phénomènes de sa dissolubilité, mais c'est encore là un objet qui demande des recherches & des expériences ultérieures. Je finis par une dernière remarque sur la nature de la flamme de l'esprit de vin traité avec les Sels contenant l'acide marin je fais donc observer que de tous ceux de ces Sels que j'ai examinés jusqu'à présent le Sel
 marin

marin martial est le seul qui ait donné à cette flamme la couleur blanche & un caractère rapproché de celui de la flamme de l'ether ; je ne doute point que parmi ceux qui restent à examiner , il ne s'en trouve plusieurs autres qui produisent le même effet , mais en attendant on peut toujours en inferer que le fer est un des métaux qui peuvent communiquer un caractère particulier à l'acide marin , par la quantité abondante de principe inflammable qu'il lui transmet.

A Paris ces 8.^e Octobre 1765.



De novis quibusdam experimentis electricis.

CUM in eximia gallica symmeriani libri versione, quam suis notis auctam Cl. NOLLETIUS ad me perhumaniter miserat (a) nova multa, ac ingeniosa experimenta invenirem, illud maxime laude dignum videbatur, quod & in cruralibus per frictionem excitatis, & in vitris electricitatem ex communicatione habentibus oppositae electricitates sejunctae distinctaeque exhibeantur. Sic enim earum electricitatum mutuas actiones mutuasque relationes melius pervestigari, posse censebam, sicque viam pandi ad explosionis electricae theoriam luculentius declarandam. Hisce excitatus eo quoque operam meam contuli, & multa collegi, quae etsi manca adhuc sunt, & imperfecta, proponenda tamen duxi, quod hujusmodi videantur, quae acriori ingenio, ac diuturniori, quam mihi licuerit diligentia amplificari, ac perfici possint.

CAPUT I.

De frictione binarum taeniarum sericearum ejusdem coloris.

1. **D**UAS taenias sericeas albas (*) igne recenter exsiccatas, alteram alteri superextensam, & plano levigato, sive deferenti, ut metallico, sive coercenti, ut vitreo, superpositas regula ex ebore in aciem exacta fricabam: inde taeniae electricitatem acquirebant, qua ad planum adhaerescerent; ab eo simul divulsaе, se se attrahebant, superiore, quae fricata fuerat, resinosa, eamque

(a) Experiences, & observations nouvelles concernant l'electricité par M. Robert Symmer.

(*) Gallice des rubans.

in majorem, subjecta vitream electricitatem ostendente. Si seorsim divellerentur a plano, supra quod fricatae fuerant, sese repellebant, & utraque resinofam electricitatem monstrabat.

2. Eveniebat vero interdum, ut etiam simul a plano revulsae taeniae se se repellerent; idque quoties, vel inter fricandum superior ab inferiore fuerat revulsa, vel laxiores taeniae erant, sicque ex frictione inferior taenia adversus subjectum planum atterebatur, ut inde congenereim, & superiori parum disparem electricitatem acquireret.

3. Enimvero ad eum frictum, quo electricitas inducitur, magnam corporis supra corpus excursionem haud requiri, satis intellexi postquam expertus sum easdem albas taenias, etiam charta inaurata rigidiorē, aut lamina plumbi interceptas, ex ipsius chartae, aut plumbi frictione satis sensibilem electricitatem adeptas fuisse.

4. Dum porro taeniae a plano, supra quod fricatae sunt, revelluntur (1. 2) in locis, ubi secedunt, ipsas inter & subjectum planum scintillae emicant, quae scintillae similiter conspiciuntur, quando taeniae simul a plano divulsae, & in unum adhaerescētes ab invicem separantur, ubi vero semel a plano, supra quod fricatae sunt, taeniae revulsae fuerint, aut a se invicem, quantumvis iterum deinceps ad planum, aut ad se mutuo admoveantur, nulla unquam amplius in earum separatione lux se prodit.

5. Similiter quamvis taeniae a plano, supra quod fricatae sunt, singillatim sejunctae, se se repellant (1), si tamen semel ab eodem una revulsae fuerint, atque adeo se se attrahentes factae sint, quantumvis ad ipsum iterum applicentur, & seorsim se jungantur, se se attrahere pergunt; & viceversa, quae taeniae a plano seorsim divulsae fuerunt, & propterea se se repellunt, licet postea altera super alteram ad ipsum iterum aptentur, & quocumque modo rursus dimoveantur, se se repellere pergunt.

6. Ex his modus patet, quo taeniae ex parte alia se se attrahentes, ex alia se se repellentes fieri possint, si postquam supra planum leve fricatae sunt, pars alia earumdem simul, alia seorsim, & singillatim ab eo plano divellatur. Verum de his phaenomenis fusius deinceps differemus.

7. Porro quamdiu taeniae supra planum, supra quod fricatae sunt, relinquuntur, vix ulla electricitatis indicia praebent; simul vero revulsae, & adhuc invicem adhaerentes, praepollentis resinosae electricitatis (1), ex utraque facie indicia praebent, & instar unicae taeniae resinosam electricitatem habentis se gerunt: si ad planum iterum admoveantur, iterum signa electrica in ipsis sopiuntur, quae iisdem ab eo revulsis denuo se produunt, & ita deinceps, donec omnis ipsarum electricitas extincta sit.

8. Quod si modo dictae taeniae non jam levi superficiei, supra quam fricatae sunt admoveantur, sed imponantur corpori hirsuto, ac deferenti, uti telae ex cannabe, aut gossipio haud exsiccatae, cito ipsarum electricitates ad aequilibrium perducuntur, ita ut inde dimotae taeniae, quamdiu simul junctae perstant, nulla praebeant electricitatis indicia, si dimoveantur, electricitates ostendant contrarias, & aequales, quae, iisdem iterum junctis, rursus delitescunt, & ita porro.

9. Imo vero taeniae se se repellentes, quae levi deferenti superficiei altera super alteram admotae, eique quantumvis adhaerescentes, se se repellere pergunt, quoties revelluntur (5), si hirsutae deferenti superficiei altera super alteram imponantur, intra aliquot secunda temporis minuta jam se se attrahent, ut iisdem ab ea superficie quovis modo revulsis apparet; idque ex eo fit, quod electricitas taeniae hirsutae superficiei proximae jam in contrariam abierit, & ex resinosa vitrea facta sit.

10. Hinc est, ut si binae albae taeniae supra hirsutam superficiem dicto modo (1) fricentur contrarias semper electricitates acquirant, ita ut quovis modo inde revulsae fuerint, superior semper resinosa, inferior, quae hirsutae superficiei proxima fuit, vitream electricitatem ostendat.

11. Quod autem efficit substratum hirsutum deferens corpus (9), id ipsum praestat deferens quodcumque in apicem efformatum. Etenim si duae taeniae ex electricitate se se repellentes (1) parallelo situ suspendantur, ut planis faciebus se mutuo respiciant, tum acuminatum metallum taeniarum alterutri obvertatur, & per ejus longitudinem promoveatur ad unius, duorumve pollicum distantiam, mox opposita taenia ad hanc, cui apex obvertitur, accurret, eique juncta adhaerebit, & neutra jam amplius taenia ulla electrica signa dabit, quamdiu junctae peritabunt: quodsi divellantur, constabit, illius taeniae, ad quam apex conversus est, electricitatem mutaram fuisse, & ex resinosa in vitream evasisse.

12. Eodem autem artificio, quo resinosa taeniae unius electricitas in vitream mutatur; potest etiam taenia non electrica electricitate imbui: si nempe, taenia non electrica hirsutae superficiei imposita, super ipsam electrica taenia extendatur (9), vel si, taenia electrica ad non electricam applicita, ad hanc acuminatum metallum obvertatur, & juxta ipsius longitudinem promoveatur (11). Constabit vero semper taeniam, quae electricitatem hoc pacto acquisivit danti contrariam acquisivisse, ita ut si illius electricitas vitrea fuit, hujus sit resinosa, & vicissim: constabit insuper taeniam, quae hoc modo electricitatem largitur, inde vix majorem pati virium electricarum jacturam, quam si per id tempus suspensa stetisset, nullamque electricitatem communicasset.

13. Hinc est, ut una eademque taenia electrica pluribus non electricis contraria electricitate imbuendis inservire possit, si singulae successive eidem applicitae exposito modo (12) tractentur. Unaquaeque vero ipsarum electricitatem acquireret contrariam quidem, sed aequalem electricitati taeoniae excitantis, eo tempore, quo vis excitabatur (8), ut propterea ea ratione electricitas absque frictu mirum in modum multiplicari possit.

14. Taeniam albam minus ficcam, adeoque minus coercentem alii item albae recenter ad ignem exsiccatas supponebam, easque supra planum leve, sive deferens, sive coercentis impositas regula ex ebore fricabam: quovis modo taeniam a subjecto plano divellerentur, superior semper resinofam, inferior vitream electricitatem ostendebat.

15. Ex quo apparet vim apicum in superioribus experimentis in eo positam esse, ut taeniam, cui obvertuntur, magis deferentem efficiant, seu faciliorem reddant electrici fluidi per eandem fluxum, quum humiditas subjectae taeniam, quae ipsam vaporibus electrico magis penetrabilem reddit, idipsum efficiat (14), quod suppositi eidem apices, si sicca esset, praestare potuissent (10).

16. Hactenus exposita experimenta eodem omnino successu tentari possunt duabus nigris taeniis optime exsiccatis, ut certo constet, sericum sive album, sive nigrum ex frictione, quae ebore fit, resinofam electricitatem adipisci.

17. Si loco eboris, pelle uterem ad fricandas duas taenias, sive utramque albam, sive utramque nigram, idem iterum erat experimentorum omnium exitus, ut similiter concludere fas sit sericum utrumvis ex pelle resinofam electricitatem recipere. Si vitrum ad fricandum adhiberem in eisdem experimentis, idem eventus. Si demum sulphur, electricitas taeniam, quae fricabatur vitrea erat, caetera simili modo, ac in superioribus experimentis contingebant,

sed inverſo ordine, ut ubi in illis reſinoſa electricitas habebatur, hic haberetur vitrea, & viciffim.

18. Et haec quidem conſtanter ita ſe habere viſa ſunt, ut nimirum taeniae ſericeae, ſive albae, ſive nigrae ex friſtu ope eboris, pellis, vitri, vim reſinoſam acquirerent, ex friſtu ope ſulphuris vitream, idque non modo in reſentiſtis experimentis, ſed in aliis quibuſvis; quando nempe vel alterutrius coloris taenia utroque extremo affixa, & horizontaliter per aërem tenſa dictis corporibus fricabatur, vel iifdem circumjeſta, & utroque extremo prehenſa, altero, alteroque alterne ita trahebatur, ut adverſus ea corpora attereretur, vel demum aliquo ex iis corporibus tranſverſim obvoluta juxta longitudinem per ipſa ita trajiciebatur, ut in eo trajectu vehementem ab iifdem attritum ſubiret.

19. Cum charta nuda, vel inaurata taenias fricarem minus conſtans fuit inductae electricitatis indoles; quamvis enim plerumque ex his albae taeniae vitream (a), nigrae reſinoſam electricitatem reciperent, contigit tamen interdum, ut haec aliter aliterque ſe haberent. Cujus quidem inconſtantiae cauſſas omnes haecenus aſſequi non potui; viſum tantummodo eſt, attritum, quem olim eae taeniae ex aliis corporibus paſſae fuiſſent, ipſas ad inſuetam electricitatem a charta vel nuda, vel inaurata recipiendam aptas effeciſſe.

20. Illud vero etiam conſtans fuit, ut taeniae binae albae, tum binae nigrae charta nuda, aut inaurata interceptae, interea dum ipſa charta ſupra tabulam fricaretur (3), vim electricam ejuſdem generis acquirerent, & quidem reſinoſam, ob quam de charta exemptae ſe ſe repellebant: quo in experimento, cum taeniae nonniſi adverſus chartam, aut inauraturam, qua undique obvolvebantur, afri-

(a) Sericum globo vitreo circumductum, & charta inaurata fricatum vitream electricitatem in catenam emiſiſſe Cl. P. Beccaria expertus eſt. *Lettere* §. 134. 135.

frictum pati potuerint, patet in eo saltem experimento, chartam tum nudam tum inauratam vim etiam resinofam taeniis sive albis, sive nigris impertiri, indeque sit verosimile varium etiam modum, quo frictio peragitur, ad eam inconstantiam (19) aliquid conferre.

C A P U T II.

De frictione binarum taeniarum sericearum oppositis coloribus infectarum: tum de Symmeriana cruralium electricitate.

21. **E**X experimentis in praecedenti capite expositis satis constitit contrarietatem electricitatum serici albi, atque nigri, quas Cl. Viri SYMMERUS (b), & NOLLETIUS (c) proposuerunt generatim admitti non posse, cum contra ex plerisque corporibus (18), & in quibusdam adjunctis ex omnibus, quae experiri libuit, solo sulphure excepto, (18. 20) sericum album similiter ac nigrum resinofam electricitatem acquirat (d). Praestabit igitur ea ipsa experimenta expendere, ex quibus Cl. VIRI in eam opinionem adducti sunt.

22. Symmerianorum experimentorum haec summa est. Cruralia sericea oppositi coloris, alterum scilicet album, nigrum alterum (e) prius excaesata (f) in crus vel in brachium (g) opportuna tempestate (h) immitebat, ibique
vel

(b) P. 30. 33. 38. 39. 40.

(c) In *Symmerum* p. 43.

(d) Vera sericum generatim inter corpora resinofam electricitatem possidentia recenseri consueverat, *Nollet Leçons VI*, p. 345.

(e) P. 7. 32. 13. 41.

(f) P. 7.

(g) P. 9. 25.

(h) P. 6. 7. 25. 75. 76.

vel relinquebat aliquamdiu (*i*), vel etiam fusque deque trahebat (*k*) dein utrumque simul e crure, vel brachio detrahebat (*l*). Quamdiu conjuncta erant exigua electricitatis indicia dabant: si alterum ab altero educeretur, ac removerentur, utrumque vehementer electricum se ostendebat, & album quidem vitrea, nigrum vero resinosa electricitate imbutum erat (*m*).

23. Nullibi porro SYMMERUS meminit exterioris affricatus, quo ad tibialia excitanda usus fuerit: unde ipsorum electricitas soli eorum frictui adversus crus dum induerentur, aut exuerentur (*n*), vel cruralium inter se frictui tribuenda erit.

24. Porro si ex frictu cruralium adversus crus electricitas inducta fuisset, illud perpetuum fuisset, ut crurale cruri proximum, quod maximam frictionem passum esset vim resinofam reciperet, cujuscumque demum coloris esset (17) contra SYMMERUS monet, si crurale album sit, vitream electricitatem constanter recipere, seu subsit nigro, seu eidem sit superpositum, & vicissim, si nigrum, constanter recipere resinofam (*o*), ex quo constat electricitatem cruralium in iis experimentis eorumdem frictui adversus crus tribuendam non esse.

25. Reliquum igitur est, ut cruralium electricitas eorumdem inter se frictui tribuatur (23): & quidem expertus sum sericum album quovis ex recensitis modis (18) serico nigro fricatum, vitream electricitatem acquisivisse, nigrum fricatum albo resinofam.

26. Cl. NOLLETIUS crurale album, & nigrum alterum alteri superextensum, & corpori deferenti imposita confricabat

(*i*) P. 7.

(*k*) P. 31.

(*l*) P. 8. 9.

(*m*) Vid. loca cit. n. e.

(*n*) Hujc electricitatem tribuere videtur Symmerus p. 7. 9.

(*o*) P. 6. 141.

cabat, & similiter ea ratione album vitrea, nigrum resinosa electricitate constanter imbuebat (p).

27. Porro cum duas taenias oppositis coloribus infectas alteram alteri superpositam, supra deferens leve planum confricarem, eveniebat interdum, ut alba vitream, nigra resinofam electricitatem reciperet, seu alba subesset, seu nigra, seu pelle, seu charta, seu corpore quovis fricarentur. Eveniebat alias, ut taenia superposita electricitatem reciperet respondentem indoli corporis, quo fricabatur (18. 19), subjecta vel eandem, vel contrariam, prout taeniae vel simul, vel seorsim a subjecto plano separabantur, non aliter, ac quando duas taenias albas (1) vel duas nigras (16) adhibebam.

28. Quare cum in primo casu indoles electricitatis naturae confricantis corporis non responderet, sed fricati ferici colori, constat similiter, ac §. 14. electricitatem non ex frictione, quae charta aut pelle fit, inductam fuisse, sed ab alterius taeniae adversus alteram attritu (confer 3), cum contra in casu altero electricitas inducta respondens indoli corporis fricantis ostendat confricatam taeniam majorem adversus illud, quam adversus subjectam taeniam attritum passam fuisse.

29. Revera primum illud (27) eveniebat constanter, quoties sericum confricandum laxum erat, ac cedens, & cruralium instar retiforme (q), ut contra subjectum sericum facilius excurreret, ac fricaretur; corpus vero confricans ex iis, quae minorem serico electricitatem impertuntur; cum contra contingeret alterum, si sericum confricandum strictius, crassius, rigidius esset, corpus vero confricans ex
iis

(p) Mem. de l'Acad. an. 1761. p. 248.

(q) *Fait à maille*. Ex his patet, eam structuram, quam prae textura ordinaria telae sericeae his experimentis aptiorem existimaverat. Cl. Symmerus, revera plurimum conferre ad contrarietatem electricitatum serici albi, & nigri servandam, quoties alterum super alterum fricatur.

iis, quae majorem serico electricitatem tribuunt; (*) sic enim sericum confricatum ab ipsius affrictu potius, quam ab affrictu adversus subjectum sericum, electricum evadebat.

30. Idque adeo verum est, ut sericeum crurale, etiam album, supra vitrum charta inaurata fricatum, vim reciperet resinofam, subjectum vitrum vitream ostenderet; cum contra tela sericea firmior, ac densior (r) vitro superextensa ex frictione per inauratam chartam plerumque, ex frictione sulphuris perpetuo vitream electricitatem reciperet, tuncque subjectum vitrum resinosa imbueretur. Ex quibus patet (ut obiter id observemus) sericum album supra vitrum fricatum, quod ab ipso attrahitur, contrariam semper eidem electricitatem possidere, hinc stare leges electricorum motuum a DESAGULIERIO propositas (s). Eas enim electricitates contrarias esse luculenter constat, tum quod ex binis taeniis opposita electricitate imbutis (18), quae ab eorum altero attrahitur ab altero repellatur, & viceversa, tum quod caeteras omnes contrarietatis notas exhibeant.

31. Igitur fricatum sericum interdum electricitatem recipit a corpore fricante, alias a serico subjecto, pro ut ab eorum alterutro majorem attritum patitur, & pro ut alterum prae altero electricitati in serico per affrictum ciendae aptius est.

32. Huc etiam facit experimentum aliud, quod nempe si binae taeniae, alba altera, altera nigra, vel si tres, quarum duae extremae albae, & media nigra, aut duae extre-

tremae

(*) Hinc diuturna frictio, quae ut vitrum (Nollet *Leçons* tom. VI. p. 274.) sic sericum aptum reddebat ad majorem electricitatem ex frictu suscipiendam id etiam efficiebat, ut fricatum sericum potius a fricante corpore, quam a supposito contrarii coloris serico electricitatem reciperet.

(r) Gallice *soin blanc*.

(s) Confer *Cl. Nolletium* in *Symmer*, p. 149. 150., & *Mem. de l'Acad.* tom. cit. p. 253.

tremæ nigrae, & media alba, aliae aliis hoc ordine impositae charta inaurata intercipientur, ex chartae frictione, albae semper vitream, nigrae resinofam electricitatem acquirant, cum contra, ut diximus (20), binae albae taeniae, aut binae nigrae, ea ratione, resinosa semper imbuantur. Quo quidem in experimento, quoniam vis affricus inauraturae circumpositae adversus taenias, & taeniarum contra se mutuo aequalis sit, inde colligi potest, posita aequali frictione, fericum majorem ab oppositi coloris ferico, quam ab inaurata charta electricitatem recipere, adeoque talem exhibere, qualis ab oppositi coloris ferico induceretur.

33. Ex his jam facile est intelligere, cur cruralia in crus inducta, etiam nulla externa adhibita frictione electrica fierent (23): nempe dum alterum super alterum induebatur inter se mutuo fricabantur. Cur perinde esset sive albo crurali nigrum, sive album nigro subesset (24): scilicet, sive album fericum nigro, seu nigrum albo fricetur, album constanter vitream, nigrum resinofam electricitatem acquirit (25). Cur etiam si cruralia cruri inducta manu fricentur, album perpetuo vitream, nigrum resinofam electricitatem recipiat (1); nempe cruralia cum cedentia sint ex manu superducta minus atteruntur, quam adversus se invicem confricentur (Confer. 29. 32.) Cur duo cruralia ejusdem coloris vim acquirant exiguam (u), cum tamen duae taeniae, etiam ejusdem coloris ex frictione non minus electricae fierent, quam si diversum colorem praesferrent (1. 2). Nempe SYMMERUS cruralia cruri applicita extrinsecus non fricabat (23) hinc si ejusdem coloris essent, non aliam electricitatem acquirere potuerunt, nisi quam levis eorum affricus adversus crus dum induerentur,

(1) Ut in experimentis *Cl. Nolletii*, Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 245. 252

(u) Symmer. p. 26. 27. 30.

tur, aut exuerentur, excitasset, quae porro exigua est: quod si vero postquam ejusdem coloris cruralia induta fuissent, manu fricarentur, non secus, ac taeniae in superioribus experimentis (1. 2) eximiam electricitatem acquirebant (v). Ex his etiam eruitur, cur cruralia simul detrahi debeant (x). Si enim alterum prius educatur contra subjectum confricari debet directione illi contraria, qua confricabatur, dum indueretur, ex quo eorum vis infringi proculdubio debet, ut taceam, quod generale est corporibus contrarias electricitates possidentibus, ut nimirum sejuncta multo citius electricitatem disperdant, quam si juncta serventur. Quod si crurale nigrum albo superpositum sit, quod frequentius contigisse videtur in SYMMERII experimentis (y), & manu etiam fricetur, cum eadem electricitas, & a manu fricante, & ab albo subjecto in nigrum crurale ex eo frictu conjiciatur, scilicet resinosa (17. 25), hinc fiet, ut nigri cruralis electricitas electricitate albi multo sit vehementior; proindeque ea obtinebunt, quae de binis taeniis, aut simul, aut singillatim a subjecto plano divellendis adnotata fuerunt (1). Ex his demum constat cruralium electricitatem inprimis excitari dum alterum super alterum induitur, aut si simul induantur (z), dum alterum super alterum trahitur, extenditurque; dum enim detrahuntur, cum detrahantur simul, vix, ac ne vix quidem inter se mutuo atteri possunt; imo vero, ut diximus, si seorsim detrahantur, quando ingens fieri

(v) Etiam album sericum super album, aut nigrum super nigrum cruri impositum, & manu siccarum electricum fieri, sed minus. *Nollet* in *Sym.* p. 25 Alibi de gradu electricitatis caute esse deceptendum, seque taeniis fericeis experimenta instituisse, quae *Symmerianis* contraria videantur p. 43. 44.

(x) Il faut bien prendre garde de ne pas les desunir. *Symmer.* p. 8. 9.

(y) Uti p. 10. 11., & 30. 31., & 143. 144. j'ai trouvé que le bas noir ne doit point son électrisabilité sur le bas blanc &c. *Nollet* in *Sym.* p. 42.

(z) Il est assez indifférent comment on met les bas *Symmer.* p. 8. Ainbo simul in crus induisse videtur *Nolletius* Mem. de l'Acad. cit. p. 245.

fieri debet alterius super alterum affricus, eorum vis infringitur. Postquam cruralia detracta sunt inter se mutuo tenacissime adhaerent, certo indicio jam susceptae electricitatis, ut propterea affricui, quem patiuntur, dum a se mutuo separantur, ea electricitas tribui non possit (&).

C A P U T III.

De constanti taeniarum electricarum ad laeves superficies adhaesione.

34. **L** Aminam plumbi planam ac laevem ex sericeis filis suspendebam, ut *insulata* undique esset. Tum taeniam vitrea electricitate imbutam uno extremo ita prehensam, ut manus ipsam sustentans a plumbo dissita esset, ad planam plumbi superficiem admovebam; segniter attrahebatur. Si interim ad plumbum digitum ferrem, hunc inter & plumbum profusiebat scintilla, & multo alacrius eo momento taenia ad plumbum ferebatur, eique firmiter adhaerens toto pondere suo facile sustentabatur. Pergebat deinde taenia ad plumbum adhaerere (a); at quantumvis juncta relinquerebatur, nec plumbum, nec adhaerens taenia ulla amplius electrica signa dabant. Si taenia a plumbo removeretur, nova plumbum inter, & admotum digitum scintilla emicabat, & taenia ut prius electricam se praebebat.

35. Si loco taeniae vitream electricitatem habentis, taenia adhiberetur resinosa electricitate imbuta, eadem omnino observabantur.

f 2

36.

(&) Quae Cl. Nolletii suspicio est in *Symmer*. p. 19.

(a) Constantem hanc serici electrici ad laeves superficies adhaesione Cl. *Symmerus* primum observavit p. 68. 69. Confirmavit Cl. *Nolletius*, licet eius explicatio adhaesioni taeniarum ad laeves coërcentium superficies tantummodo consentanea sit. *Ib.* pag. 80. 81.

36. Si taenia electricitate sive vitrea, sive resinosa imbuta ad plumbi laminam, ut prius (34) aptetur, nec scintilla ulla ex plumbo eliciatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam repellit, imbutam electricitate opposita attrahit. Si scintilla primum ex plumbo eliciatur, attrahit utramque. Si, postquam scintilla ex plumbo excussa est, prior taenia revellatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam attrahit, imbutam opposita repellit.

37. Igitur plumbum, cui electrica taenia adplicata est, ejusdem generis electricitatem emittit, qua cognomine electricitate imbutam taeniam repellit: ubi ea electricitas ab admoto digito recepta fuerit scintillae specie, jam plumbum instar corporis se habet nullam electricitatem habentis, & taeniam utramvis indiscriminatim attrahit. Demum si revellatur taenia, jam plumbum aptum fit electricitati, quam emisit, recipiendae, & propterea ipsi taeniae contrariam electricitatem ostendit, & admoto digito, novam scintillam edit.

38. Similiter taenia, quamdiu ejusdem generis electricitas ex plumbo hausta non sit per admotum digitum, signa electrica edit: postquam scintilla ex plumboeducta est, instar non electricae se habet; si a plumbo dimoveatur iterum suam electricitatem ostendit.

39. Patet itaque taeniam electricam planae faciei plumbi admoram, nisi ut contrariam, & aequalem in plumbum electricitatem inducat; postquam admoto ad plumbum digito talem in ipso electricitatem excitavit, plumbum, & taeniam aequaliter, sed contrario modo electrica, firmiter invicem adhaerere, & nullam jam in exteriora corpora electricam vim exerere: demum si dimoveantur sibi mutuo contrarias, & aequales electricitates ostendere.

40. Et haec quidem stellulae & pennicilli observatione confirmantur. Etenim si dum taeniam electricam planae faciei

faciei plumbi admoveas (34. 35.), acuminatum metallum oppositae plumbi faciei obvertas, stellulam ad ejus apicem emicare videbis, si taeniae electricitas vitrea sit, pennicillum, si resinosa: mox utrumvis evanescet, nec ullam amplius electricitatem ad eum apicem observabis, quantumvis taeniam plumbo adhaerentem relinuas. Hanc demum si revellas, & removeas a plumbo, apex iterum electrica signa, sed contraria dabit; nempe pennicillum, si revulsae reniae electricitas vitrea fuerit, stellulam si fuerit resinosa. Si acuminatum metallum non plumbo obversum, sed ipsi adnexum fuerit, eadem omnia, sed contrario, ut consentaneum est, ordine apparebunt (b).

41. Igitur ut taenia electrica non electricae applicita, contrariam, & aequalem in hanc electricitatem inducit (12, 13.), sic etiam inducit in plumbum, si eidem applicita sit (39). Totum discrimen in eo positum est, quod in taeniam vaporis electrico difficilius penetrabilem contraria electricitas alicui non possit, nisi eidem acuminatum metallum obvertatur (15); in plumbum, quod deferens est, & acuminato metallo, & cujuscumque figurae deferente corpore admoto, facile alicuiatur. Rursus quemadmodum, postquam taenia electrica oppositam, & aequalem electricitatem in adplicitam taeniam non electricam induxit, utraque atmosphaera caret (8), sic etiam postquam taenia electrica aequalem, & contrariam in plumbum electricitatem induxit, nec jam ipsa, nec plumbum ulla oppositarum electricitatum signa praebent, quamdiu juncta relinquuntur, eas ostensura, ubi primum a se invicem fuerint dimota (39).

42. Ex quibus jam intelligitur, cur si duae taeniae opposito modo, & aequaliter electricae (8) ad planam plumbi faciem successive admoveantur, ex cujusque admotione

(b) Confer de his signis electricis Cl. *Beccaria electricis artific.* §. 200. & seq.

tione plumbum inter, & digitum scintilla existat, quae iterum existat ex cujusque dimotione, si successive dimoveantur: contra si simul vel admoveantur, vel dimoveantur, scintilla nulla fit. Cur si taeniae electricae ad plumbum haerenti, taeniam opposito modo, & aequaliter electricam (8) admoveas; illa huic adhaereat, a plumbo secedens (c) & interim plumbum inter, & digitum scintilla exiliat: nimirum dum taeniae oppositas, & aequales electricitates habentes in se invicem agunt, agere desinunt in ambientia corpora (§. cit.), hinc plumbum ab actione teniae ipsi primum applicitae jam liberum, aptum fit, ut electricitatem per hanc inductam amittat, ac scintillam edat. Demum intelligitur ex his, cur duae, aut plures teniae eandem electricitatem habentes; atque adeo sese repellentes successive laminae plumbeae applicitae, successive hanc inter & admotum digitum totidem scintillas excitent, & interim aliae super alias ad plumbum adhaereant, si singillatim dimoveantur, totidem scintillas iterum excitaturae.

43. Quoniam vero electricitas in plumbum inducitur opposita, & aequalis electricitati applicitae teniae (39), patet in eo saltem experimento deferentia corpora tantum vaporis electrici recipere, aut emittere posse, quantum continent coërcentia; propterea minus tutum ratiocinium esse, quo ex coërcentium onere concluditur, longe majorem in coërcentibus, quam in deferentibus corporibus ipsius copiam contineri (d).

44. Imo experimentum habeo, ex quo directe confici videtur aequalem in utriusque classis corporibus vaporis electrici quantitatem contineri. Nempe glaciem intra vas metallicum ex sericis filis suspensum aestivo tempore immisi, tum levissima deferentia corpora circa vas constitui, quae
a qua-

(c) H. etiam a Cl. *Symmero* notatum p. 69.

(d) *Franklin* Tom. I. pag. 186. 187. & 196. & 202. vers. gallicae.

a quavis, vel minima in vase orta electricitate commoveri possent. Glacies tota in aquam liquata est, quin ulla in illis corpusculis commotio observata sit. Jam vero aqua, ut notum est, succussionem desert, & pro armatura interna phialae succutientis inservit, glaciei frustum ipsam deferre similiter non potest (c), adeoque haec coërcentibus vaporem electricum, illa deferentibus est annumeranda (f); quapropter si coërcentia corpora majorem quam deferentia electrici ignis copiam continerent, glacies, quae liquefciendo ex coërcente deferens fit, excessivum ignem emittere deberet in vas metallicum, quo includitur, tantamque ejus copiam dumtaxat retinere, quantum deferentis corporis, in quod liquefciendo abit, natura postuleret. Quum igitur nil simile observetur, maxime probabile fit, parem in utroque corpore, glacie scilicet, & aqua, parem adeo in coërcentibus, ac deferentibus corporibus ignis electrici quantitatem inesse (g).

45. Si taeniam electricam non planae plumbi *insulati* faciei (34), sed ejus marginibus in aciem sectis, angulisve admoverem, attrahebatur primum, sed mox repellebatur. Tunc, admoto ad plumbum digito, scintillam excutiebam, & rursus taeniae attractio habebatur, mox, remoto digito, in repulsionem abitura; sicque alterne admoto; remotoque digito, alterne attrahebatur, ac repellebatur taenia, donec omnis ipsius electricitas extincta esset.

46. Inde liquet, in hoc experimento ex taenia in plumbum ejusdem generis electricitatem diffundi, quae dum diffunditur attractionem efficiat, mox vero diffusa repulsionem pariat: tunc si, admoto digito, plumbi electricitas extinguatur, iterum residuam taeniae electricitatem in

(c) Ib. p. 190. 191.

(f) Uti concludit idem *Franklinus* p. 40. in adnotatione.

(g) Similiter ceram fusam, & resinam deferentia esse ex *Wilsono* tradit *Franklinus* (loc. ult. cit.) & tamen resinas fusas sola frigidatione, electricas non fieri, sed affricu incaute admisso accuratissimis experimentis *Cl. Beccaria* demonstravit, l. c. §. 468. & seq.

plumbum diffundi, quae dum fluit, novam efficiat attractionem, dein ubi, sublato digito, rursus in plumbo accumulata fuerit, denuo repulsionem producat, sicque alterne, donec omnis taeniae electricitas fuerit exhausta.

47. Si istud experimentum (45) cum superiore (34) conferatur, patet in illo taeniam electricam oppositam, & aequalem electricitatem in plumbum inducere (41); in hoc ejusdem generis (46); hinc in priori casu constantem taeniae, & plumbi attractionem haberi, in altero attractionem mox in repulsionem abire. Ejus vero discriminis rationem in eo totam positam esse constat, quod taenia illic planae plumbi faciei, hic ejus angulis admoveatur: scilicet dum planae faciei plumbi admovetur taenia, cum aegre ejus electricitas, ob naturam coërcentem, ipsam deferere possit, & in plumbum se diffundere, reliquum est ut contrariam, & aequalem electricitatem in hoc ex admoto digito aliciat, cum qua possit aequilibrari (41); contra cum plumbi angulis admovetur taenia, horum vi ejus electricitas facilius exfugitur, idemque contingit, ac si taenia magis deferens esset (15); hinc plumbum ejusdem generis electricitatem acquirit, eademque taeniam inter, & plumbum motuum leges obtinent, quae in deferentium corporum motibus observantur (g*).

48. Haec

(g*) Similiter Cl. *Aepinus* tubum ex frictione electricum, in quadam distantia, ut electricitas communicari posset, vitream electricitatem, qualem possidebat, de more in aeneam laminam objectam emisisse observavit. Cum eorum distantia tanta evasisset, ut per interjectum resistentem aërem electricitas diffundi non posset, ac propagari, tubum contrariam, seu resinofam electricitatem in eam laminam ex corporibus ipsi vicinis alicuisse (Vid. Nov. Com. Ac. *Petrop.* Tom. VII.). Et his porro similia jam proposuerat Cl. *Cantonus* (Vid. Auc. exper. adjecta edit. parif. oper. *Frankl.* II. a pag. 289. ad 293.) Proprietas electricitas, sive interpositione coërcentium intercepta, ut in experimentis *Aepini*, & *Cantoni*, sive eorum potis implicita, ut in nostris, adeo ut io circumposita, aut applicita deferentia propagari non possit, contrariam electricitatem in ipsa ex vicinis aliis deferentibus accersit, ac congerit.

48. Hac adnotata distinctione (47) facile est respondere quaestioni, quam CL. NOLLETIUS proponit: cur nempe folia metallica a tubo vitreo, resinifve electricis, plerumque alterne attrahantur, & repellantur; alias tamen attrahantur dumtaxat, & pertinacissime ad ipsorum superficiem adhaereant (*h*), nempe quoties electricitas a corpore electrico aegre extricatur (*i*), quae folia acutos margines, angulosve ad id corpus convertunt ea omnino sunt in adjunctis §. 45., propterea alterne attrahi, ac repelli debent; quae vero plana superficie ad ipsum conversa sunt, vel angulum ad oppositas partes obvertunt, quae res vicem suppleat digiti tangentis (*), vel manu ad electricum corpus aptantur, in casum incurrunt § 34, proindeque iisdem legibus obnoxia sunt, & constanter adhaerescunt.

49. Cum taenia electrica taeniae non electricae contrariam electricitatem conciliabat, inde non multum debilitabatur, ita ut aliis, & aliis taeniis oppositam electricitatem successive impertiri posset (12. 13.). Similiter taenia electrica a plumbo dimota, cui contrariam, & aequalem electricitatem conciliavit (34) propriam electricitatem fere integram servasse deprehenditur. Hinc est, ut eadem taenia electrica aliis, aliisque plumbeis laminis contrariam, & aequalem electricitatem successive etiam tribuere possit, vel, quod idem est, si electricitas in plumbum inducta, admoto digito, scintillae specie educatur, rursus nova, & ejusdem naturae ab adplicata taenia in id induci queat, sicque repetito, donec taenia electricitatem aliquam servaverit. Igitur in quovis taeniae electricae ad

g

pla-

(*h*) In *Symmerum* p. 56. & *Mem. de l'Acad.* pag. 254.

(*i*) Quando nam aegre extricetur infra constabit

(*) Monuerat jam Cl. *Nolletius*, quod si folia metallica aut alia levia corpuscula in tubum mediocriter electricum demittantur, *Vous observerez très-souvent, qu'une partie de ces corps paroît comme collée au corps électrique, pendant que l'autre paroît soulevée, & comme entraînée.* *Ettai sur l'électricité* pag. 76.

planam plumbi faciem accessu digitus ex plumbo scintillam eliciet, in quovis ejusdem recessu scintillam similiter educet, sed priori oppositam; adeo ut si illa a resinosa plumbi electricitate repetenda erat, haec vitreae ipsius electricitati tribuenda sit: scintillae propterea totidem ejusdem generis ex plumbo elici poterunt, quot vicibus taenia ad plumbum admovetur, scintillae iterum totidem ejusdem generis, sed priori oppositi habebuntur, quot vicibus taenia ab eodem plumbo removetur.

50. Eae quidem scintillae paullatim decrescunt, pro ut taenia paullatim electricitatem suam exuit; quandoquidem vero id lente fit, hinc est, ut alterna taeniae admotione, & remotione plures hoc pacto scintillae haberi possint satis vehementes, si celeriter taenia ad plumbum admoveatur, removeaturque. Et quidem cum externam phialae armaturam manu prehensissimam, ejusque unco in qualibet taeniae vitream electricitatem habentis ad planam plumbi faciem admotione, scintillam ex plumbo elicuissem, dum scintillas ab ejus remotione ortas extraneo deferente corpore excutiebam, factum est ut quadraginta circiter satis validas, parumque decrescientes scintillas obtinerem, quibus phiala onerabatur, & succutiebat, interiore ejus facie vitream, exteriore resinofam electricitatem habente. Si eodem modo scintillas intra phialam accumularem, quas in quavis taeniae remotione plumbum praebat, & vicissim, quas edebat in quavis ejus admotione, extraneo deferente corpore elicere, phiala etiam onerabatur, & succutiebat; sed ejus interna facies resinofam, externa vitream electricitatem habebat: si utraque scintillas, tum quas in taeniae accessu, tum quas in ipsius recessu plumbum praebet, in phialam similiter congererem, nullam inde phiala electricitatem acquirebat, oppositis scilicet electricitatibus sese invicem destruentibus. Demum si singula haec experimenta taenia resinofam electricitatem habente
insti-

instituerem, eadem omnia, sed inverſo, ut quiſque intelligit, modo eveniebant. Ex quibus illud confirmatur, quod aliis argumentis ſuperius oſtendimus (39. 40.), ſcintillas plumbum inter, & digitum conſpicias in taeniae admotione, tum in ejuſdem remotione a contraria electricitate ipſius plumbi ortas eſſe.

51. Cl SYMMERUS cruralium electricitatem acuminato ferro hautam (45. 47.) in phialam adigebat, ſicque fuſſionem habebat, quae porro tanta erat, quanta electricitas cruralium, qua phiala fuerat imbuta (*k*) nos ſcintillas totidem habemus, quarum ſingulae aequales ſunt actuali cruralis electricitati, quot vicibus ad plumbum admoveatur, totidem iterum, ſed contrariae naturae, quot vicibus ab eodem removeatur, ſicque modum invenimus facilem electricitatem abſque affricu multiplicanti.

52. Ex haecenus dictis intelligitur ratio phaenomeni ſuperius (7) propoſiti; cur nempe taeniae, quamdiu plano, ſuper quod fricatae ſunt applicitae perſtant nulla electrica ſigna edant, quae ſtatim praebeant, ſi ab eodem dimoveantur. Scilicet reſinoſa electricitas in taeniis praevalens ab aequali quantitate vitreae electricitatis in ſubjecto plano aequilibratur, uti conſtat, ſi prius *inſuletur* planum, quam taeniae removeantur: hinc nullam in exteriora corpora actionem exercet, donec, dimoto plano, aequilibrium non fuerit ſublaturum (41).

(*k*) P. 40. 41.

De phaenomenis tubi aëre vacui, aut deferentibus corporibus pleni. De analogia cruralium oppositas electricitates habentium cum onerato vitro. De tenacitate electricitatis in coërcentibus.

53. **S**I duo vitra plana, nuda, optime exsiccata, alterum alteri superpositum supra corpus deferens laeve ex. gr. supra chartae inauratae folium cum solo communicans similiter ac taeniae (§. 1.) fricentur, inde electrica fiunt, & tum ad se mutuo, tum ad subjectam chartam adhaerescunt: si lamina plumbea haud valde crassa loco chartae inauratae adhibeatur, ipsa etiam vitris adhaerens ab eorum vi electrica toto pondere suo sustentabitur.

54. Quamdiu charta vitris adhaerens perstat, vix ullum praebent electricitatis signum: si removeatur, & vitra juncta serventur, utraque facie vitream electricitatem ostendunt: taeniam enim vitrea electricitate imbutam utraque facie repellunt, imbutam resinosa attrahunt utraque. Si charta vitris iterum aptetur, iterum electrica signa cessant, & ita deinceps, prout charta vitris adplicatur, aut ab eis removetur, ipsorum electricitas aut silet veluti sopita, aut ad exteriora se prodit, donec penitus extincta sit.

55. Si charta, aut plumbum vitris subjectum sericeam taeniam adnexam haberet, per quam a vitris divelli posset, quin tangeretur, atque adeo receptam electricitatem amitteret, ipsum inter, & vitra leve corpus ex serico filo pendulum oscillabat, aliaque omnia habebantur, quae contrariam vitris, atque adeo resinosa illius electricitatem ostenderent.

56. Vitra vero ipsa contrariam electricitatem praeferebant, adëo ut inter ipsa leve corpus ex serico filo pendulum oscillaret superiore vitream, eamque majorem; inferiore resinofam electricitatem habente.

57. Consideranti facile patebit hoc experimentum idem omnino esse cum illo, in quo duae taeniae ejusdem coloris altera super alteram supra planum deferens fricatae simul ab eodem divellebantur (1): ut enim illic resinosa electricitas in superiori taenia, vitrea cum ipsa aequilibrata partim in taenia subjecta, partim in substrato deferente corpore posita erat (7. 52.), ita hic vicissim vitrea in superiori vitro, resinosa cum illa aequilibrata partim in vitro inferiori partim in subjecta armatura residet, unde vitrorum electricitas non prius ad exteriora se prodit, quam detracta armatura aequilibrium fuerit sublatum.

Hisce itaque vitris eadem experimenta exhiberi possunt, quae taeniis electricis instituta praecedenti capite exposita sunt.

58. Quod si, detracta priori laevi armatura (53) fricata vitra per breve tempus hirsuto deferenti corpori imponantur, aut si supra id corpus fricentur, ab eo dimota vix ullam in ambientia corpora electricam vim exercent: cohaerent tamen inter se, & ab invicem dimota acquisite oppositas, & quidem aequales electricitates ostendunt, quae iterum silent vitris ad contactum restitutis, & ita deinceps donec omnis ipsorum electricitas extincta sit. Et haec quidem iis iterum sunt similia, quae de taeniis in similibus adjunctis exposita sunt (8. 10.)

59. Jam vero patet experimentum nostrum (53) idem omnino esse cum hauksbejano (*), in quo globus, aut tubus vitreus aere vacua, aut deferentibus corporibus re-

ferta

(*) *Experim. phys. mech. tom. I. p. 277.*, & seq. vjd. etiam similia *Du Fay* experimenta a Cl. *Demarest* huc allata p. 299. & seq.

ferta confricantur, quando, ut notum est, nulla, aut perexigua habentur electricitatis signa, quae tamen absque nova frictione se produnt, si aut aer admittatur (1), aut deferentia corpora educantur. Quare hic etiam dicendum erit electricitatem ita dispositam esse, ut vitrea quidem electricitas ad exteriorem vitri superficiem, resinosa autem priori aequalis partim in interna vitri facie, partim in armatura adnexa resideat, aut in vacuo armaturae vices gerente (57.); hinc quamdiu oppositae illae electricitates aequales sunt, & aequilibratae, exteriora signa earumdem nulla haberi; sublata vero armatura, sicque resinosa electricitate diminuta, jam praepollentem vitream electricitatem se ostendere (m).

60. Illud vero etiam ex nostris experimentis deducitur, ut experimentum hauksbejanum ad votum succedat, corpora deferentia, quibus tubus repletur talia esse debere, ut internae illius superficiei aptari possint, & uniformem armaturam eidem praestare; secus enim si scabra, angulosa, hirsuta, jam tota, aut fere tota resinosa electricitas in internam vitri faciem inducetur, unde licet ea corpora post vitri frictionem detrahantur, oppositae electricitates in aequilibrio esse pergant, nullamque adeo, aut perexiguam in ambientia corpora vim exercebunt (58).

61. Si porro vitra descripto modo electrica facta (53.58.), utrimque armentur ex oppositarum armaturarum contactu succussio nulla habeatur; imo & taeniae (7), & vitra, quamvis corpore deferente levi, ut charta inaurata ad aliquot minuta temporis undique obvoluta serventur cohaere

re

(1) *Otto de Guerike* apud *Cl. Dalibar.* in *histor. elect. Franklin.* epist. praefixa p. xvi.

(m) Apparet igitur quam recte *Cl. Nolletius* comparaverit latentem electricitatem cruralium sibi mutuo applicitorum cum latente electricitate tubi deferentibus corporibus pleni, quoniam illa cruralium separatione, haec deferentium corporum detractio manifesta sit. In *Sym-mer.* p. 51.

re pergēt, & detecta, ac sejuncta nondum oppositas electricitates amisisse observantur, quum consuetum onus ex oppositarum armaturarum communicatione temporis momento fuissent amissura.

62. Experimentum instituebam a FRANKLINO propositum, nempe bina vitra plana optime exsiccata, alterum alteri superpositum, ut instar unius essent, ad inferiorem faciem deferenti lamina tegebam; ita tamen ut armatura haec cum solo neququam communicaret, sed perstaret *insulata*, quamdiu opposita superior junctorum vitrorum facies fricaretur. Dein superiorem hanc faciem alterne fricabam, alterne ad subjectam armaturam admoto digito scintillam ciebam: inde vitra, ut prius (53), tum inter se, tum ad subjectam armaturam adhaerescabant, & quemadmodum FRANKLINUS docet (n), onerabantur; ita ut, imposita superiori faciei, quae fricata fuerat, armatura, ex hujus, & inferioris armaturae simultaneo contactu succussio haberetur.

63. Verum quod singulare videri potest, postquam vitra, facta oppositarum armaturarum communicatione, succussissent, adhuc tamen cohaerebant, & quamvis juncta electricas vires in exteriora corpora non exercerent, ab invicem tamen dimota oppositas electricitates ostendebant, taliaque, uno verbo, erant, qualia statim post frictum fuerant in superiori experimento (58.). Duplicem adeo in hoc experimento electricitatem acquirebant, alteram qua succuterent, & quae succutiendo extingueretur, alteram quam diutius fervarent. Illam franklinianam, hanc symmerianam brevitatis causa dcinceps appellabimus.

64. Porro si, vitris illis (62), quibus oppositae electricitates inhaerent ab invicem dimotis, eorum armaturae tangantur scintilla ex utraque habebitur, & jam succutiendo inepta fient. Iis enim ad contactum restitutis, facta licet oppo-

oppositarum armaturarum communicatione nulla obtinebitur. Parum tamen ex eo armaturarum contactu symmeriana eorum electricitas infirmabitur; adhuc enim se mutuo attrahere pergent, & leve corpus ex serico filo inter ipsa pendulum in oscillationes adigere, eodem profus modo, quo in superiori experimento (63.) evenire diximus.

65. Igitur electricitas, quae succutit, similis est plumbi electricitati, quae solo contactu disperditur, quum primum taenia oppositam electricitatem habens ab ipso dimoveretur (37.), cum contra symmeriana vitrorum, aut taeniarum electricitas hujusmodi sit, ut semota vitra, aut taeniae oppositas electricitates habentia jam quidem atmosphaeras electricas ostendant, quibus antea caruerant, sed easdem nonnisi lente, ac temporis progressu ex deferentium contactu amittant (38. 63. 64.)

66. Utraque igitur electricitas, sublata oppositae electricitatis propinquitate, nititur quidem, ut prodeat e corporibus, quibus insidet, sed electricitas, quae succutit, uti ea, quae plumbo inest, in objectum deferens corpus statim diffunditur, symmeriana nonnisi lente.

67. Iterum si symmeriana electricitas satis promte prodeire possit, facta oppositarum facierum communicatione, succuteret, similiter ac frankliniana, & temporis momento extingueretur: quum vero contrarium contingat (61.63.), confirmatur eandem a corporibus, quibus insidet, irretitam difficilius, tardiusque se se expedire.

68. Revera si vitra, aut teniae symmeriana electricitate imbutae hirsuto deferente corpore undique obvolvantur multo citius eam electricitatem amittunt, quam cum laevi deferente quaquaversum teherentur (61). Cujus quidem discriminis ratio, ut alibi innuimus, (15) in eo tota consistit, quod pili hirsutae superficiei faciliorem reddant electrici fluidi fluxum per coërcentia, quibus obvertuntur.

69. Qui vero consideret, quam difficile coërentia electricitatem suscipiant, susceptamve dimittant, qui noverit, quam tarde aër electricitatem hauriat, haustamve disperdat (o), is facile intelliget symmerianam electricitatem aëreae similem esse, p̄disque coërentium altius intricatam, franklinianam deferentium electricitati assimilari, & vel deferentibus insidere, vel nonnisi superficie tenus in coërentibus positam, ac liberam esse.

70. Ex his constat tenacitatem electricitatis serico haud esse propriam, sed coërentibus quibusvis corporibus communem (p): constat deinde oppositas succutientes electricitates dimidiam hinc inde vitri crassitiem neutiquam occupare, multo minus per vitrum ex una in alteram superficiem transmitti: constat demum tenacitatem electricitatis ex sola difficultate, qua per poros coërentium electricum fluidum movetur, deducendam esse.

71. Facile autem est intelligere, cur vitrum, cujus una superficies fricatur, dum oppositæ faciei armatura cum solo constanter communicat, succutere nunquam possit, nec sericum, nec corpus aliud quodcumque similiter confricatum; nam ut FRANKLINUS advertit (q) contrariae electricitates, quae ad oppositas vitri superficies liberae adhuc sunt, ex simultanea communicatione cum corporibus deferentibus hinc per manum fricantem, inde per armaturam, qua proportione congeruntur, dissipari debent, nec unquam propterea vitrum succutiendo aptum fiet. At contra cum earum electricitatum pars, quae altius in vitri poros penetravit aegre inde iterum emergat, & sola oppositarum

h. facie-

(o) Vid. *Cl. Cantonum* l. c. p. 294., & *cl. Beccaria lettera VII.*, ubi de hac aeris electricitate multa nova, & pulcherrima theoremata per experimenta demonstrantur.

(p) Cum ralei laminam non secus ac vitra symmeriana electricitate imbuissem, ipsam parieti adhaesisse observavi, & ultra horam in ea adhaesione perseverasse.

(q) Loco ult. cit.

facierum communicatione cum deferentibus promte disperdi nequeat (61); hinc novam, & novam. continuata frictione adigi posse liquet, quae memoratis haecenus signis se prodat.

72. Inde est ut sericum, etiam deferente lamina interceptum, ex ejus frictione symmerianam electricitatem acquirat (3. 20. 32.) in eo *tourmaline* lapidi quodammodo simile, quem ex medii deferentis, in quod immergitur, calore electricum fieri observarunt (r).

73. Ex haecenus dictis crui posse videtur I. electricitate alterutra, vitrea scilicet, aut resinosa in unam vitrorum, aut aliorum coercentium faciem irruente, contrariam electricitatem ad oppositam faciem, si via detur, aequa quantitate accurrere. II. Eas electricitates in se invicem tendere, hinc coercentium laminas, quibus incumbunt junctas fervare. III. Dum ad se mutuo tendunt, neutiquam niti ut ad exteriora diffundantur, hinc ex neutra parte atmosphaeram efformare. IV. Interea tarde ac difficulter in interjectae coercentis laminae crassitiem penetrare. V. Si via facilior ac commodior detur, per quam misceri possint, facta nimirum per deferentia corpora oppositarum facierum communicatione, electricitates quae ipsis liberae adhuc insistent, eam viam legere, & sibi mutuo occurrentes se invicem destruere. VI. Eas vero, quae altius in poros coercentis laminae penetrarunt, niti quidem ut eandem viam teneant, sed cum aegrius inde exsolvi possint, multo tardius id fieri, nisi, acuminatis deferentibus corporibus utrimque admotis, earum exitus adjuvetur (68). VII. Cum eae oppositae electricitates ad se invicem tendant, hinc fieri, ut si via alteri tantum detur, admoto deferente, dum opposita undique coercentur, ne illa quidam prodeat hujus
actio-

actione retenta (*f*). VIII. Quotiescumque laminae, quibus oppositae electricitates inhaerent, sejunguntur, jam utraeque atmosphaeras electricas acquirere. IX. Et tunc quidem electricitates, quae liberae adhuc ad illarum superficiem sunt ex deferentium contactu momento dissipari (64). X. Eas vero, quae altius in ipsarum poros penetrarunt, multo tardius, nisi, acuminato deferente corpore objecto, ad exitum adjuventur (cap. III.)

C A P U T V.

*De armaturarum officio in onere vitrorum,
aliorumque coërcentium.*

74. **N**OTUM est FRANKLINI mirabile experimentum, in quo, vapore electrico per globi rotationem ab una ad alteram vitri armaturam deducto, vitrum onerat abique ullius extraneae electricitatis praesidio (*t*), tum aliud, in quo vitrum onustum, atque *insulatum* ope arcus deferentis item *insulati* deonerat, quin post deonationem ullum in arcu deferente, aut in corporibus cum ipso communicantibus electricitatis vestigium supersit (*u*). Quibus quidem in experimentis, cum oneretur vitrum, nulla extranea adscita electricitate, deoneretur iterum, quin quidpiam susceptae electricitatis dimittat, inde VIR illustris concludit maximam electrici vaporis copiam in vitro delitescere (*v*), quae ex una in alteram ipsius superficiem deducta vitrum oneret, aequabiliter iterum distributa nativam ipsius habitudinem restituat.

h 2.

75.

(*f*) Ne acutissimo quidem obverso stilo etruralia electricitate exui poterunt, quandiu juncta persistant. *Symmer.* pag. 36. 37.

(*t*) Tom. I. p. 101. 102.

(*u*) Ib. p. 68. 69., &c 115. 116.

(*v*) Ib. p. 9. 186. 196., 202. &c alibi passim.

75. Enim vero vaporem, quo ex una in alteram armaturam deducto oneratur vitrum, non ex illa prodire, nec in hanc congeri censet VIR summus, sed a subjecta vitri superficie per armaturam alteram erumpere, ut per alteram in oppositam vitri superficiem immittatur. Nam, mutatis quantumvis onerati vitri armaturis, successione haud minus haberi observat (*x*), & praeterea adnotat (*y*), dum deoneratur vitrum, iis ex locis, quibus arcus deferentis extremitates admoventur, ab emicante igne armaturae portionem disjici, & interpositum gluten comburi; ex quo confirmari contendit electricitatem, quae succutit, in armaturis neutiquam residere, sed sub ipsis positam in suo trajectu earum portionem abripere.

76. Quae quamquam maximam veri speciem praeferebant, experimenta tamen nonnulla afferam, quae suadere videntur electricitates, quibus vitra onerantur, in armaturis praesertim residere (*z*), ex iis in extimas vitri superficies, seu in exteriora ipsius strata deponi, quando armaturae divelluntur: idque non alio consilio, nisi ut acutiores excitem ad eandem rem accuratius pervestigandam.

77. Taenias plures sericas ejusdem coloris, quinque ad exemplum, aut sex, optime exsiccatas, alias aliis superpositas supra laminam deferentem laevem regula ex ebore fricabam, ea cautione, ne in eo affrictu taeniae, vel ab invicem separarentur, vel adversus subjectum deferens corpus attererentur. Postquam fricatae fuerant, si singulas seorsim, a suprema incipiendo, & ex ordine divellerem, in uniuscujusque divulsione inter taenias scintillae apparebant illis praecise in punctis, quae ab invicem separabantur:

(*x*) L. e. p. 140. & seq.

(*y*) L. c. p. 184. 185.

(*z*) Vim succutiendi in armaturis posuerat *Watsonus* *suave* p. 240. objectiones etiam contra doctrinam franklinianam proposuit, quibus tamen *Franklinus* ipse respondet tom. I. p. 164. & seq.

tur: eae scintillae similiter exiiebant in infimae taeniae separatione a substrata deferente lamina. Taeniae autem hoc modo divulsae omnes resinofam electricitatem praeferebant.

78. Si postquam taeniae fricatae fuissent (77.), omnes simul a subjecto plano divellerentur, in unum fasciculum cohaerebant, qui praevalentis resinofae electricitatis ex utraque facie signa exhibebat. Tunc si facies, quae laminae laevi deferenti applicita fuerat ad hirsutam superficiem ad moveretur, ut electricitates oppositae ad aequilibrium redigerentur (58), dein ab infima taenia incipiendo, singularum iterum, sed inverso ordine separatio fieret, iterum scintillae, ut prius, apparebant, sed taeniae omnes electricitatem habebant vitream, atque adeo priori oppositam, suprema excepta, quae resinofam electricitatem ex affricu acquisitam servaverat.

79. Hinc est ut si taenias eas alias aliis superpositas supra hirsutum corpus fricarem, dein omnes simul ab eo divellerem, ut fasciculum haberem, in quo oppositarum facierum electricitates aequilibratae essent (58) intermediae taeniae omnes, vel supremae congenerem electricitatem acquirerent, vel infimae, pro ut a suprema incipiendo, & progrediendo versus infimam, vel contra ab infima ad supremum procedendo ex ordine revellebantur.

80. Porro si binae earum taeniarum simul revellantur (77. 78. 79.) sibi mutuo adhaerent, & simul junctae eandem electricitatem habent, quam una tantum revulsa habitura esset, sed si separentur, observabitur eam electricitatem in ipsarum extima residere, intima, per quam fasciculo adhaerebant oppositam, sed multo minorem electricitatem habente.

81. Ex quibus conjectare licet, per affricum (77.) supremam taeniam electricitate imbui, caeteras, aut nullam, aut perexiguam recipere: oppositam vero, & aequaliam

lem electricitatem in subjectam deferentem laminam congeri, quae cum supremae taeniae electricitate aequilibrium constituat, impediaturque quominus suprema taenia ulla exteriora edat electricitatis signa. Si taeniae, a suprema incipiendo singillatim, & ex ordine divellantur, supremae electricitatem in subjectam deponi scintillarum specie, ex hac in tertiam, & ita deinceps, donec in infimam deponatur, propterea taenias omnes supremae cognominem electricitatem adipisci.

82. Si taeniae omnes simul a plano deferente divellantur (78), verosimile est electricitatem in eo congestam, & cum supremae taeniae electricitate aequilibratam in infimae superficiem, quae ab ipso divellitur, ex parte deponi scintillarum specie, hinc taenias in unum fasciculum junctas retineri: praevalere tamen in eodem supremae taeniae electricitatem, quod subjectae deferentis laminae electricitas cum ea aequilibrata, tota in infimam taeniam permeare non potuerit: quod si jam ea infima taenia hirsuto corpori obvertatur, ex quo majori vi in ipsam electricitas immittitur (15), tantam recipiet, ut cum supremae contraria electricitate aequilibretur, & tunc porro, si ab hac incipiendo singulae taeniae ex ordine divellantur, fiet, ut ejusdem electricitas similiter scintillarum specie ex una in alteram diffundatur, sicque taeniae omnes intermediae ipsi congenerem; atque adeo supremae contrariam electricitatem obtineant.

83. Quando porro binae earum taeniarum simul revelantur (80) earum extima comperitur habere electricitatem quam ex frictu, aut ex divulsa superincumbente taenia acquisivit, intima contrariam ab opposita extima taenia propagatam, sed multo minorem, tantam nimirum, quantum per interpositas adhuc taenias alias propagari potuit.

84. Cum vero electricitas in hac taeniarum separatione ab extremarum taeniarum alterutra (81. 82.), vel potius
 utra-

utraque (83.) in intermedias diffundatur scintillarum specie, hinc est ut ubi semel taeniae fasciculum componentes separatae sunt, quantumvis in fasciculum iterum ordinentur nullae amplius in earum separatione scintillae conspiciantur; nam, electricitate in eum modum ex taenia in taeniam jam propagata, ratio cessat, ob quam in nova earum separatione scintillae fuissent appariturae.

85. Intelligitur etiam ex his, cur binae taeniae, ubi semel seorsim divulsae a subjecto plano, aut a proximis taeniis se se repellunt, vel ex simultanea separatione se se attrahunt, quantumvis ad eas taenias, aut ad planum iterum admoveantur, sive seorsim, sive simul divulsae, ut antea se attrahere, aut repellere pergant. Nimirum electricitate imbuuntur taeniae in prima ea separatione: ubi semel eadem imbutae sunt frustra ad planum deferens, aut ad caeteras taenias iterum admoventur. Ex quibus porro jam ratio patet phaenomenorum plerorumque in capite primo expositorum (ab 1. ad 10.)

86. Similiter vero taenias alias aliis superpositas laminae metallica adplicabam, quae electricitatem ex globo recipiebat, dum interim ad oppositam taeniarum faciem acuminatum metallum obvertebam, & per ipsius longitudinem promovebam; dein cum cessante globi actione taenias explorarem, eadem omnino eveniebant, ac in superioribus experimentis: nempe pro vario ordine, quo revellebantur taeniae, vel omnes metallicae laminae contraria electricitate imbuti poterant, vel eadem, prima excepta, cui apex obversus fuerat, quae ab eodem receptam electricitatem laminae contrariam constanter servabat.

87. Quemadmodum igitur ab extremis taeniis in subjectis electricitas propagatur, aut a subjecto plano in proximam taeniam, quando a se mutuo separantur, sic ab armaturis in vitri superficies deponi in ipsarum separatione eorum phaenomenorum affinitas maxima, vel potius identitas suadere videtur.

88. Revera cum vitrum optime exsiccatum laminis plumbeis armassem, quae eidem tantum adplicatae, nequaquam vero adglutinatae erant, vitro de more onerato, armaturas firmissime ipsi adhaesisse observavi, a quo cum postea divellerentur, lux pariter & scintillae in locis apparuerunt, ubi ab invicem separabantur.

89. Cum vero plura sericeae telae (a) folia alia aliis superposita similiter armassem, & onerassem (onus autem exiguum recipere poterant, quod, ubi paullo major electricitas congesta fuisset, per serici crassitiem ex una in alteram superficiem exiliebat, unde deonerabantur), firmiter etiam armaturae ad serici superficiem adhaeserunt; sed cum earum alteram, suspensa quamvis manu, divellere tentarem, nunquam id perficere potui, quin interim scintilla a punctorum aliquo, unde divulsio fiebat per serici crassitiem ad oppositam armaturam exiliret, unde & deonerabatur sericum, & opposita armatura proprio pondere secedens decidebat.

90. Quare verosimile est electricitates oppositas in oppositis armaturis praesertim locatas, eas esse, quae ipsarum ad vitrum, aut sericum adhaesionem efficiant, quaeque, dum armaturae divelluntur, in vitri superficies irruentes scintillas exhibeant (88), in ea divulsione conspiciendas. Cum maximo impetu ex armaturis, dum divelluntur, in proximam coërcentem superficiem irruant, hinc factum esse, ut armatura altera divelli a serico non posset, quin electricitas ab ipsa in ejus superficiem irruens ad oppositam armaturam perveniret (89).

91. Neque tamen electricitatem totam ab armaturis in armati coërcentis corporis superficies deponi, dum divelluntur, sed partem eius coërcentis restitencia reprimi (vid. cap. praec.) experimenta iterum insinuare videntur: etsi enim,

(a) *Du satin*:

enim, postquam ab onerato vitro armaturae revulsae fuerunt, oppositae electricitates aequilibratae esse pergant; id ex eo fit; quod aequa pars electricitatis ab utraque facie repellatur; cum autem vitrorum, aut taeniarum altera superficies electricitatem immediate a fricante corpore reciperet, altera non nisi a subiecta armatura in eius separatione super ipsam depositam, eveniebat constanter, ut non tota deponeretur; nam electricitates oppositae, quae in aequilibrio erant, quamdiu lamina deferens applicita persistabat, ea dimota, amplius non erant, praevalente nimirum electricitate superficiei fricatae, ex eo, quod deferens laminae oppositae electricitatis partem secum abrupisset (conf. cap. I. IV.)

92. Eandem rem experimentis etiam aliis confirmavi. Nam, si vitrum inferiori facie armatum, superiori nuda electricitatem ab acuminato metallo e catena pendulo reciperet, rursus eveniebat, ut oneraretur, & binae oppositae electricitates aequilibrarentur, quamdiu vitro adhaerens armatura eidem applicita persistabat, ea vero detracta, supremae superficiei electricitas praevalebat. Si superficies superior armata electricitatem reciperet a catena, dum acuminatum metallum ad inferiorem nudam obversum per puncta superiori armaturae respondentia promovebatur, iterum onerabatur vitrum, & oppositae electricitates in aequilibrio erant, rursus armatura adhaerebat, rursusque ea divulsa, apparebat haud totam electricitatem supra vitri superficiem ab ipsa depositam fuisse; nam praevalens inferioris faciei electricitas jam ex utraque vitri facie se ostendebat.

93. Scilicet, ut paucis rem hanc complectamur, in vitris, aliisque coercentibus praevalet semper oppositarum electricitatum illa, quae in alterutram faciem majori vi adacta est; propterea, si hinc per frictionem, aut per acuminata corpora immitatur, inde per planas superficies, illa huic

huic praevalere: aequilibrabuntur vero quoties, vel utrimque per planas superficies ac laeves, vel per stilos aequae acutis utrimque, vel hinc per frictionem, inde per acuminata corpora fuerint immiffae.

94. Ex quibus iterum verosimile fit electricitates succutientes in armaturis maxime deferentibus praesertim residere, nec nisi aegre in coërentium interpositorum poros penetrare: partem tamen earum non exiguam in ipsorum coërentium superficies irruere, dum armaturae divelluntur, ex eo quod eae oppositae electricitates tanta vi in se invicem tendant, ut a se mutuo dimoveri non patiantur. Frictione, aut acuminatis corporibus obversis facilius per coërentia sibi viam facere electricitatem, & per extrema strata, quibus haec obvertuntur, non aliter ac per deferentia permeare.

95. Hinc eruitur fieri utique posse, ut deferentia parem, ac coërentia electrici ignis quantitatem contineant (43. 44.): electricitatem tantam in illis congeri non posse ac in coërentibus, quia oppositae electricitates se mutuo cohibentes in iisdem constitui nequeunt, quin statim permisceantur: id tantum obtineri interpositione coërentis; indeque fieri, ut etiam ad coërentium superficies accumulatae oppositae electricitates maxima ex parte, vel per resistentem aërem disperdantur, quando separatis, & dimotis coërentibus laminis, quibus incumbunt in se agere, mutuaque ea actione se invicem cohibere desinunt (b).

96.

(b) Uti in experimento §. 64. exposito, tum in symmeriano mox §. 97. enarrando, quando dimotis vitris, quibus oppositae electricitates insident per minimum tempus, etsi armaturae nullo deferente corpore tangantur, vis electrica maxima ex parte per resistentem aërem dissipatur, uti constat ex maxima vi, qua in ea divulsione repellitur deferens corpus superiori armaturae impositum, ex sibilo, ex ampla luce, quae iunc temporis in loco tenebricoso supra vitrosam superficiem cernitur, hinc est, ut ad contactum restituta vitris vel nulla, vel per exigua succussio habeatur.

96. Ex his iterum intelligi potest, cur coërcentia, quotquot hæcenus explorata sunt, indiscriminatim omnia ad ietum electricum idonea fuerint comperta. Sic *porcellana*, talcum (c) *crystallus montana* (d), *resinae*, *cera hispanica* (e), *sericum* (89), *aër ipse* (f), similiter ac vitrum onerari possunt, onerata similiter succutiunt. Scilicet nulla habita ratione densitatis, elasticitatis, mollitiei, fluiditatis, peculiarisve indolis eorum corporum, sufficit, ut interpositione sua contrariarum electricitatum in se mutuo tendentium mixtionem impediunt, ut oneri suscipiendo apta sint.

97. Demum ex his commode explicari potest elegantissimum SYMMERI experimentum, in quo duo vitra sibi invicem applicita, dein exterius tantum armata instar unici vitri onerabantur, & adhaerebant (g), contra vero, si utrimque unumquodque ipsorum armatum esset, superior cuiusque superficies vitream, inferior resinofam illi aequalem de more recipiebat (h), proptereaque nulla inter ipsa vitra adhaesio oriebatur (i); enim vero, quando nulla armatura vitris interjicitur, nullum est corpus, in quo mobilis electricitas sit praeter armaturas externas; hinc electricitas in alterutram ipsarum immissa contrariam, & aequalem electricitatem nonnisi in oppositam armaturam inducere potest, consequenter contrariae, & aequales electricitates ad oppositas tantum junctorum vitrorum facies residebunt. Quum vero armaturae interjiciuntur, earum mobilis electricitas suppetit, quae commoveri possit: hinc electricitas vitrea in superiorem armaturam a globo adve-

i. 2

niens...

(c) *Cl. Beccaria* in *epist. ad Cl. Nolletium* §. 472.

Cl. le Roy Encyc. coup. foudroyant.

(d) *Cl. Nollet. Leçons VI. pag. 477.*

(e) *Cl. P. Beccaria lettera V. §. 148.*, & sequent. *Aepinus Histoire de l'Acad. de Berlin. Tom. cit. p. 119. 120.*

(f) *Aepinus l. c.*

(g) *Symmer p. 113. 114.*

(h) *Id. p. 119. Franklin tom. I. p. 135. 136.*

(i) *Symmer. ib.*

niens intermediarum armaturarum nativam electricitatem ita secedere coget; ut resinosa illi aequalis in proximiorum colligatur, vitrea earumdem in alteram abeunte, unde aequalem resinosae electricitatis quantitatem in armaturam infimam, vitrisque subjectam a solo alicere potest. Quando, instituta inter externas armaturas communicatione, vitra haec simul deonerantur, vitrea, & resinosa interjectarum armaturarum electricitas iterum per easdem aequabiliter distribuitur; sicque ad nativum statum restituantur. Quod si porro electricus vapor, quo vitra onerantur, ex una vitri in alteram superficiem abiret, in usque resideret (74), nulla ratio esset, cur, etiam quando nulla armatura vitris interponitur, electricitas vitrea ab interna superioris vitri superficie expelli non deberet, & cum resinosa contiguae superficiei inferioris vitri commutari; cum enim eae superficies totidem punctis sibi invicem respondeant, vel potius se tangant, fluidum electricum nullo vehiculo opus habet, ut ex una in alteram transeat, quod unum officium armaturis fuerat relictum (k).

98. Ad argumentum alterum franklinianum, quod spectat; armaturae nempe portionem inde excuti, unde ignis electricus emicat (74), videtur utique id non minus a percussione electrici fluidi fieri posse, quam a directo ipsius transitu per armaturas (*) ex eo praesertim, quod in explosione vitra interdum ipsa diffringantur (l), quan-

quam

(k) Experimentum hoc symmetricum aliquoties frustra tentatum a Clarissimo Nollatio tandem ad votum successit *Mem. de l'Acad.* l. c. p. 267. Enimvero, ut propria observatione didici, vel levissimus humor vitris adhaerens efficit, ut non secus onerentur, ac si armatura esset interjecta. Ex quo apparet multo magis ab ipso cavendum esse in hoc & affinis experimentis hactenus propositis, quam in plerisque aliis electricis, cum humor, qui pro armatura interire potest illo multo adhuc minor sit, qui impedit, quominus vitra onerari possint.

(*) Vid. *Frank.* tom. I. p. 187.

(l) *Idem* tom. I. p. 187.

quam erumpens ignis electricus ipforum crassitiem neutiquam trajicere debeat.

C A P U T V I.

De contrariarum electricitatum natura

99. **C**ontrarietatem vitreae, & resinosae electricitatis, quam experimentis memoratis (74), aliisque permultis (m) FRANKLINUS demonstraverat, simplicissima, celeberrimaque hypothese explicavit; alteram nempe contrariarum electricitatum ab excessu electrici fluidi, alteram a defectu nativae ejusdem quantitatis in corporibus proficisci, indeque fieri, ut pari copia permixtae se mutuo destruant. Cujus hypotheseos praestantiam facile perspiciunt quicumque naturae simplicitatem in intricatissimis etiam phaenomenis mirari consueverunt. Haud diffitendum tamen est, alii cuicumque hypothesei locum esse, si ita experimenta postulent, modo illi contrarietati aequae satisfaciatur (n).

100. Et SYMMERIUS quidem contrarietatem illam novis argumentis confirmavit (o), at hypothesei aliam franklinianae substituendam duxit: nempe binas oppositas electricitates a binis oppositis viribus *utrimque positivis* fieri, ex quarum contrarietate, & pugna phaenomena omnia electrica producantur, quae quidem vires oppositae a duobus fluidis oppositis naturas habentibus originem ducant (p).

101. Quaquam vero de duplicis fluidi natura nihil ulterius decernere audeat VIR modestissimus (q), manifestum est duo fluida elastica se se invicem attrahentia eius hypothesei

(m) Tom. I. a p. 85. ad 93., & alibi passim.

(n) Confer. Cl. Beccaria lettera II. §. 65.

(o) P. 116. 117.

(p) Pag. 111., & 119.

(q) Pag. 120.

thesi adamuffim respondere ; nam prius non quiescent , quam aequabiliter fuerint permixta. Haec autem profero , non quod velim Cl. VIRI mentem interpretari in re , de qua ipse consulto noluit aperire , sed tantummodo , ut appareat , quatenus haec hypothesis phaenomenis satisfaciatur.

102. Scilicet ea semel admiffa haud minus explicantur WATSONI , & FRANKLINI experimenta ad vaporis electrici circulationem spectantia (*r*) , & similiter intelligitur , cur vitreae electricitatis subeuntis , & resinosae prodeuntis eadem species sit ; & eadem iterum species resinosae subeuntis , ac vitreae prodeuntis tum ad acutorum deferentium apicem (*f*) , tum ad mercurii summitatem in communicantibus barometris (*t*) , nam ubi alterutrum elementum in quovis corpore praevalebit , in ambientia corpora se se expandet , ex quibus interim par oppositi elementi quantitas in id corpus migrabit , donec aequabiliter utrumque elementum fuerit distributum . Quod , si lamina coërcens inter deferens electricum corpus , & deferens aliud cum solo communicans interjecta sit , tunc a solo in hoc corpus par oppositi elementi quantitas attrahetur quidem , sed coërcentis resistentia impedita , tamdiu ad ipsius superficiem haerebit , quamdiu via praesto sit , per quam contraria ea elementa sibi invicem permisceri queant : unde nullo negotio ea intelliguntur , quae §. 73. allata sunt , & reliqua omnia ad coërcentium electricitatem spectantia ; cur ad exemplum contraria elementa ad oppositas vitri facies aequabiliter permixta quiescant , ita secreta , ut vitrea electricitas ad unam faciem confluat , resinosa in alteram abeunte , vitri onus constituent , quod sola aequabili eorum distributione iterum destruat (74) . Pari facilitate ea intelliguntur ,

(*r*) Vid. *Franck.* loco ultimo citato.

(*f*) Vid. *Cl. Beccaria elettricifmo artificiale* passim , *Francklinum* tom. II. p. 167. , & seq.

(*t*) Vid. experimenta *Cl. Wilson* , quae referuntur in *Mem. de l' Acad.* 1762. pag. 155.

liguntur, quae cap. III., & IV. de coërcentium electricitate dicta sunt, quando redundans elementum ita coërcentis poris irretitum est, ut non nisi aegre extricari possit; elementum vero oppositum, quod in ejus locum succedere debet aegre similiter eorum poros pervadit, unde in admotis deferentibus diu moram patitur, nisi ea deferentia ita acuminata sint, ut illi eliciendo, huic vero immittendo sint aptiora.

103. Equidem SYMMERUS hypothesim suam directis experimentis confirmari censet, quod & succussio in utroque brachio aequalis ab onerato vitro habeatur (*u*), & foramina a trajecta per chartam electricitate fimbriata utrimque sint, fimbriis oppositarum facierum ad oppositas plagas directis, quibus duarum virium opposita directione agentium certum argumentum exhiberi opinatur (*v*). Imo experimentum affert, quo huiusmodi oppositae virium directiones luculentius demonstrantur, ac veluti sub oculos ponuntur: nempe metalli tenuem bracteam chartae foliis interceptam ex vehemēti vitri electricitate per chartam trajecta duas impressiones recipere, quae chartae foraminibus a trajiciente electricitate peractis utrimque continuae sint, & oppositas plagas respiciant (*x*), & ea quidem virium contraria directione agentium aequalitas etiam Cl. P. BECCARIA experimento confirmatur, in quo lamina vitrea onerata, ac pendula, dum admotis ad opposita respondentia puncta arcus deferentis extremitatibus deoneratur, ne minimum quidem commovetur (*y*).

104. At quantumvis haec omnia vires opposita directione agentes ostendant, vix probant duplici ad eas exercendas, eoque contrario fluido opus esse. Etenim ad succussionem, quod spectat, advertit Cl. BECCARIA eo majorem

(*u*) P. 87., & seq.

(*v*) P. 90., 91.

(*x*) P. 92., & seq.

(*y*) *Lettera* V. §. 168.

jorem esse debere, quo angustior via est, per quam electricus vapor trajicitur, hinc aequalia brachia in omologis locis aequè percuti, & succussionem eo altius, seu ad ampliores brachiorum dimensiones pertinere; quo electricitas fuerit vehementior (z). Fimbrias vero oppositas directiones habentes ab expansione fluidi quaquaversus circa centrum undae (a), neutiquam vero ab ipsis undae directione fieri respondet FRANKLINUS (b), similiterque dici posset impressionum contrarium, quae in folio metallico observantur, alteram quidem ab impetu advenientis fluidi prodari, alteram vero ab ejusdem repercussione ob resistantiam chartae ad oppositam ipsius partem adhuc trajiciendae. nec aliter CL. BECCARIA de actionis, & reactionis aequalitate explicat in frankliniana hypothese, cur vitrum pendulum, dum a explosio fit, non commoveatur (c). Contra vero, ut principio dicebam, franklinianam hypothese miraeus simplicitas commendat, tum illud scholarum entia sine necessitate non esse multiplicanda. Id unum in ea desiderari posse videtur, ut, qua facilitate intelligitur, cur contrariae electricitates inter se permixtae se destruant, eadem explicetur, cur, quando misceri non possunt, se invicem alliciant, & cohibeantque, nec aliter in se agant, quam si mutua inter ipsas attractio intercederet (41. 73. 74. 95.) Sed jam nimis multa de perobscura quaestione, quae magnos VIROS in contrarias partes dilataxit, quae tamen indicare volumus, ut constaret, hypothese quamcumque, quae contrarietatem electricitatum in se tendentium, & aequabili mixtione se se destruentium explicet, notis hactenus phaenomenis aequè consentaneam esse.

(z) *Electric. artific. §. 431. 432.*

(a) *Du courant.*

(b) *Tom. II. pag. 230. Ita etiam Cl. Beccaria electric. artific. §. 513.*

(c) *L. C.*

DE L' ACTION DE LA CHAUX VIVE

Sur différentes substances

PAR M. LE COMTE SALUCES.

1. **P**lusieurs Savans ont traité de la Chaux, & leurs productions sont très-intéressantes ; mais les résultats différens qu' ils ont eus de leurs travaux, ayant contribué à une diversité de sentimens sur la nature de cette substance, la vérité se trouva ainsi balancée par la réputation des grands hommes, qui y avoient donnés leurs soins, &, à quelque opinion près, on demeura dans la perplexité & dans l'incertitude : c' est pour cette raison, qu' après ce qu' en avoient dit les VANHELMONT, les STAHL, les LEMERY, les ZWELPHER, les HARTMANN, les FICKIUS, les LUDOVICI, les KUNKEL, & beaucoup d'autres que j'omettrai pour plus de briéveté, M. du FAY en entreprit un nouvel examen : son travail ne fut pas néanmoins ni dès-plus suivis, ni décisif ; car quoiqu' il en eut retiré un Sel, il n'en a pas déterminé la nature. M. MALOUIN travailla ensuite sur le même sujet, & prouva que la Chaux contenoit un Sel sélénitique. M. MACQUER voulut, au surplus, voir si ses propriétés étoient duës à quelque matière saline, qui concourut à sa formation, & il a démontré le contraire. M. POTT tourna ses vuës sur les phénomènes que présente la dissolution de la Chaux vive dans l'acide nitreux. M. Du HAMEL observa ce qui résultoit de la combinaison de cette substance avec tous les acides, & augmenta par là

Miscel Tom. III. k le

le nombre des connoissances qu' on avoit sur cette matière; en traitant ensuite de la nature du Sel ammoniac, ce Savant ayant passé à examiner quelle pouvoit être la cause de la constante décomposition de ce Sel en liqueur en employant la Chaux pour intermède, conclut d'une suite d'expériences très-ingénieuses, que la Chaux n' agit pas seulement sur l'acide du Sel ammoniac, mais encore sur la matière grasse qui est de l'essence des Alkalis volatils. M. BRANDT donna aussi un Mémoire en 1749 à l'Académie Royale de Suède sur la Chaux; le premier objet qu' il a eû en vuë a été de décider si elle est entièrement dissoluble dans l'eau, il passa ensuite à examiner, si par sa combinaison avec les acides, il résulte des Sels neutres, & il a trouvé que ni l'une ni l'autre de ces propositions n'étoit pas vraie; il entra ensuite dans une comparaison de ses effets avec ceux des Alkalis fixes, & il finit par des recherches sur les matières qui contiennent une terre semblable à la Chaux. M. HOFFMANN a de même fait différentes expériences sur la Chaux vive, & il lui attribue un principe terrestre très-fixe, & un autre volatil presque de la nature du feu; il prétend que le feu ne fait qu'unir ces deux principes avec plus de force, & qu' on peut en séparer celui qui est volatil par la cuisson dans l'eau; M. NADAULT donna enfin une dissertation remplie d'expériences toutes nouvelles, & fort ingénieuses dans le recueil que l'Académie Royale des Sciences fait paroître sous le titre de Mémoires présentés à l'Académie par divers Savans &c. Tom. 2. mais tous ces Illustres Ecrivains ont eut pour but, dans l'examen qu' ils ont fait de la Chaux, de voir si elle contenoit quelque matière saline; si cette matière entroit dans sa composition, & quelle en étoit la nature. Le Seul M. Du HAMEL, que je sache, développa, par occasion, & dans le cas particulier du Sel ammoniac la propriété dont nous avons parlé; propriété qu' on connoissoit

noissoit en quelque façon; car on savoit, par exemple, qu'on pouvoit rendre, par son moyen, dissolubles dans l'eau les huiles, & les graisses, en formant avec elles une espèce de savon; ces connoissances étoient pourtant trop vagues, & trop peu circonstanciées, pour que l'on en put inférer ce que ce Savant a ensuite établi par des procédés fort élégans. M. TALDUCCI avoit fait dès l'an 1671 des expériences sur ce sujet, & il avoit déjà observé que la Chaux vive combinée avec le soufre augmentoit de poids, malgré l'inflammation de cette substance, & quelque autre phénomène qui résulte de son union avec l'acide nitreux, ou avec quelque autre matière; ces expériences, quoique ingénieuses, ne sont cependant que des faits isolés qui ne lui laisserent pas soupçonner la propriété qu'a la Chaux vive d'attaquer la partie phlogistique de plusieurs corps: c'est ce qui fait l'objet de ce mémoire, que je crois d'autant plus intéressant, qu'il n'a encore été traité par personne sous ce point de vuë, & que fournissant des phénomènes nouveaux, on peut en retirer des observations dont l'utilité sera d'autant plus sensible, qu'on pourra, en les comparant à d'autres déjà connues, développer bien des vérités qui demeureroient encore, ou dans l'incertitude, ou, peut-être, dans l'obscurité & dans l'ignorance.

2. C'est de cette matière que nous appellons aussi du nom de *matière inflammable*, ou *soufre principe &c.* dont il est question dans ce mémoire, & qu'il est nécessaire de bien distinguer de ce qu'on entend communément par matière grasse; car l'union qu'elle contracte avec toutes les parties, qui composent une substance grasse, n'est pas, à beaucoup près aussi intime, que l'est celle qu'elle contracte avec cette partie, dont la présence, ou la privation, apporte des altérations, & des changemens si considérables aux corps.

3. Comme un tel examen ne peut naturellement que m'engager dans un grand nombre d'expériences, dont aucune n'est à négliger, & que, d'ailleurs, je serois trop diffus; je pense de ne donner maintenant qu'un éssai de tout le travail que j'ai fait, & dont je rendrai compte, par parties, conjointement à ce qui me reste encor à faire. Je choisirai pour ce mémoire les expériences dont les résultats m'ont fourni quelques phénomènes, ou quelques observations plus particulières; pour suivre un ordre, je commencerai par exposer ce qui m'est résulté de la combinaison de la Chaux avec le soufre, & pour pouvoir procurer tous les éclaircissemens que je crois nécessaires, je me propose de faire observer, en même-tems, ce que m'a donné le mélange du Soufre avec l'alkali fixe, mélange qu'on connoît sous le nom de foye de soufre, & le mélange d'un pareil foye de soufre avec la Chaux, c'est de ce dont je m'en vais rendre compte.

EXPÉRIENCE PREMIERE.

Combinaison du Soufre avec la Chaux : du Soufre avec le Sel de Potasse; & du foye de Soufre avec la Chaux.

4. **J**E fis, dans cette vuë, un foye de Soufre, en mêlant quatre parties de Sel de Tartre à une de Soufre fondu, j'ai dissous ce mélange dans l'eau, de même que les suivans. Je fis aussi un mélange de quatre parties de Chaux vive avec une de Soufre fondu. J'en fis un troisième enfin de six parties de Chaux, trois d'Alkali fixe, & une de Soufre. Je mis les trois cucurbites garnies de leurs Chapiteaux soigneusement luttés dans un même bain de sable.

5. Dans les deux premières combinaisons la plus grande partie du Soufre se sublima au Chapiteau; on voyoit néanmoins

moins des taches blanches très-luisantes, & principalement dans le col des cucurbites. Le caput mortuum étoit noir dans celle de la Chaux, & roux jaunâtre dans celle du foye de Soufre. Je ne m'arrêtai pas à examiner ces résultats, me réservant à le faire, lorsque j'en aurois eus des plus considérables.

6. Le troisième mélange, savoir celui du foye de Soufre avec la Chaux m'a fourni des observations plus remarquables; car il ne laissa rien sublimer, & la liqueur qui passa dans le récipient, quoiqu'insipide & sans odeur, changeoit cependant en rouge le papier bleu; il est vrai qu'elle ne fermentoit point sensiblement avec les Alkalis. Je suis cependant très-persuadé, qu'elle contenoit un peu d'acide; parcequ'outre ces indices, j'ai trouvé, depuis mon travail fait, que M. SEEHLIUS en avoit retiré, & qu'au sentiment de M. VOGEL, cet esprit tient de l'urineux; (a) la tête-morte étoit d'un blanc éclatant contre les parois du verre, noire dans le milieu, boursofflée, facile à se réduire en poussière, grasse au toucher, d'un goût très-salé. J'en retirai par la dissolution, filtration, & dessiccation, une substance très-blanche, cotonneuse feüilletée, à peu près, comme la terre foliée; cette substance étoit converte de petits cristaux luisants très-déliés qui s'élevoient en pointes, & se croisoient comme les brins d'une étoffe de laine blanche: son odeur approchoit beaucoup de celle que prend l'urine évaporée en consistance de miel, sa saveur étoit amère, & un peu salée.

Ayant répété cette expérience, en substituant au Sel concréte du Sel qui étoit tombé en déliquescence, je commençai par remarquer que la liqueur avoit pris une couleur beaucoup plus chargée, je la décantai, & elle ne changea plus
sensi-

(a) Ce Phénomène présente quelque chose d'extraordinaire, mais je ne dois pas dissimuler qu'il a été observé par plusieurs Savans.

fenfiblement en rouge le papier bleu, (b) mais elle faisoit une grande effervescence avec les acides : ayant ensuite calciné les matières dont j'avois décanté la liqueur, elles se sont réduites en une masse pulvérulente, spongieuse, très-légère, noirâtre dans la partie supérieure, bleuâtre dans l'intérieur de la substance, & très-blanche dans les autres endroits, comme la tête-morte de l'expérience précédente.

8. J'ai réitéré les deux combinaisons précédentes, mais le rapport de la Chaux, & de l'Alkali fixe, au Soufre étoit dans chacune de 10: 1. Le foye de Soufre fournit une grande quantité de matière sublimée au Chapiteau & au col du matras.

9. Cette matière étoit très- blanche & ne paroïssoit tirer un peu sur le jaune qu'au rebord du Chapiteau; elle étoit si grasse que je ne pus la détacher du verre, sans qu'elle s'engagea au pinceau, de manière à ne pouvoir l'en retirer qu'en le mettant dans l'eau.

Elle s'y est presque entièrement dissoute, ce qui restoit à la surface s'est enfin précipité sous la forme d'une poudre blanche très-fine, & la dissolution du blanc un peu jaunâtre devint claire, & paroïssoit tirer sur le bleu.

J'en pris une partie que je soumis aux expériences dont je vais donner les résultats.

10.

(b) La contradiction apparente qui se manifeste dans ces résultats, en ce qu'ils donnent des signes d'Alkali & d'acide ne viendrait-elle point de ce que par cette combinaison l'acide vitriolique eut perdu un peu de son affinité avec le phlogistique, de manière que son union n'étant plus si forte, chacun des principes du mélange put agir avec liberté sur des nouvelles substances avec lesquelles ils auroient quelque rapport, sans que ces principes néanmoins pussent contracter entr'eux de liaison à cause précisément du phlogistique, qui dans cette rencontre, produit l'effet qu'on voit arriver ordinairement dans la distillation des plantes qui donnent de l'acide, & de l'Alkali volatil? Si on réfléchit sur la facilité qu'il y a à décomposer, par la seule évaporation lente, le soufre dans le foye de soufre, & à en retirer du tartre vitriolé, il paroît que cette conjecture n'est pas entièrement dénuée de probabilité.

10. Elle se mêloit avec beaucoup d'effervescence, & de chaleur à l'huile de vitriol, & donnoit un peu d'odeur sulphureuse.

11. Elle ne souffroit aucun changement avec l'eau-forte, & exhaloit seulement un peu d'odeur sulphureuse.

12. Avec l'Alkali fixe il se fit un petit mouvement dans la liqueur qui ressembloit à un principe de fermentation, & il s'éleva un peu d'odeur de lessive.

13. Il arriva à-peu-près la même chose avec l'esprit volatil de Sel ammoniac, & il me parut qu'il émouffoit l'odeur pénétrante qu'il avoit (c).

14. Je filtrai le reste de la liqueur, & la fis évaporer; j'en retirai par une dessication totale une croûte sèche jaunâtre tirant un peu sur le roux, je crus devoir redissoudre cette substance pour voir, si en lui enlevant la partie plus grasse qu'elle contenoit, elle pourroit se cristalliser, & je vis que la dissolution prenoit une couleur rouge très-belle, & qu'en même-tems, elle laissoit précipiter une matière brune, laquelle ne s'enflammoit pas comme le soufre, quoiqu'elle en manifesta encore un peu l'odeur; cette dissolution filtrée n'a pas pû se cristalliser, & étant évaporée à siccité me donna de nouveau une petite pellicule qui fermentoit avec l'huile de vitriol, n'étoit point altérée par l'eau-forte, & donnoit avec l'un & l'autre une odeur sulphureuse.

15. J'examinai ce qui étoit resté sur le filtre, & il me parut à la couleur que ce n'étoit qu'une espèce de fleurs de

(c) Je dois avertir que le meilleur moyen que j'aye trouvé pour découvrir plus sensiblement l'existence de l'acide vitriolique a été celui d'employer la dissolution du Sel marin, ou celle du Sel ammoniac, car quelqu'asfoibli qu'il fût par l'eau, ou quelqu'engagée que fut son activité par des substances hétérogènes, les signes en étoient beaucoup plus sensibles dans ces solutions, de ce qu'ils l'étoient avec les alkalis fixes, ou volatils: c'est là une observation qui m'a paru trop intéressante pour négliger d'en rendre compte.

de soufre combinées cependant avec beaucoup de matières étrangères. Il est toujours certain que ce résidu contenoit encore du soufre, ce qu' on (*d*) reconnoissoit à sa couleur un peu jaunâtre, & à des pointes bleuâtres qui en exhaloient l'odeur, lorsque je le faisois chauffer, jusqu'à brûler le filtre; de même qu'à la propriété qu'il avoit de surnager l'eau dans laquelle on le mettoit; de ne souffrir aucune altération étant mêlé à l'eau-forte, quoiqu'il fit effervescence avec l'huile de vitriol; ce qui me porte à croire que le Sel qui se sublime, soufre, par cette opération, une espèce de décomposition, en ce qu'une partie de l'acide sulphureux se détache de l'Alkali fixe, avec lequel il avoit contracté une union suffisante à le volatiliser, & qu'avant cette altération ce composé étoit une espèce de Sel sulphureux de Stahl, qui ne diffère de celui qu'on fait à feu ouvert, que parce qu'il contient une plus grande quantité de phlogistique; car, certainement, il n'en passe pas autant dans la liqueur du récipient, & il n'en reste pas, outre cela, une aussi grande quantité dans la tête-morte, qu'il s'en dissipe par la combustion à l'air libre; nous verrons, en effet, que la liqueur passée dans le récipient étoit sensiblement acide, il est vrai qu'elle manifestoit une odeur sulphureuse, lors qu'on la mêloit à l'huile de vitriol; mais j'ai lieu de penser que cette odeur est produite par une espèce de désunion qui se fait d'une partie du phlogistique du soufre, lorsqu'il est combiné avec l'Alkali fixe, de manière, qu'un peu d'acide vitriolique se convertit en esprit sulphureux, & qu'étant délayé dans

(*d*) Les fleurs de soufre qu'on fait avec le Sel polichreste ne devroient-elles pas plutôt leur blancheur à une petite quantité de ce Sel, que le soufre enlève dans sa sublimation, qu'à l'atténuation que le Soufre subit dans ses parties par l'intermède de ce Sel?
N'en seroit-il pas de même du Magistère par une raison opposée?

second Sel fixe sulphureux (*f*). La liqueur qui passa dans le récipient, étoit un peu trouble, & avoit une odeur singulière, étant mêlée à l'huile de vitriol; elle s'échauffa considérablement, & développa une forte odeur de Soufre brûlant; avec l'eau-forte, elle donna des fumées dont on ne pouvoit pas distinguer la couleur, mais qui sentoient l'odeur de celles de l'esprit de nitre fumant: elle fit effervescence avec l'Alkali fixe, de même qu'avec l'Alkali volatil. Le Caput mortuum étoit une substance compacte blanche, tirant sur le gris à sa partie supérieure; gris brun à la surface inférieure, avec une partie très-blanche au centre; j'en essayai un peu, comme j'ai fait ci-devant, & il me résulta ce qui suit; savoir.

19. Il fit une grande effervescence avec les acides, se couvrit d'une matière onctueuse; prit une couleur brune avec l'huile de vitriol, laiteuse avec l'eau-forte, ne manifesta aucun changement avec l'Alkali fixe & volatil: il se fit au surplus un précipité, dans chacun de ces mélanges. Ce précipité étoit tanné dans l'acide vitriolique, verd-clair dans l'eau-forte, tanné plus clair dans l'Alkali fixe, & presque noir dans l'Alkali volatil.

20. J'ai dissous le reste, je l'ai filtré, & fait évaporer jusqu'à siccité, & il se forma une croûte épaisse, cristalline & assez ferme, qui avoit une saveur onctueuse piquante, amère, & sentoit un peu l'odeur d'œufs pourris, moins cependant, de ce qu'elle le sentoit, avant que la dissolution fût filtrée: c'est-là le Sel dont nous avons parlé ci-devant §. 17.

(*f*) J'ai dit un exemple de la volatilité qu'acquièrent les alkalis fixes, par l'addition du phlogistique, pour m'exprimer selon l'acception commune; car, j'aurai occasion de faire voir, dans la suite, qu'elle doit être attribuée, en grande partie, à l'association qui s'est faite de quelque peu d'acide, de manière, qu'on doit regarder ces produits comme des composés d'acide, de matières inflammables, & d'une substance fixe, au moien de l'eau.

21. Il resta sur le filtre une matière grisée sans faveur, & sans odeur, qui ne brûloit point, étant mise sur les charbons ardents, mais qui y prenoit, seulement, une couleur blanche; elle fermentoit beaucoup avec les acides, & manifestoit une forte odeur sulphureuse avec l'huile de vitriol; ayant ensuite mêlé la combinaison de ce résidu avec l'eau-forte, dans celle faite avec l'huile de vitriol, il s'est élevé une quantité de vapeurs si prodigieuse, qu'il paroïssoit que le mélange dut s'enflammer; j'y projettai des charbons en feu, & les vapeurs s'éleverent avec une force surprenante; elles étoient d'une couleur jaune très-vive, & répandoient une violente odeur d'esprit de nitre fumant, mêlée d'esprit sulphureux: le reste de la liqueur, qui ne s'étoit pas dissipée, continua à répandre des vapeurs jaunes rougeâtres pendant plus de 24 heures que je le gardai, elles ressembloient parfaitement à celles de l'esprit de nitre fumant, & n'avoient plus rien de sulphureux; d'où l'on voit que l'affinité de l'acide vitriolique avec la matière inflammable, se montre encore supérieure, dans cette occasion à celle des autres acides.

22. Le Célèbre STAHL a été le premier, qui ait donné ce procédé, pour décomposer le soufre, & pour faire du tartre vitriolé; mais c'est toujours par le concours de l'air libre, que se faisoit cette opération; personne, que je sache, n'ayant crû, jusqu'à présent, qu'elle put réussir à vaisseaux clos; on peut consulter à ce sujet les Savantes notes que l'Illustre M. BARON a faites sur LEMERY: (g) & c'est de cette différence, que nous devons déduire celles de nos résultats; car le phlogistique, ne pouvant se dissiper, se combine, en partie, avec l'acide qui se détache
 l 2 du

(g) V. Cours de Chymie &c. par M. Lemery nouvelle édition revüe cor., & augm. d'un grand nombre des notes &c. par M. Baron 1757. pag. 465.

du Soufre, & qui est alors délayé dans beaucoup d'eau ; pendant que le reste, qui est la partie la plus considérable, se joint au Sel dé tartre avec un peu d'acide vitriolique ; d'où il résulte un Sel volatil sulphureux, qui contient une plus grande quantité de phlogistique, que la tête-morte (h).

23. Le foye de Soufre fait avec la Chaux-vive, & dissous dans l'eau, donna de même une matière sublimée au Chapiteau, & au Col du matras ; elle étoit encore plus blanche, & en plus grande quantité, que celle du foye de Soufre fait avec l'Alkali fixe, & avoit une apparence cristalline un peu terne ; elle étoit onctueuse, & il me l'a fallu dissoudre dans l'eau pour l'en retirer ; rien ne surnageoit dans cette dissolution, seulement après quelque tems qu'elle fut reposée, il se fit un précipité blanc, un peu verdâtre ; j'ajoutai de nouvelle eau, & il se dissout encore une partie du précipité : la liqueur parut toujours un peu trouble.

J'en pris une partie, comme j'avois fait pour le foye de Soufre, & la mêlai avec les acides, & les Alkalis.

24. Mêlée à l'acide vitriolique, elle s'échauffa, fit une violente effervescence, & donna une odeur de Soufre brûlant. Avec l'eau-forte elle s'échauffa un peu, répandit des vapeurs ; mais ne donna aucun signe sensible d'effervescence.

25.

(h) Ces Sels me paroissent être les mêmes que le Sel neutre que *M. Scypius* a observé dans les eaux minérales. Il le reconnoit de même nature que le Sel sulphureux de *Stahl* dont il ne diffère, que parce qu'il ne se laisse pas décomposer par les acides nitreux & marin, & il en conclut qu'il ne doit cela, qu'à ce qu'il est moins volatil ; je crois de même que le Sel du *caput mortuum* n'est qu'un tartre vitriolé altéré par un peu de phlogistique, & peut-être, surchargé d'acides, ce qui empêcheroit d'autant plus la cristallisation de ces Sels ; comme le remarque *M. Juncker*.

25. Avec l'Alkali fixe il s'éleva des bulles d'air; je ne négligerai pas de faire observer ici, que dans le mélange de la dissolution avec l'huile de vitriol, il se fit un précipité brun, qui s'élevoit en petits filamens aux côtés du verre: il ne paroissoit qu'un peu de poussière très-fine, & très-blanche dans celui de l'eau-forte: celui de l'Alkali fixe étoit plus considérable, de même que celui de l'Alkali volatil, avec la différence, que ce dernier étoit d'un verd un peu plus foncé.

26. Je crus devoir ajouter de nouvelle eau dans le reste de la dissolution, pour voir si le nouveau précipité n'étoit point faite de dissolvant; mais, quoiqu'il se mêla à l'eau dans le tems de l'addiion, ce précipité reparoissoit néanmoins, à-peu-près en même quantité, après que j'avois laissé reposer la dissolution; je la filtrai enfin, je la fis évaporer jusqu'à siccité, & j'en retirai une substance qui adhéroit considérablement à la Terrine; ce n'étoit qu'une croûte bien mince d'une couleur fauve; elle répandoit un peu de fumée, étant exposée au feu, s'y noircissoit, sans s'enflammer, & sans donner d'odeur sulphureuse bien sensible.

27. Elle fermentoit puissamment avec les acides, & manifestoit avec eux une forte odeur sulphureuse.

28. Il se faisoit aussi un peu de mouvement en la mêlant à l'Alkali fixe, & volatil. Voici encore un autre exemple de la volatilisation d'une matière très-fixe. Dépend-elle du phlogistique, de manière que par son moien, la matière fixe change de nature, & prenne un caractère volatil? Ou bien existeroit-il des parties volatiles par elles-mêmes dans la Chaux, mais dont la propriété seroit suspendue, par une combinaison toute particulière, qui seroit détruite par l'addition de l'eau? C'est ici le sentiment du Célébre M. HOFFMANN que nous aurons occasion de discuter dans la suite.

29. La liqueur, qui passa dans le récipient, étoit claire; ne donnoit aucune odeur, & ne faisoit sentir aucune saveur, étant mise sur la langue.

Elle fermentoit avec violence, étant mêlée aux acides, & développoit avec eux une puissante odeur sulphureuse.

30. Elle excitoit aussi un mouvement en la mêlant aux Alkalis; mais, ce mouvement paroissoit plutôt de fermentation.

31. La tête-morte étoit une substance boursofflée; grise, tirant sur le noir dans sa partie supérieure, blanche dans le centre de la masse, & un peu noirâtre au fond, elle étoit grasse au toucher, soit dans sa partie grise, soit dans celle qui étoit parfaitement blanche; & se réduisoit avec toute la facilité en une poussière très-fine, qui s'attachoit aux doigts: son odeur approchoit de celle du foye de Soufre, son goût étoit un peu amer, & sembloit tenir comme un glû à la langue. Je l'ai dissoute dans beaucoup d'eau, & après l'avoir filtrée, je l'ai fait évaporer.

32. Lorsque la dissolution fut, environ, à moitié évaporée, il se forma à la surface une forte pellicule, sans qu'il se précipita rien au fond; ce qui me fit penser qu'elle pourroit bien se cristalliser: mais ce fut inutilement que je l'exposai, pendant une nuit, au froid; je pris donc le parti de l'évaporer à siccité.

33. J'en retirai, par ce moïen, une croûte saline d'un goût salé & amer, avant qu'elle fut entièrement desséchée; mais lors qu'elle fut réduite à une entière dessiccation, elle ressembloit assez, au goût, à du Sel commun, à la seule différence près, qu'elle étoit un peu moins salée, que n'est le Sel marin, & un peu onctueuse, laissant quelque trace d'une matière terreuse grasse brûlée par l'acide vitriolique; ayant ensuite pris ce qui étoit resté sur le filtre, & l'ayant mis dans l'eau bouillante, que j'ajoutois à chaque fois

fois que je filtrois la dissolution qui s'étoit faite, je mis toutes ces dissolutions sur la croûte saline, dont je viens de parler, & j'en eus, par l'évaporation, une croûte qui, du blanc, avoit passé au jaunâtre, d'un goût fade, & ayant la consistance d'une terre.

34. Cette substance dissoute dans l'eau, fait beaucoup d'effervescence avec l'huile de vitriol, donne une grande odeur sulphureuse, prend une couleur laiteuse, au moment du mélange, s'éclaircit, & se fait un précipité blanc, & une écume grasse à la surface de la liqueur.

Après qu'on a versé une certaine quantité d'eau-forte l'effervescence se manifeste avec des fumées blanches, & après quelque tems, il se fait un petit précipité.

35. Il se fait un peu de mouvement avec l'Alkali fixe, il se forme ensuite un coagulum blanc, qui nage dans la liqueur devenuë laiteuse, avec un petit précipité roux jaunâtre.

On voit le même mouvement avec l'Alkali volatil, la liqueur prenant une couleur roussâtre; après être reposée, on ne sent plus d'odeur urineuse, il se fait un précipité brun; & on voit une tranche, à la surface de la liqueur, qui ressemble à une huile.

36. Ce qui est resté sur le filtre étoit une matière grise foncée, qui perdoit un peu de sa couleur, étant desséchée, pour l'en enlever, l'ayant mise sur une poêle de fer à un feu violent, jusqu'à faire rougir à blanc la poêle, elle a commencé par prendre une couleur jaune sans fumée, ni odeur & elle devint ensuite blanche.

37. Je pris une partie de ce résidu que j'avois fait dessécher sur le filtre, & je l'ai soumis aux expériences ordinaires.

Il fit une violente effervescence avec les acides, & il manifesta une puissante odeur sulphureuse volatile avec l'huile de vitriol, & une très-forte odeur d'esprit de nitre
fumant

fumant avec l'eau-forte ; dans le premier, une écume surnageoit la liqueur que j'avois étenduë dans l'eau, & l'on voyoit des petites particules qui s'y souvenoient, il se fit au surplus, un précipité gris-brun ; dans le second on découvroit de même cette écume grasse, qui adhéroit aux parois du verre, & il n'y avoit point de précipité sensible.

38. Dans les Alkalis, il parut se faire un petit mouvement, & il se fit, sur tout dans l'Alkali fixe, une précipitation, à ce que j'ai pû conjecturer, presqu' entière de ce résidu, lequel prit une couleur obscure.

39. Ce même résidu, calciné, donna les mêmes signes d'effervescence avec les acides ; & de mouvement avec les Alkalis ; mais avec plus de force, de même que pour les odeurs qu'il développa dans le mélange, des acides : cette écume se montra aussi avec l'huile de vitriol, mais elle n'étoit pas en si grande quantité, & le précipité en fut plus abondant, plus clair, & moins léger ; rien ne se soutenant dans l'eau ; dans l'eau-forte, il ne se fit point d'écume.

40. Avec les Alkalis, il se fit une précipité très-abondant, mais plus clair que celui dont nous avons parlé ci-devant.

41. Je réitérai cette expérience, en mettant 24. parties de Chaux sur une de Soufre, & j'observai que la matière sublimée au Chapiteau, & au Col de la cucurbite, étoit très-blanche & luisante, sans le moindre vestige de jaune ; on y découvroit même des cristallisations en assez grande quantité ; mais elles étoient tellement entrelacées les unes dans les autres, qu'on ne pouvoit pas distinguer la figure ; cette matière étoit néanmoins très-grasse, & la partie, qui adhéroit au verre ne pût être enlevée, qu'en la dissolvant dans l'eau : j'en mis un peu de celle que j'avois détachée avec le pinceau sur les charbons ardents, & je vis qu'elle se boursouffloit comme fait l'alun, pendant qu'elle

qu' elle donnoit des fumées qui sentoient le Soufre; je dis-
 sous le reste, & je mêlai de cette dissolution dans l'huile
 de vitriol, l'eau-forte, l'Alkali fixe, & l'Alkali volatil;
 je remarquai, outre les effets dont nous avons parlé ci-de-
 vant, §. 23. 24. 25. qu' elle manifestoit l'odeur de foye
 de Soufre avec l'huile de vitriol, une odeur sulphureuse
 avec l'eau forte; qu' elle se troubloit, devenoit laiteuse, &
 formoit une espèce de coagulum, exhaltant une puissante
 odeur de lessive, après s' être reposée, avec l'Alkali fixe: par
 l'évaporation du reste de cette dissolution filtrée, je retirai
 une substance grasse, amere, un peu salée, laissant une im-
 pression terreuse sur la langue, elle étoit par écailles com-
 me la crème de Chaux desséchée, ce Sel manifestoit une
 forte odeur de Soufre brûlant avec les acides, & faisoit
 effervescence avec eux; il ne faisoit voir, au reste, aucun
 mouvement avec les Alkalis, & développoit l'odeur uri-
 neuse volatil du Sel ammoniac.

42. Je saturai d'acide vitriolique le peu qui me restoit
 de ce Sel, je l'étendis dans l'eau, & après l'avoir filtré
 & évaporé, j'en eus un Sel blanc fait, à-peu-près, comme
 le précédent qui ressembloit à un Sel sélénitique, mais dont
 le goût âpre & stiptique approchoit beaucoup de l'alun.
 Je tentai de le faire cristalliser par l'addition d'une lessi-
 ve, mais je n'en retirai qu'une substance qu'il fallut des-
 sécher, & qui ressembloit à des coquilles d'œufs pilées,
 & dont la saveur étoit extrêmement stiptique, & laissoit
 ensuite un inpression terreuse sur la langue.

43. Les résultats des expériences faites sur la liqueur
 ont été les mêmes, que ceux dont j'ai parlé §. 29. 30.

44. La tête-morte ne différoit de la précédente §. 31.
 qu'en ce qu' elle paroissoit plus légère, & plus brûne à
 sa surface. Je trouvai

Qu' elle faisoit une forte effervescence avec l'acide vi-
 triolique, & qu' il s'exhaloit une forte odeur d'acide vi-
 triolique

triolique sulphureux. Avec l'eau-forte, elle fit aussi beaucoup d'effervescence, & manifesta une forte odeur, telle que celle que donne l'esprit de Nitre fumant.

45. Avec l'huile de tartre, on voyoit un petit mouvement qui partoît de la Chaux, pour se rendre à la surface de la liqueur; & je crois être fondé à penser, que ce mouvement étoit produit par l'air, qui se développoit de la Chaux: mêlée enfin à l'eau, elle faisoit effervescence comme la poudre de la Chaux, &, à-peu-près, comme la *creta bathensis*.

46. Ayant mis le résidu qui étoit sur le filtre, & qui y étoit en assez grande quantité, dans un creuset sur le feu; je remarquai des petits points de flamme bleuâtre, qui indiquoient qu'il contenoit encore un peu de Soufre, quoiqu'en petite quantité; il apparoissoit ensuite des petites étincelles de feu, comme si elles eussent été de poudre de charbon: après un feu très-vif, cette terre qui étoit grisâtre, devint beaucoup plus claire; elle ne se dissolvoit qu'en très-petite quantité dans l'eau: il se fit un précipité considérable d'une terre très-fine, & très-blanche, d'ailleurs, insipide, & inodore: ce résidu mêlé à l'huile de tartre développa une odeur urineuse, pendant qu'il en donnoit une de lessive, lors qu'il n'étoit point calciné.

EXPÉRIENCE SECONDE. 91

Combinaison de la Chaux avec le foye de Soufre décomposé par l'addition de l'acide vitriolique.

47. **J**E mêlai du Soufre avec du Sel de potasse, & je noyai ce mélange dans l'huile de tartre où j'avois mis la Chaux; lorsque ce mélange se fut reposé, je le saturai d'acide vitriolique, pour faciliter le dégagement du Soufre, & le soumis à la distillation au bain de sable; le feu étant très-vif du commencement, il se fit néanmoins une séparation des substances, selon leur différente gravité spécifique; mais la liqueur qui se montroit rouge dans le matras monta claire, & après elle, il passa un peu de Soufre dans le bec du Chapiteau: lorsqu'il ne parut plus d'humidité, je poussai le feu jusqu'à faire rougir le sable, & il se sublima dans le Chapiteau des taches blanches en petite quantité; voyant, enfin, que la tête-morte avoit une apparence vitreuse brune, je laissai refroidir le matras; l'ayant ensuite décoëffé, il s'éleva une violente exhalaison de vapeurs volatiles qui a une odeur urineuse, celle-ci étoit encore plus développée dans la matière saline du Chapiteau.

48. La liqueur, qui étoit passée dans le recipient, étoit un peu laiteuse, & n'avoit point d'odeur. Mêlée à l'acide vitriolique, elle ne fermenta point, & développa seulement un peu d'odeur sulphureuse; avec l'acide nitreux, elle produisit le même effet.

49. Mêlée à l'Alkali fixe, il me parut qu'elle avoit développé quelque peu d'odeur urineuse. Mêlée enfin, à une dissolution de Sel volatil concret dans l'huile de tartre, mélange qui ne donnoit plus qu'une foible odeur urineuse, elle se renouvela avec beaucoup de force.

50. Le soupçon que j'avois formé, que cette liqueur pût contenir du Sel ammoniac, me fit penser à la mêler

à l'eau-forte, pour en faire une eau régale ; je mis de l'or dans la liqueur, elle l'a entièrement dissous (i).

51. En considérant les résultats de toutes ces expériences, il paroît qu'on peut conclure que le Soufre a changé quant à ses propriétés principales, & que l'association de la Chaux, & des Alkalis fixes le rend susceptible de plusieurs modifications, & d'une décomposition dans ses principes qui ne peut se faire d'ailleurs, que par la combustion à l'air libre ; mais comme les substances, qui se mêloient, & se noyoient dans l'eau qui passoit dans le récipient, & celles qui se sublimoient dans le Chapiteau, où, qui s'élevoient dans le col, étoient en trop petite quantité pour en déterminer par des expériences exactes la nature, & pour en déduire en conséquence les altérations arrivées au Soufre ; j'ai pris le parti de saturer de Soufre une quantité déterminée

(i) *M. du Hamel* a observé p. 76. mém. de l'Acad. R. des Sciences an. 1747. un phénomène qui a beaucoup de rapport à celui-ci, & par lequel il paroît que l'esprit de nitre se régale en passant sur la Chaux, ce qui avoit été dit par *Beker*, nous renvoyons à ces deux Auteurs ceux qui voudroient examiner le fondement de leur opinion, & nous nous contenterons d'avancer quelques réflexions qui y ont rapport.

M. Malouin dans son mémoire sur la Chaux dit pag. 95. d'en avoir tiré une liqueur de la nature de l'esprit de Sel commun &c.

On fait qu'en ne saturant pas les terres absorbantes d'acide marin, on obtient un Sel qui a les propriétés des Alkalis fixes.

On fait que le sang contient du Sel marin dénaturé par l'action des esprits vitaux.

M. Baumé dir avoir fait un Sel alkali artificiel, en saturant de la Chaux avec du phlogistique. Man. de Chimie pag. 74.

Ne pourroit-on pas soupçonner que par cette opération, on ne, fit par une route inconnue, que la combinaison de l'acide marin à la terre, dans le rapport qui est nécessaire pour former la substance saline dont nous avons parlé, qui a les propriétés de l'alkali fixe ? ce seroit l'effet d'une décomposition, & récomposition, ou, au moins celui d'une surcomposition dont nous avons tant d'exemples.

Je n'oublierai pas de rapporter ici un phénomène qui semble prouver l'existence de l'acide marin dans la Chaux ; c'est qu'en dissolvant de la Chaux dans une sorte de dissolution de Sel de glauber, il m'est résulté, par la filtration & évaporation, un Sel cristallisé comme le Sel d'Ebsom.

minée de Chaux, & d'Alkali fixe pour en examiner les produits.

52. Je pris pour cela de la Chaux sulphurée, ou le caput mortuum d'une distillation de la Chaux faite avec le Soufre; le rapport de ces matières étoit de 16: 1. Sur deux onces de ce caput mortuum, je mis un gros de Soufre, ayant soin de bien mêler les matières, & de les incorporer par le secours de l'eau, je fis distiller ce mélange dans une cucurbite de terre à feu nud, ayant la précaution de n'augmenter considérablement le feu, que lorsqu'il ne se sublimoit plus rien dans le Chapiteau, & je l'y soutins ainsi pendant une heure; je laissai refroidir la cucurbite, j'en retirai la tête-morte qui étoit devenuë encore plus grise, & plus légère; je la mêlai à un autre gros de Soufre, & la soumis de nouveau à la distillation, remettant le même Chapiteau, & tel que je l'avois retiré de la distillation précédente, je mis à part l'eau que j'en avois retirée, & je réitérai six fois le même procédé, en poussant le feu à la dernière violence la septième fois.

53. Je vis à chaque fois se sublimer une matière blanche comme celle dont j'ai parlé §. 23. elle pésoit 36. grains, & à la sixième sublimation la matière du Chapiteau devint jaune pâle en dedans, pendant qu'elle resta blanche contre le verre.

54. La première liqueur qui passa dans le récipient, le rapport de la Chaux au Soufre étant de 10: 1., étoit un peu laiteuse, elle avoit une odeur d'œufs pourris.

Mêlée à l'huile de vitriol, elle s'échauffa, fit effervescence & prit l'odeur de Soufre brûlant, en donnant des vapeurs blanches.

Je ne remarquai aucun mouvement avec l'eau-forte, seulement elle s'y mêloit comme fait le sirop dans l'eau.

55. Il me parut entrevoir un peu de mouvement par l'addition de l'Alkali fixe, & il s'éleva une odeur de lessive.

Cette

Cette liqueur étoit, d'ailleurs, si foible, que les seuls signes de l'huile de vitriol ont été manifestés.

56. La seconde liqueur étoit limpide, & sentoit un peu l'empireume.

Elle ne fit aucune effervescence avec les acides; elle donna seulement des fumées rouffes & épaiffes avec l'huile de vitriol, & une odeur de Soufre brûlant aromatique avec tous les deux; on doit encore observer, que l'huile de vitriol se précipitoit, & ce n'étoit, qu'en agitant les liqueurs, qu'elles se mêloient, faisoient paroître les fumées, & l'odeur en question.

Elle fit effervescence avec l'Alkali fixe, & diminua l'odeur urineuse avec l'Alkali volatil que je lui rendis, par l'addition du Sel de Potasse.

57. La troisième étoit aussi claire, sentant de même l'empireume, & donnant les mêmes résultats.

58. La quatrième étoit aussi claire à la surface, on voyoit nager une liqueur qui paroissoit huileuse, elle sentit l'odeur d'esprit de nitre dulcifié, & produisit les mêmes effets que ci-devant.

59. La cinquième étoit claire, une huile verte sembloit nager à la surface, son odeur étoit sulphureuse très-volatile & très-pénétrante.

Mêlée à l'huile de vitriol, elle prit une odeur aromatique que l'Alkali fixe lui enlevoit, & elle suivit en tout, ce que nous avons vû ci-devant.

60. La sixième étoit, à-peu-près, comme la précédente, & donna les mêmes résultats; mais on voyoit un sédiment considérable d'un blanc jaunâtre.

61. La tête-morte dans les premiers procédés étoit bleuâtre; mais cette couleur se changeoit à chaque fois, & devenoit plus blanche, jusqu'à ce qu'elle passa au blanc sale à la sixième reprise; & elle ressembloit, pour lors, un mortier dont on fait les revêtemens, & sentoit l'odeur

l'odeur de la Chaux, à laquelle on mêle la colle, & le gypse pour blanchir les murailles, elle étoit insipide, & pesoit onc. 2. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$

62. La Chaux a donc augmenté son poids de $\frac{2}{8}$ $\frac{5}{2}$ car je n'en avois employé que onc. 2. &, en ajoutant les gr. 36. de la matière qui s'est sublimée, il manque encore $\frac{3}{8}$ au poids total, puisque j'avois fait l'addition de $\frac{6}{8}$ de soufre : or, il faut que ces $\frac{3}{8}$ soient passés avec l'eau dans les récipients; mais comme les liqueurs étoient sensiblement acides, & que dans les dernières, l'acide sulphureux volatile étoit manifesté & développé; il suit, qu'il doit avoir passé dans les récipients gr. 200. d'acide libre, étant, d'ailleurs, probable que le phlogistique se soit combiné (*k*) avec les parties de la Chaux, dont gr. 36. ont été sublimés à la voûte du Chapiteau: il est vrai que dans la sixième opération, il se sublima un peu de Soufre, sans avoir souffert aucun changement, autant du moins, que j'en ai pu juger par la seule inspection; & quoique la quantité ne fut pas considérable, elle a, néanmoins, concouru aux gr. 36., & c'est cette partie que nous verrons qui ne s'est point dissoute dans l'eau.

63. Je pris la substance qui s'étoit sublimée, & qui n'étoit plus si grasse, qu'elle étoit, à la première & à la seconde sublimation; je la mis dans l'eau froide, elle se
soutint

(*k*) A la sixième reprise une partie du Soufre se sublima sans se décomposer, & c'est cette partie qui ne pût pas se dissoudre, & dont nous parlerons plus bas; le reste n'étoit, je crois, que des parties de Chaux combinées avec le phlogistique qui a abandonné l'acide vitriolique, ce qui doit revenir environ à gr. 9., savoir au quart du poids total.

soutint à la surface pendant quelque temps ; mais petit-à-petit, il se fit un précipité blanc, le peu qui furnageoit demeurant jaune ; j'en mis un peu sur le feu & il s'enflamma comme le Soufre. Les premières sublimations cependant en contenoient très-peu ; car cette matière étoit toute dissoluble dans l'eau, quoiqu'elle fut fort grasse, & qu'elle contint par conséquent beaucoup de phlogistique. Je crois néanmoins que dans l'un & dans l'autre, il se trouve encore du véritable Soufre ; mais il n'est pas moins vrai, que la Chaux se volatilise avec lui, & qu'elle en décompose la plus grande partie : or il est probable que, pendant que la Chaux agit sur une partie du phlogistique du Soufre, & qu'elle en dégage l'acide, il y a des parties de cette Chaux, qui sont volatilisées, par l'aggrégation du phlogistique du Soufre, qui a été décomposé.

64. Ces observations servent à appuyer l'opinion de quelques Physiciens, qui prétendent que la cohésion des parties des corps dépend de la matière inflammable : M. STAHL a démontré qu'elle se rencontre dans les trois Regnes, & qu'elle n'y diffère, que par la quantité ; or, cela posé, en rapprochant des faits qui nous montrent que par une calcination suivie, & violente, ou par d'autres opérations réitérées, on peut dépouiller les corps du principe qui seroit à les caractériser, sans qu'on puisse les recomposer par l'addition du phlogistique, il paroît naturel de conclure, qu'il n'est pas le principe qui constitue toutes les propriétés des corps, comme quelques Chimistes l'ont crû.

65. Quoique les expériences, que j'ai rapportées, prouvent que la Chaux décompose le Soufre, en attaquant la partie phlogistique, il est pourtant vrai aussi qu'on n'en retire environ que la moitié en acide sulphureux, en y comprenant une partie qui se sépare par la sublimation ; il nous reste donc encore à examiner, si le Soufre restant, ne se trouve dans la Chaux, que comme un simple aggrégé,

ou

ou bien s'il s'est combiné avec elle d'une manière plus intime; ce qui me porte à être plutôt de cette opinion, c'est que j'ai toujours fait rougir les cucurbités de terre dont je me suis servi dans ces dernières expériences, en employant un feu de bois très-vif & continué pendant long-tems, après toute distillation, & toute sublimation finie: or il paroît que par cette opération, le Soufre auroit dû reparoître, s'il avoit encore été uni à son phlogistique; mais je présume que ce phlogistique s'est combiné avec la Chaux d'une manière assez forte, pour ne plus être sujet à l'action de l'acide vitriolique, qui, à son tour, est puissamment retenu par la Chaux comme le prouve M. HOFFMANN.

66. Pour déterminer plus exactement si le Soufre qui reste dans la Chaux, n'est plus sous la forme de Soufre, je fis les expériences suivantes.

Je mis la tête-morte §. 61. dans six livres d'eau, il s'en est dissout environ trois gros; je la filtrai, & ayant divisé cette dissolution, je mis du Sel de potasse dans une partie, elle devint d'un jaune clair, il ne se fit point du tout d'effervescence, & il parut seulement un peu de précipité; mais comme je n'ai eû aucune marque qui m'indiqua le point de saturation, je ne fais pas si ce peu de précipité n'a point été produit par de l'Alkali surabondant; ce qui me paroît d'ailleurs très-probable. Il s'éleva néanmoins à la surface de la liqueur une substance blanche qui ressembloit à de la graisse figée, & qui, peu-à-peu, s'est précipité. (J'avois vû la même chose dans le mélange du foye de Soufre à la Chaux: toutes les fois que j'ajoutois du Sel de potasse, le mélange alors sembloit même se gonfler, & il en sortoit une grande quantité de bulles d'air) mais revenons à l'expérience; je décantai la liqueur, & la fis évaporer au bain de sable, ce qui me fournit un Sel gras fait, à-peu-près, comme celui du §. 42. mais sentant

l'odeur d'urine évaporée sans aucune différence, son goût étoit fort acide étant bien desséché, (1) amer, un peu stiptique, & laissoit une impression onctueuse sur la langue, d'ailleurs très-avide de l'humidité.

67. Ce qui étoit sur le filtre desséché à l'air, étoit comme du limon, il se pétrissoit avec l'eau; mais il se fendoit au feu, il exhaloit un peu d'odeur de Soufre brûlant, & il paroissoit altéré par un autre odeur qui ressembloit à du Camphre; il ne donnoit point de flamme, son poids ne fut pas sensiblement diminué, il devint très-blanc & approchoit beaucoup de la craye friable.

68. Je mis le reste de la dissolution dans un alembic de verre, & après la distillation finie, je trouvai une croûte grise claire, dont le centre étoit roux noirâtre. Je ne pus détacher cette partie, tant elle adhéroit au verre; je pris le parti de la dissoudre dans l'eau, pour la remettre à évaporer jusqu'à siccité, sans pousser le feu sur la fin (comme j'avois fait dans la distillation, pour voir s'il ne se sublinoit rien au Chapiteau,) & j'eus encore une crasse rousse qui sentoit la graisse brûlée, & très-adhérente à la capsule; dans le milieu, on remarquoit une tache qui ne ressembloit pas mal à une pierre, dont on tire le gypse, qui est un peu argentine; j'eus beaucoup de difficulté à la détacher, & elle ressembloit exactement à la poussière par sa couleur.

J'en mis une prise sur un fer rouge, elle y jetta beaucoup de fumées d'une odeur de graisse brûlée, & y prit la couleur du charbon; l'ayant mise dans l'eau elle parut s'y dissoudre, mais elle se précipita en entier, autant que j'en pû juger lorsqu'elle fut bien reposée.

(1) Tout le monde sait, que de la combinaison de la Chaux avec un Alkali fixe il résulte le caustique potentiel dont se servent les Chirurgiens celui ci cependant diéroit de la pierre à cautère, en ce qu'il étoit très-blanc.

69. En considérant maintenant tous ces résultats, nous commençons par reconnoître une décomposition du Soufre, dont une grande partie de l'acide se convertit en esprit sulphureux. 2.^o Qu'une partie, & probablement la plus grande du phlogistique qui entroit dans la formation du Soufre, s'unit à des parties de la Chaux, & se volatilise. 3.^o Que les Sels qui résultent ainsi de la combinaison de l'acide vitriolique avec la Chaux, sont très-dissolubles dans l'eau, propriété contraire à la nature des sélénites, qui sont les Sels résultants de l'union de cet acide avec les terres calcaires; soit que ces Sels soient naturels, soit qu'ils soient le produit de l'art. 4.^o Qu'on peut obtenir une liqueur, & même du Sel volatil urineux, phénomène cependant déjà connu, & qu'on trouve dans plusieurs Auteurs. 5.^o Que la Chaux perd par ce moïen toutes ses propriétés, & qu'il reste une partie qui est très-difficile à se dissoudre dans l'eau; il y a apparence que c'est la partie qui, étant saturée d'acide vitriolique, ne contient point de phlogistique.

70. C'est de l'union du phlogistique, que nous devons déduire cette plus grande dissolubilité; en ce que, par son association l'acide s'unit d'une manière moins intime, & moins forte avec la base terreuse, d'où il suit que l'eau a une plus grande action sur ce composé (*m*).

n 2

71.

(*m*) Nous ne laisserons pas d'observer aussi qu'il n'en est pas de même, lorsque la matière inflammable est unie en particulier avec une de ces substances, car nous voyons que, lorsqu'elle s'y trouve dans une quantité convenable que nous nommerons saturation; les composés qui résultent ne se dissolvent plus avec la même facilité dans l'eau, ou même point du tout, ce qui paroît une preuve convaincante que c'est de son interposition, qu'on doit déduire la propriété en question.

Il me semble, d'ailleurs, que ceci tient à la théorie de la surabondance d'un des principes qui entre dans la formation d'un composé, d'où il paroît que doit dépendre la facilité de leurs décompositions, ou pour prendre la chose plus généralement, du défaut d'un des principes

71. Cet effet ne doit cependant pas être regardé comme particulier au phlogistique, car je pense qu'un principe qui auroit du rapport avec ceux-là produiroit du plus au moins le même effet.

Je remarquerai de même en passant que cette induction est d'autant plus fondée, qu'on voit que c'est de-là que dépend la dissolubilité du Soufre dans l'eau par l'intermède de l'Alkali fixe.

72. Ne pourroit-on pas aussi penser que la décomposition des corps vient de ce que le dissolvant a une plus grande affinité avec la partie phlogistique du corps dont il est le menstrué, que n'en ont toutes les autres parties intégrantes de ce même corps avec la partie phlogistique ?

Cette conjecture, je l'avoüe, souffre de grandes difficultés ; mais elle n'est pas dénuée de probabilité, & elle pourroit être discutée avec plus de fondement autre part : d'ailleurs, elle paroît être le fondement de la théorie des doubles affinités.

73.

cipes, ce qui est d'autant plus sensible, que les corps sont plus composés : dans cette théorie je comprends la volatilité soit naturelle soit artificielle comme le défaut d'un de ces principes, ainsi que nous verrons ailleurs.

Le travail que *M. Rouëlle* a fait sur les Sels neutres capables d'une surabondance d'acide semble confirmer ce sentiment ; en ce qu'ils m'ont paru plus aisés à décomposer. L'opération du départ par l'eau-forte qui ne peut se faire, que lorsque la quantité de l'argent est au moins triple de celle de l'or.

La décomposition du Borax pour en retirer le Sel sédatif sont des exemples de la surabondance absolüe d'un principe.

La dissolubilité du Soufre dans les huiles tient de même à cette classe ; mais nous rapporterons à une classe opposée la dissolubilité du Soufre dans l'eau par l'intermède des Alkalis, & par conséquent, la facilité de sa décomposition, la facilité de la décomposition des Sels sulphureux &c. Ces dernières doivent être considérées produites par le défaut d'acide, de manière que la grande affinité qui se trouve entre cette substance saline, le phlogistique & les alkalis, produit à peu-près le même effet, que celui qui arrive aux Sels composés voyez n. du §. 7.

73. Cette décomposition du Soufre, quelque' extraordinaire qu' elle soit , est pourtant fondée sur les mêmes principes que celle qui se fait par la cloche : on fait que l' union du phlogistique à l' acide vitriolique ne peut se faire, que lorsque celui-ci est dans son plus grand degré de concentration , d' où il suit qu' il faut rendre à l' acide le phlegme dont on l' avoit dépouillé , pour obtenir la décomposition du Soufre ; & c' est ce qui se fait dans cette opération, qui sert de preuve à l' exactitude de cette théorie , & qui est encore confirmée , par ce qu' on ne peut faire cette décomposition par le moien de la Chaux ni de l' Alkali fixe sans le concours de l' eau ; c' est pour m' asûrer de cette vérité , que j' ai fait un mélange de 8. parties de Chaux sur une de Soufre , & de 8. parties d' Alkali de même sur une de Soufre ; la Chaux , & l' Alkali étoient secs : je mis ces deux mélanges dans deux cucurbites de verre garnies de leurs Chapiteaux , & de leurs récipients bien luttés dans un bain de sable , ayant eû soin de donner au commencement un feu tout-à-fait doux pour en retirer le peu d' humidité , qui se trouve toujours dans ces substances , quelque soin qu' on se donne pour les avoir sèches , sans qu' elle put favoriser la décomposition du Soufre ; en effet , je retirai quelques gouttes de liqueur dans les deux récipients : celle de la Chaux étoit néanmoins foiblement sulphureuse , & celle de l' Alkali fixe avoit une odeur urinéuse très-développée ; (n) lorsque la chaleur commença à être

(n) En rapprochant ce que nous avons dit §. 6. 18. 46. 49. il est aisé de voir, que les différences des phénomènes dans les résultats des expériences qui ne diffèrent que par quelques circonstances, nous conduisent à des remarques intéressantes. Premièrement; nous avons vu que la combinaison de 24. parties de Chaux sur une de Soufre §. 46. a donné à la voûte du Chapiteau un sublimé que je saturai d' acide vitriolique, & que ce qui resta sur le filtré étant bien desséché, développa une odeur urinéuse dans l' huile de tartre.

à être un peu plus grande, il s'éleva une matière blanche dans les deux cucurbites, elle ne fut pas considérable dans le foye de Soufre, mais elle le fut dans le mélange de la Chaux, & il résulta un soufre verd le long des parois de la cucurbite, pendant qu'il n'y avoit qu'une matière à peine, colorée dans le Chapiteau.

74. La tête-morte du foye de Soufre pésoit $\frac{2}{\text{onc.}} \frac{1}{8} \frac{1}{2}$.

la liqueur urineuse pésoit environ $\frac{15}{8}$; ce qui manquoit au poids total doit être assigné à ce qui a été sublimé.

On voit cependant que l'union que contracte le Soufre avec l'Alkali fixe est très-considérable, puisqu'il s'en est sublimé une si petite quantité dans laquelle on reconnoit que la plus grande partie, doit être assignée à de l'Alkali fixe qui a été volatilisé.

75. Le caput mortuum de la Chaux pésoit $\frac{2}{\text{onc.}} \frac{1}{8}$ le phlegme sulphuré pésoit aussi $\frac{15}{\text{gr.}}$ d'où, il suit que le sublimé

2. Que la liqueur du foye de Soufre, combiné avec la Chaux, & décomposé par l'addition de l'huile de vitriol, donna de même des marques sensibles d'esprit volatil §. 49.
3. Que le foye de Soufre mêlé à la Chaux §. 6. donna non seulement de l'esprit; mais un peu de Sel volatil.
4. Que le foye de Soufre sans être dissous §. 73. donna de même de cet esprit, pendant que nous n'avons qu'une liqueur qui sentoit le foye de Soufre dans une pareille combinaison noyée dans l'eau §. 18.

Je ne m'arrêterai pas à des conjectures vagues, mais je serai seulement observer que l'odeur volatil urineuse qui s'est manifestée par l'addition de l'Alkali fixe §. 46. & 49. prouve qu'il y étoit enveloppé par un acide; or, la dissolution de l'or arrivée par le mélange de cette liqueur à l'eau-forte, semble prouver la présence de l'acide marin: Je ne veux cependant rien assurer sur ceci, car n'ayant pas préparé l'eau-forte moi-même, peut-être n'en étoit-elle pas tout-à-fait exempte.

mé a été de $\frac{57}{\text{gr.}}$ l'odeur de ce sublimé étoit celle d'ail brûlé.

76. Je ne négligerai pas de rendre compte ici d'un phénomène tout-à-fait singulier que j'ai observé, à l'occasion où je m'étois proposé de procéder sur l'Alkali fixe, comme j'avois fait sur la Chaux §. 51. c'est-à-dire, de chercher à le saturer de Soufre; quoique l'opération ait manqué par la rupture du Vaisseau, ce qui m'a empêché de faire fond sur les produits de la sublimation, & de ce qui étoit passé dans les récipients, la tête-morte néanmoins me fournit des observations assez intéressantes, pour ne pas les passer sous silence.

Je pris le caput mortuum de la distillation dont nous avons parlé §. 5. & dont le poids étoit de $\frac{5}{8} \frac{1}{2}$ j'y ajoutai $\frac{6}{8}$ de Soufre dans 6. reprises différentes, ce qui revenoit à

$\frac{1}{\text{onc.}} \frac{3}{8} \frac{1}{2}$ La tête-morte ne pesoit néanmoins que $\frac{2}{8}$ elle étoit d'un blanc éclatant, sa gravité spécifique avoit considérablement diminué, elle étoit au reste grasse au toucher, sans gout & sans odeur, enfin n'ayant aucun caractère de substance saline; j'en mêlai avec les acides, elle ne souffrit aucun changement; elle me parut se dissoudre avec facilité dans l'huile de tartre, développant, en même temps, une forte odeur de phosphore; la liqueur retirée par la distillation sentoit de même cette odeur; mais elle paroissoit approcher beaucoup de celle de l'esprit sulphureux, & cela est assez naturel; car la cucurbite étant scellée, il ne pouvoit résulter autre chose, aussi étoit-elle très-acide.

J'ai voulu dissoudre le reste qui se trouvoit être du poids de $\frac{111}{\text{gr.}}$ & il m'y a fallu $\frac{48}{\text{onc.}}$ d'eau; encore sont-ils

restés

restés $\frac{8}{8}$ d'une matière qui se précipitoit toujours au fond de l'eau, & en est-il resté environ $\frac{30}{gr.}$ sur le filtre ce

qui revient à $\frac{75}{gr.}$ de matière qui s'est dissoute, je la fis évaporer à un feu très-lent, & j'en obtins un véritable Sel sulphureux qui s'est cristallisé en aiguilles fort minces; ce Sel différoit de ceux dont nous avons parlé §. 18 en ce qu'outre à la cristallisation, il faisoit une grande effervescence avec l'acide nitreux, pendant qu'on ne voyoit presque pas de mouvement avec l'huile de vitriol; ce phénomène me parut bien singulier, lorsque j'observai que très-peu d'eau-forte continuoit à faire effervescence avec beaucoup de ce Sel mis à différentes reprises, & qu'il se précipitoit aussi tôt sous sa forme (o) cristalline. Après en avoir mis une quantité considérable, voyant que l'effervescence ne discontinuoit pas, je le fis évaporer jusqu'à siccité, je le dissous ensuite & le mis de nouveau à évaporer, mais lentement, & il ne parut plus de cristaux, mais une espèce de bouillie que j'eus beaucoup de peine à dessécher. Je mis ce Sel sur les charbons en feu, & il y eut très-peu de déflagration; il resta une matière très-blanche, farineuse qui ressembloit assez à la Chaux lavée, par ce que je pus en juger à la seule inspection.

77. Après avoir traité le Soufre avec la Chaux, la première idée qui me vint dans l'esprit, fut de voir si, en la mêlant aux huiles, il se feroit un déchet considérable, & ce que je pourrois observer dans la Chaux même.

Je

(o) Ce phénomène est tout à fait digne d'observation, l'effervescence n'avoit lieu qu'à la surface de l'eau-forte, le Sel se faisoit par grumeaux, de blanc il devenoit jaune, & se précipitoit ensuite au fond. Les vapeurs qui en exhaloient étoient celles de l'esprit de nitre; le Sel résultant étoit pour la plus grande partie le même qu'auparavant; il y avoit néanmoins un peu du salpêtre.

Je pris à cet effet onc. 2 de Chaux-vive pilée, je la mêlai à $\frac{1}{\text{onc.}}$ de charbon pilé & passé par un tamis très-ferré,

je mis sur ce mélange $\frac{7}{8}$ d'huile d'olive, & après avoir mêlé exactement le tout je le mis dans une cucurbite de grés garnie d'un Chapiteau de verre bien lutté & avec son récipient à feu nud: je retirai d'abord une liqueur rougeâtre, ensuite un huile claire un peu empireumatique, & en troisième lieu une huile jaune tout figée comme l'huile commune est en hiver, elle sentoit fort l'empireume & restoit adhérente pour la plus grande partie aux parois du récipient, je filtrai la liqueur, & l'huile claire passa avec la première elles pésoient $\frac{3}{8}$; ayant ensuite rincé

le récipient. Je trouvai que l'huile figée pésoit un demi gros, ce qu'ajoûté à $\frac{1}{8}$ pour celui qui étoit resté sur le

filtre & aux $\frac{3}{8}$ des liqueurs filtrées, nous donne; $\frac{4}{8} \frac{1}{2}$

donc il est resté $\frac{2}{8} \frac{1}{2}$ qui n'ont pas passé en liqueur

malgré la vivacité du feu, mais une partie, il y a apparence, s'est sublimée avec les parties de Chaux dont le Chapiteau étoit couvert, sauf à la voûte tout-à-fait.

78. Le deux liqueurs mêlées ensemble à l'huile de vitriol ne donnerent aucun signe de changement; elles procurèrent des fumées blanches d'une odeur aromatique dans l'eau-forte; elles firent un peu d'effervescence avec l'Alkali fixe & rougèrent le papier bleu, ce qui prouve que la première étoit sensiblement acide.

79. Ce qui s'étoit sublimé étant d'une couleur rousse, & sentant l'odeur d'ail brûlé. Je cherchai à le détacher du verre pour l'avoir sous une forme concrète, mais il

ne me fut pas possible, tant la matière étoit grasse. Je pris le parti de la dissoudre dans l'eau, persuadé que ce devoit être une espèce de savon volatilisé par la violence du feu, elle s'est en effet entièrement dissoute, je tentai cependant en vain d'en séparer l'huile par le moïen de l'acide vitriolique, il se fit par ce moïen un précipité très-léger & par flocons.

80. Le caput mortuum étoit jaunâtre farineux sous poudré d'un peu de charbon au centre de la surface supérieure, je l'arrosai d'eau sans qu'il y ait eû la moindre effervescence, & je vis se former comme des graïsses qui ne ressembloient pas mal à de l'huile noire empireumatique qu'on tire de la fuye, & comme le mélange étoit trop liquide, j'ajoutai $\frac{4}{8}$ de charbon ce qui endurcit aussi-tôt la matière; je la détrempai avec de nouvelle eau la pétrissant, & la soumis à une nouvelle distillation.

81. Je retirai une liqueur claire un peu onctueuse qui ne faisoit aucune effervescence avec les acides, en faisoit sensiblement avec l'Alkali fixe & rougissoit un peu les bords du papier bleu; son odeur étoit celle du noir de fumée. Il se sublima une bande très-blanche au Chapiteau. Cette liqueur acidule & ce sublimé me firent naitre la pensée de cohober de nouvelle eau le caput mortuum, & de voir ce que j'en aurois; je disposai l'appareil, & ayant mis le même Chapiteau sans récipient, l'évaporation qui se fit pendant la nuit enleva tout le sublimé; je fis néanmoins la distillation, & l'eau que j'en retirai quoiqu'ayant la même odeur que la précédente ne donna aucun signe d'acide ni d'Alkali, il se forma cependant un nouveau sublimé qui ressembloit aux fumées que laisse la bonne poudre à canon sur la batterie des mousquets.

82. Pour m'assûrer si ces sublimés dépendent du phlogistique qui entre dans ces combinaïsons, ou si en effet ce
sont

font des parties volatiles qui existent dans la Chaux, je mêlai encore $\frac{4}{8}$ de charbon à cette tête-morte délayée

dans l'eau & en même-tems je mis $\frac{2}{\text{onc.}}$ de charbon dans

une autre cucurbite & $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Chaux dans une troisième

pour être assuré des mes résultats; il paroît même que j'aurois du commencer par-là; si en effet je n'avois pas regardé ceci comme un accessoire, sans doute c'eut été ma marche; mais venons au fait: l'eau qui passa étoit rousseâtre onctueuse & sentoit l'odeur de la fumée du bois, d'ailleurs elle ne donna aucun signe d'acidité, il me parut à la vérité qu'elle faisoit quelque mouvement avec les acides, & que le papier bleu perdit quelque nuance de sa couleur. Ce qui se sublima au Chapiteau étoit si peu de chose qu'il étoit à peine sensible.

83. La tête-morte étoit une matière farineuse un peu jaunâtre, on n'y voyoit plus de vestige de charbon quoique j'en eusse mis un poids égal à celui de la Chaux sans tenir compte de l'huile; son poids n'étoit plus que d' $\frac{1}{\text{onc.}}$

$\frac{2}{8}$. Nous avons remarqué §. 77. que la tête-morte après

la première distillation devoit avoir augmenté de $\frac{2}{8} \frac{1}{2}$.

le poids de la Chaux employée qui étoit de $\frac{2}{\text{onc.}}$; or il

faut de toute nécessité qu'il se soit volatilisé $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{1}{2}$ gros,

de ces substances par l'intermède de l'eau; il me paroît naturel d'assigner cet effet à l'eau (p) car nous voyons

o 2.

qu'elle

(p) C'est ici le dénoüement du doute proposé §. 28.

qu'elle étoit toujours chargée de couleur ; la première fut tout donnoit des marques sensibles d'un Sel acide : une partie doit donc avoir été confondue ou dissoute par l'eau même , l'autre qui sans doute n'étoit pas la moins considérable est celle qui s'est sublimée au Chapiteau les trois premières fois sur tout.

Cette volatilisation de la Chaux ne me paroît pas néanmoins l'effet de l'art , & semble nous convaincre que l'eau seulement est le véhicule propre à dégager ces parties, qui existent telles dans la Chaux, sans que le phlogistique concoure à cet effet, si ce n'est qu'en s'engageant à la Chaux, l'eau qui est dans les corps dont il arrive la décomposition, par sa privation, puisse alors opérer (q) cette séparation des principes fixes, & volatils de la Chaux ; en effet nous voyons que la quantité de matière qui se sublime va toujours en diminuant, qu'elle continuë à se faire sans addition de phlogistique, & par le seul intermède de la nouvelle eau qu'on ajoute.

84. Je crois de pouvoir me dispenser d'examiner ce qui regarde les Sels nitreux avec la Chaux ; ce sujet ayant été traité avec plus d'étendue par des Savans du premier ordre (r) sous un point de vue, exige un temps plus long que celui que je pourrois y donner pour le présent. Il me suffit de rendre compte ici, que nous seulement le nitre

(q) Les résultats dont nous avons rendu compte §. 81. 82. semblent nous prouver qu'il arrive le changement en question ; car quelque soin que je me fusse donné pour priver la Chaux, & l'Akali fixe de toute humidité, il est néanmoins passé un peu de liqueur, & il s'est formé à la voûte du Chapiteau un peu de sublimé blanc qui avoit les caractères de ceux dont nous avons parlé §. 8. & 23. la petite quantité cependant de ces produits nous a encore fait connoître que ce n'est qu'à la faveur de l'eau que le Soutre peut être décomposé.

(r) Outre les observations de M. Du-Hamel, on trouve dans le recueil des ouvrages de M. Pott un excellent mémoire dans lequel il redresse bien des choses, qui avoient été avancées par d'autres Savants.

nitre calcaire est moins inflammable que le salpêtre commun, mais que la Chaux sulphurée ne fait point détonner ce Sel, & que la poudre à canon dissout dans une eau de Chaux, cohobée plusieurs fois sur de nouvelle Chaux, perd beaucoup de son inflammabilité.

Le travail que l'Illustre M. Du-HAMEL a fait sur la Chaux, & sur le Sel ammoniac a jeté un si grand jour sur cette matière, qu'il ne reste plus que quelques expériences à faire, & dont il en a tenté quelques unes lui-même.

85. Celle qui paroît être la plus naturelle, & en même temps décisive est sans doute celle, par laquelle il s'étoit proposé de faire du Sel volatil en chargeant la Chaux de phlogistique; mais comme je n'ai pas vu la suite du travail dans laquelle il se propose la résolution de ce problème, j'ai cherché s'il étoit possible de réussir par un (1) procédé différent de celui dont le Savant M. BAUME' a fait usage. Ce procédé quelque ingénieux, & quelque élégant qu'il soit, me paroît néanmoins souffrir des difficultés pour la résolution du problème en question: ceci ne doit cependant diminuer en rien le mérite du travail

(1) Comme il n'est pas possible de se procurer tous les éclaircissements nécessaires pour développer les causes qui produisent, ou qui concourent à un effet dans un sujet quel conque, sans chercher à déterminer s'il n'est produit que dans un cas particulier, où si c'est une loi constante dans des circonstances déterminées (ce qui emporte la nécessité de comparer le plus grand nombre de résultats qu'il est possible, & qu'on obtient des variations de quelque circonstance que l'on tâche de se ménager) on ne sera pas surpris si, m'étant proposé l'examen de quelques phénomènes qui résultent de l'action de la Chaux sur le Sel ammoniac, je donne une quantité d'expériences où la Chaux n'y entre pas, & qui ne doivent servir qu'à me faciliter le développement de l'objet que je me suis proposé. Je ne crois cependant pas de devoir négliger quelques observations, & quelques réflexions qui se présentent naturellement dans le cours de ces expériences, & je me fais un plaisir de reconnoître que ce travail ne doit être regardé, dans cette partie, que comme une suite de celui du Savant M. Du-Hamel.

travail de M. BAUME'; car il est en effet parvenu à faire non seulement du Sel volatil en employant la Chaux pour intermède, mais il a encore tellement dénaturé la Chaux, qu'il dit lui-même l'avoir convertie en Alkali fixe; d'ailleurs son but n'a pas été d'examiner, si ce Sel volatil étoit produit entièrement par la décomposition du Sel ammoniac, ou s'il ne s'en trouvoit pas une partie, qui fut produite par la matière animale avec laquelle il avoit phlogistiqué la Chaux; (t) mais ce fut pour réfuter un problème proposé dans le journal de Médecine en Octobre 1762. dans lequel il est annoncé qu'on peut obtenir par le moïen de la Chaux-vive pure, l'Alkali volatil du Sel ammoniac sous la forme fluide ou concrète, à la volonté de l'artiste: on voit que c'en étoit assez pour démontrer l'*insubstance* de l'énoncé du problème; mais en est-il de même pour la résolution du problème proposé par le Savant M. Du-HAMEL? Je crois qu'elle suffit pour démontrer, que tant que la Chaux ne changé pas sa nature, elle ne peut donner de Sel volatil.

86. Voici les difficultés qui me paroissent encore subsister dans leur entier.

Primo. La Chaux chargée d'une matière qui contienne du phlogistique, & dans laquelle on ne puisse soupçonner rien

(t) On pourroit objecter que par la violence du feu qui est nécessaire pour cette opération, l'Alkali volatil auroit dû se dissiper; mais il me paroît qu'on ne seroit pas bien fondé à penser ainsi; car l'Alkali volatil n'existant pas par lui-même dans ces matières, & n'étant qu'une production de l'art, il est naturel de croire que la Chaux qui est capable de le retenir avec tant de force dans la combinaison qu'on fait de cette substance avec le Sel ammoniac, doit de même empêcher la dissipation qui s'en feroit en se combinant avec le Sel ammoniacal dont cet Alkali fait partie: il est vrai qu'on pourroit même nier la présence ou la formation de ce Sel ammoniacal, comme n'étant pas démontrée, si l'on réfléchit cependant sur les produits de l'analyse du sang, on verra que la chose n'est pas tout-à-fait hors de vraisemblance.

rien de volatil, donne-t-elle du Sel volatil avec le Sel ammoniac ?

Secundo. L'esprit volatil fait par la Chaux-vive, ou par les Chaux métalliques n'enleve-t-il rien de l'intermède ?

87. Voici les expériences que j'ai faites sur ce sujet : je commencerai par celles qui se rapportent à la première question.

Je mêlai aussi exactement qu'il me fut possible deux parties de charbon végétal sur une de Chaux, & j'en fis une pâte avec de l'huile d'olive, je la mis dans un creuset au feu, que je fis rougir à blanc après que l'huile fut toute brûlée & réduite en charbon ; je retirai alors cette Chaux, & la pétris avec de nouvelle huile, remettant ce mélange dans un creuset au feu, je réitérai enfin trois fois cette opération.

88. La Chaux ainsi chargée des matières grasses, & exposée à un très-grand feu soutenu pendant long tems se réduit en une poussière brune sèche qui ne fait plus d'effervescence avec l'eau ; j'en pris $\frac{2}{8}$ que je mêlai avec

$\frac{3}{8}$ de Sel ammoniac dans une cucurbite de verre sur un bain de sable ; je commençai par un feu doux que j'ai poussé ensuite jusqu'à faire rougir le fond de la cucurbite : il passa un peu de liqueur foiblement urineuse dans le récipient, & le Sel ammoniac s'éleva le long des parois du verre, sans qu'il se soit fait le moindre atôme de Sel volatil : je décoëfai l'alembic, & je mis $\frac{2}{8}$ d'eau de pluie ayant soin de faire dissoudre autant qu'il m'étoit possible le Sel qui s'étoit élevé, mais comme il en étoit passé dans le récipient même, & qu'il en étoit resté dans le bec du Chapiteau, je ne crois pas que la quantité dis-

soute

soûte par l'eau put arriver à $\frac{2}{8}$; je commençai de même par un feu tout-à-fait doux, & lorsque la distillation fut achevée, je poussai le feu à la dernière violence & il se sublima sur la fin une petite quantité de matières blanches, qui s'est néanmoins résouîte en liqueur en continuant l'opération; le Chapiteau ne sentoit pas d'odeur urineuse & tenoit plutôt une foible odeur de foye de Soufre, ce qui s'accorde parfaitement bien avec les expériences de M. MALOUIN; la liqueur étoit du véritable esprit de Sel ammoniac qui tenoit cependant en dissolution une certaine quantité du même Sel, savoir celui qui avoit passé dans le récipient à la première distillation, & ce qui m'a prouvé que ce n'étoit point un Sel volatil ce sont les vapeurs blanches qui exhaloient du mélange de cette liqueur avec les acides vitrioliques & nitreux dans le temps de l'effervescence; phénomène cependant qui n'a pas lieu lorsqu'on mêle à ces acides un esprit de Sel ammoniac tiré de la Chaux qui soit exactement pur: (u) une autre indice qui a servi encore à me confirmer dans ce sentiment, c'est le mouvement qui s'est excité dans cette liqueur par le mélange d'un peu de Sel de tartre, ce qui a augmenté considérablement la force de cet esprit.

Un phénomène cependant tout-à-fait digne de remarque, c'est la couleur verte décidée que cet esprit fait prendre au papier bleu, ce qui paroît encore confirmer ce que nous avons dit à la n. du §. 70.

89.

(u) Je dis un esprit exactement pur, car il arrive très-souvent que par un coup de feu trop vif du commencement de l'opération, d'une proportion peu convenable entre le Sel ammoniac & la Chaux, il passe du Sel dans le récipient; aussi ne sauroit on assez prendre de précautions.

89. N'ayant pû réussir par ce procédé à retirer du Sel volatil, je me doûtai que cela eut pû provenir d'une trop grande quantité de matières grasses dont j'aurois impregnée la Chaux, & comme je n'étois pas dans le cas de chercher par un tâtonnement trop long à déterminer la quantité qui pourroit être nécessaire pour procurer à la Chaux cette propriété étrangère à sa nature; je me flattai d'y parvenir de même en broyant ensemble du charbon à la Chaux, & en combinant ensuite ce mélange avec un tiers de son poids de Sel ammoniac.

90. Quoique je fusse asûré que le charbon ne peut pas par lui-même décomposer le Sel ammoniac, pour m'en convaincre cependant par l'expérience, je fis aussi un mélange de charbon & de ce Sel dont en effet je ne retirai rien.

Dans la première de ces combinaisons, la Chaux, le charbon & le Sel ammoniac que je mis dans une cucurbitte de terre étoient en égale quantité, & il me résulta une liqueur insipide & sentant très-fort l'empireume avec du Sel concrêt à la voûte du Chapiteau, ce Sel n'étoit cependant que des fleurs de Sel ammoniac comme je m'en suis asûré en en mettant dans l'huile de vitriol avec l'huile de tartre, & la Chaux.

La liqueur quoiqu'insipide & sans odeur urineuse donnoit les mêmes signes, de manière que je ne savois si le défaut de saveur & d'odeur urineuse devoit être attribué à la surabondance des matières grasses dont elle avoit les caractères les plus marqués, savoir l'onctuosité, l'odeur très-empireumatique, la couleur rougeâtre, l'odeur sulphureuse qu'elle manifestoit avec l'huile de vitriol; ou à ce que la plus grande partie du Sel ammoniac fut passée sans se décomposer en forme liquide: ce sentiment me parut le plus probable; mais avant toutes choses je crus devoir réitérer cette expérience en variant la dose des matières.

91. Je retirai donc d'un mélange d'une partie de Chaux-vive sur deux de charbon & une de Sel ammoniac une liqueur dont l'odeur approchoit très-fort de la précédente, & le Sel qui s'étoit sublimé en plus grande quantité avoit un peu d'odeur urineuse, à-peu-près comme les fleurs ammoniacales métalliques.

92. Je repassai une partie de ce Sel sur deux parties de nouvelle Chaux-vive, mais les produits furent très-peu considérables; car ayant employé un gros de ces fleurs, je ne retirai que quelques grains de nouvelles fleurs de Sel ammoniac & quelques goûtes d'esprit urineux, malgré que j'eusse fait cette opération à feu nud dans une cucurbite de terre.

93. Quelque soin donc que je me fois donné je n'ai pu parvenir à retirer du Sel volatil de la Chaux chargée de phlogistique tiré d'une substance végétale (x).

Je

(x) La Chaux ainsi chargée de phlogistique & saturée ensuite d'acide vitriolique, donne par la dissolution, filtration & l'évaporation un Sel qui ne m'a pas paru différer de l'alun de plume & qu'on ne doit cependant pas contondre avec l'amianté comme fait *M. Lemery*, celui-ci est d'un goût astringent un peu douceâtre blanc comme de la neige, forme des végétations en bouquets par une évaporation moyenne, se boursouffle sur le feu, enfin il a tous les caractères de ce Sel qui est fort rare, & qui par-là peut devenir très-commun. Je ne sache pas que personne ait encore donné la manière d'en faire, ni cherché à connoître ce qui entre dans sa composition.

Je décomposai cet alun par l'addition de l'esprit volatil dans l'espérance de retirer un nitre, fondé sur les expériences de *M. Vallerius* & de *M. Pictsch*. Le premier disant qu'il avoit retiré de ce Sel par la combinaison de l'acide vitriolique avec l'huile de l'esprit de vin & le Sel de tartre, & rapportant en même tems que ce dernier en avoit fait avec du vitriol, de l'urine putrescée & de la Chaux: or comme il suivroit de ces expériences que le nitre ne seroit que l'acide vitriolique dénaturé par l'Alkali volatil qui se développe par la putrescence, ou selon le premier que ce même acide chargé de matière phlogistique est combiné à un Alkali fixe; j'ai voulu voir si cette combinaison m'en fourniroit, mais je n'ai retiré que du Sel ammoniacal secret.

Je ne prétends pas dire pour cela que la chose ne soit pas possible ; si le problème de M. BAUME' est soluble dans cette circonstance , on voit qu' il ne rencontre plus de difficultés ; mais la résolution du problème proposé par ce Savant ne seroit-elle pas plus facile , si on employoit la pierre à Chaux, la craye , ou toute autre substance capable de se convertir en Chaux, mais qui n'eut pas encore souffert l' action du feu , au lieu de se servir de la Chaux-vive ?

Comme c' est une question qui ne peut être décidée que par le fait , je me dispenserai d' exposer les raisons qui me déterminent à penser qu' il y ait un plus grand degré de probabilité & qui m' ont engagé à proposer cette conjecture.

Les résultats des dernières expériences & les réflexions que m' ont fourni d' autres qui sont très-connuës sur le Sel ammoniac , conjointement à celles du Savant M. Du-HAMEL , m' ont engagé à en faire de nouvelles dont je vais rendre compte.

Pour plus grande clarté, je commencerai par exposer quelques corollaires que cet Illustre PHYSICIEN a tirés de son travail rempli de sagacité.

„ I.^o Toutes les fois que l' urineux ammoniac paroît
 „ dans la distillation en forme concrète , c' est qu' il a em-
 „ portée avec lui une portion concrète de l' intermède
 „ avec lequel on l' a distillé.

„ II.^o Toutes les fois qu' on a cet urineux en
 „ forme d' esprit , c' est qu' il a passé dans la distillation
 „ avec l' eau qui étoit contenuë dans les matières , &
 „ qu' au lieu d' être joint à un substance solide qui lui
 „ donne du corps , il l' est à un liquide qui le fait pa-
 „ roître sous cette forme qui lui est propre :

Après les expériences que nous venons de rapporter , tout cela ne souffre plus de difficulté ; mais pourquoi la

craye passe-t-elle avec l'urineux dans la distillation, & que la Chaux résiste si puissamment à ces effets?

94. Il nous est encore moins difficile de répondre à ces difficultés après ce que nous avons dit de la Chaux §. 83.; car nous avons démontré que la partie volatile de cette substance ne peut en être dégagée qu'à la faveur de l'eau qu'on y mêle & dont il est probable, comme nous le verrons dans la suite, que dépend la décomposition du Sel ammoniac; mais comme elle n'est pas en grande quantité, il est naturel de penser que l'eau qui lui sert de véhicule en quelque petite quantité qu'elle soit elle même, peut toujours dissoudre le Sel volatil qui se dégage par ce moyen (y).

95. L'examen des différences qu'on reconnoît dans plusieurs opérations entre l'esprit volatil tiré par la Chaux & celui que l'on obtient avec les Alkalis fixes, m'avoit fait penser aussi que l'esprit urineux fait avec la Chaux n'emportoit point de son intermède concrêt; je crus cependant devoir m'en assurer, & je fis dans ce dessein l'expérience suivante.

Je distillai du Sel ammoniac avec de la Chaux éteinte à l'air dans une cucurbitte de terre à laquelle j'avois adapté un Chapiteau ouvert à sa partie supérieure, pour qu'il put avoir la communication avec un second Chapiteau de verre que j'avois soigneusement lutté au premier qui étoit de terre garni de son réfrigérateur, au moyen duquel, en remplissant une grande partie de sa cavité, je pouvois mettre du feu autour du second Chapiteau; je décomposai de cette manière l'esprit volatil en trois parties, c'est-à-dire en une liqueur très-limpide qui sentoit un peu l'urineux & qui étoit passée par le bec du premier
Cha-

(y) Ceci ne suffit pas encore pour rendre raison de ce fait, mais nous en trouverons le dénouement par la suite.

Chapiteau. Une couche de terre blanche insipide, sans aucune odeur urineuse & aussi mince qu'une feuille de papier laquelle adhéroit fortement au verre, & formoit comme une zone qui tenoit du rebord du Chapiteau jusqu'au commencement de la voûte. Une seconde liqueur très-rouille & sans odeur qui avoit passé par le bec du second récipient.

96. La première qui étoit limpide ne paroissoit pas augmenter son odeur urineuse par l'addition de l'Alkali fixe, au contraire la seconde développoit cette odeur avec beaucoup de force en y mêlant du Sel de tartre ou de la Chaux.

97. La matière blanche dont je viens de parler ne me paroît être autre chose que la partie terreuse du Sel sélénitique de la Chaux qui n'est que la crème de la Chaux même, laquelle est la véritable partie volatile dont nous avons parlé; en effet, j'en ai retiré du Sel sélénitique en y ajoutant un peu d'huile de vitriol affoibli par beaucoup d'eau, & il s'est même reproduit une croûte cristalline un peu opaque & assez semblable à la crème de Chaux à la surface de la liqueur; l'odeur fort urineuse qui se développa de la seconde liqueur par le mélange de la Chaux ou de l'Alkali fixe, semble nous prouver la présence d'un acide qui formoit un Sel ammoniacal; & je pense que c'est le même qui étoit auparavant engagé à la terre en question, & qui formoit avec elle la sélénite; pour me convaincre de la vérité de cette opinion, je fis une distillation d'une partie de Sel ammoniac sur deux parties de crème & d'eau de Chaux que j'avois fait évaporer à siccité, mais n'ayant obtenu qu'une très-petite quantité de liqueur urineuse le Sel ammoniac s'étant sublimé, je decoëffai l'alembic, & je mis une quantité assez considérable d'eau, ayant eû soin de dissoudre autant qu'il m'étoit possible le Sel ammoniac: j'en fis ensuite

suite la distillation, & j'obtins une liqueur foiblement urineuse, un Sel par flocons à l'orifice de la cucurbite & au bord du Chapiteau; ce Sel me parut ne souffrir aucune altération de la part de l'eau-forte, quoiqu'il fit effervescence avec l'huile de vitriol; il ne m'a pas été possible de bien constater si ce Sel étoit réellement un Sel ammoniacal vitriolique, je suis cependant très-porté à le croire tel; la tête-morte étoit d'ailleurs un Sel ammoniac fixé très-déliquescent qui se boursouffloit & qui se fondoit au feu en répandant des vapeurs fort épaisses.

98. Cette expérience m'engagea naturellement à examiner ce qui résulte du mélange du Sel ammoniac avec la Chaux bien lavée; je pris pour cela une quantité de Chaux éteinte, je la lavai douze fois dans de l'eau toujours nouvelle & toujours bouillante, je la fis ensuite dessécher

sur un support de moufle & j'en mêlai $\frac{3}{\text{onc.}}$ avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac; je retirai par la distillation environ $\frac{3}{8}$ d'esprit volatil, & il se sublima à la voûte un Sel très-blanc qui avoit de l'odeur urineuse; comme il y en avoit cependant très-peu, je ne pus pas m'assurer s'il ne se trouvoit pas encore un peu de Sel ammoniac avec l'Alkali urineux: ce qui cependant m'a donné lieu de former ce doute, c'est la grande quantité de vapeurs blanches & ambrées qu'il répandit en y mêlant de l'huile de vitriol; M. Du-HAMEL pourtant qui avoit déjà fait cette expérience avec quelque changement dans les circonstances, dit que le peu de Sel qu'il en retira étoit de l'Alkali volatil; ce qui suffit pour tenir en suspend mon jugement sur une expérience que je n'ai pû répéter & qui doit être faite plus en grand. Je me contenterai pour le présent de faire remarquer que la tête-morte avoit été fonduë; sa couleur étoit d'un roux clair comme
font

font les briques avant d'avoir souffert l'action du feu; sa faveur étoit un peu douceâtre & avoit quelque peu d'astringent; elle attiroit l'humidité à-peu-près comme le Sel marin qu'on fait avec la craye, mais beaucoup moins que le Sel ammoniac fixe.

99. Ayant reconnu que dans toutes les décompositions du Sel ammoniac pour en tirer l'urineux volatil, il se fait un enlèvement d'une partie de l'intermède concrét; je me déterminai à reprendre mon travail de plus loin, en commençant par l'examen des effets qui arrivent au Sel ammoniac sans intermède par le feu différemment administré, & ensuite par ceux que présente la combinaison de ce Sel avec d'autres matières.

EXPÉRIENCE PREMIÈRE.

Distillation du Sel ammoniac à feu nud.

Sel ammoniac fluor.

100 **U**NE once $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau dans une cucurbite de terre, garnie d'un Chapiteau de verre, me donna à un feu d'abord assez vif $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{1}{8}$ de liqueur teinte un peu en jaune, foiblement salée & amère, développant sur la langue un goût lixiviel qui dégénoit en un goût urineux: son odeur étoit un peu empircumatique, elle donna des vapeurs blanches & épaisses en grande quantité avec l'huile de vitriol, s'échauffa & bouillonna considérablement; elle manifesta une forte odeur urineuse avec la Chaux-vive en quelque petite quantité que je l'eusse mise, pendant qu'il falloit beaucoup d'Alkali fixe pour lui faire développer foiblement cette odeur.

Il est clair que cette liqueur n'est (7) que du Sel ammoniac dissout dans beaucoup d'eau.

II.²

(7) Je voulus m'assurer si cette résolution en liqueur dépendoit de ce que le phlogistique eut abandonné cette partie du Sel pour s'unir plus intimement à la partie du Sel ammoniac qui ne passe pas en liqueur, ou si c'étoit seulement à cause de la surabondance de l'eau dont

ce Sel est chargé; j'en mis à cet effet $\frac{7}{8}$ avec $\frac{1}{8}$ de noir de su-

mée, & j'en fis la distillation au bain de sable. Il me vint premièrement une liqueur un peu opaque qui donnoit quelques fumées avec l'huile de vitriol, & ne donnoit d'autre odeur avec la Chaux & l'Alkali fixe que l'empireumatique qu'elle avoit naturellement; il se forma ensuite une petite quantité d'une substance blanche qui ressembloit assez à du Sel ammoniac & qui fut détruite par une huile jaune très-empireumatique qui s'éleva après & qui passa dans le récipient: comme j'ai fait cette opération au bain de sable, je n'ai pas pu pousser la tête-morte à un feu suffisant pour décider si après l'huile noire je n'obtiendrois pas du véritable Sel ammoniac: mais comme d'autre part l'Alkali volatil qui se trouve dans le noir de fumée pouvoit causer des altérations à ce produit, je crus inutile de pousser plus loin l'opération, d'autant plus que ces premiers résultats suffisoient pour me faire connoître que la surabondance d'eau est la cause principale de la liquidité du Sel ammoniac dans le procédé dont nous avons rendu compte; que ce Sel ammoniac fluor n'est cependant plus aussi chargé de matière phlogistique que lorsqu'il est sous la forme concrète; & cela me paroît d'autant plus sûr que les fleurs de Sel ammoniac qui se subliment, après que la liqueur est entièrement passée, sont d'une couleur jaune très-foncée, & les dernières même sont rouges.

Distillation du Sel ammoniac au bain de sable.

Fleurs de Sel ammoniac.

101. JE fis en même tems cette opération dans une cucurbite de verre au bain de sable, ayant pris la précaution de bien étendre le Sel ammoniac en lui faisant occuper tout le fond de la cucurbite, mais je ne retirai que 5 à 6 goûtes de liqueur laquelle étoit considérablement urineuse; le reste du Sel se sublima, n'étant resté au fond du vaisseau qu'un peu de matière noire; je remarquai cependant que cette sublimation peut être divisée en trois parties; la première qui se fait à un feu tout-à-fait modéré, & les fleurs en sont blanches; la seconde qui exige un plus grand degré de feu, & elle se fait principalement au parois de la cucurbite, y adhère fortement & paroît presque avoir souffert la fusion; la troisième qui n'a lieu qu'après un degré de chaleur beaucoup plus grand & long-tems continué; on obtient par celle-ci des fleurs d'un jaune très-foncé.

Nous déduisons de ces deux expériences. I.^o Que toutes les fois que le Sel ammoniac entre en fusion avant que de se sublimer, il doit passer pour la plus grande partie en liqueur.

2.^o Que la différence dans l'administration du feu, soit par rapport à sa vivacité & sa force absoluë, que relativement aux Vaisseaux dont on fait usage pour les opérations, apporte une différence totale dans les résultats.

III.^e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac, qui n'a pas passé en liqueur dans la première expérience, avec la Chaux-vive.

*Esprit volatil caustique ; Sel sublimé
très-blanc.*

102. **S**UR ce qui est resté dans la cucurbite de la première expérience §. 100. je mis environ deux onces de Chaux-vive, & après avoir lutté le Chapiteau & le récipient, j'en fis la distillation dont je retirai un peu plus de $\frac{3}{8}$ d'esprit très-pénétrant, & d'une couleur jaune avec quelques grains d'un sublimé très-blanc. La tête-morte avoit une saveur très-picquante, elle étoit d'une couleur rouffeâtre & avoit été fonduë.

103. Le résultat dont je viens de rendre compte, m'engagea à examiner si en enlevant seulement au Sel ammoniac une partie de l'eau qu'il rétient toujours en grande quantité, on peut parvenir à le décomposer, & sous quelle forme l'Alkali volatil se présente.

Nous remarquerons en attendant. 1.^o Que le Sel ammoniac, qui ne souffre aucune décomposition avec la Chaux-vive comme l'a très-bien observé le Savant M. Du-HAMEL, peut cependant être décomposé, au moins en partie, lorsqu'il est ainsi privé d'une grande partie de son eau. 2.^o Qu'on doit nécessairement convenir qu'il emporte des parties de l'intermède fixe ce qui confirme ce que j'ai dit dans les §§. précédents.

Distillation du Sel ammoniac légèrement calciné
avec la Chaux-vive.

*Esprit volatil caustique sublimé en
efflorescence sentant l'urineux.*

104. **S**UR cette idée je pris $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau, & l'ayant mis dans un creuset au feu, je le réduisis à $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ & le mêlai à $\frac{3}{\text{onc.}}$ de Chaux-vive que je fis encore dessécher à un feu violent, (aa) j'obtins par la distillation environ $\frac{6}{8}$ de liqueur d'une force extrêmement pénétrante & d'une couleur jaune semblable à celle que l'on retire par les substances métalliques. On voyoit au surplus dans la cucurbite & dans le Chapiteau une espèce d'efflorescence terne & acide qui sentoit un peu l'urineux en la passant entre les doigts. La tête-morte pesoit $\frac{3}{\text{onc.}}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{24}{\text{gr.}}$, elle étoit spongieuse paroissant comme criblée, rousseâtre, très-picquante attirant beaucoup l'humidité, elle sembloit au reste avoir été fonduë de même que la cucurbite. (*)

q 2.

V.^E

- (aa) Quoique la Chaux n'eut pas encore attiré l'humidité de l'air, & que j'eusse eü la précaution de choisir une grosse masse dont j'avois ôtée une couche assez considérable. Je crus devoir lui faire essuyer cette opération pour être toujours plus assuré du fait.
- (*) Cette expérience découle naturellement de la précédente & lui sert de confirmation.

V.^e EXPÉRIENCE.

Répétition de la précédente avec du Sel ammoniac privé d'une plus grande quantité d'eau.

105. **C**ette singulière décomposition me porta à chercher, si en calcinant davantage le Sel ammoniac, je pourrois obtenir du Sel volatil au lieu d'esprit.

Je réduisis à cet effet $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{1}{2}$ de ce Sel à $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{1}{8} \frac{1}{2}$, je le mêlai avec trois onces de Chaux-vive qui avoit été exposée à un grand feu pendant plus d'une heure; j'obtins par la distillation de ce mélange près de $\frac{4}{8}$ d'esprit urineux très-pénétrant & d'une couleur jaune comme le précédent avec des taches blanches comme celles dont j'ai parlé précédemment; & quoiqu'elles fussent en plus grande quantité, je n'en pus pas recueillir assez pour les examiner.

VI.^e EXPÉRIENCE.

Addition de l'eau enlevée au Sel ammoniac par la calcination.

Esprit volatil.

106. **J**E voulus au reste voir si en rendant à la tête-morte & à cette substance blanche la quantité d'eau à-peu-près que j'avois enlevée au Sel ammoniac, je retirerois encore une quantité considérable d'esprit volatil, ou au moins toute l'eau que j'ajoutois, & comme je ne doûtois pas qu'il ne se fut dissipé de l'Alkali volatil & de l'acide marin dans la calcination, j'ai crû
ne

ne devoir employer qu'une plus petite quantité d'eau, c'est pourquoi je n'en mis que $\frac{2}{8}$, & après avoir scellé avec soin les vaisseaux, j'en fis la distillation en commençant par un feu doux & le poussant sur la fin jusqu'à faire fondre la partie inférieure de la cucurbite, mais je ne retirai plus qu' $\frac{1}{8}$ d'esprit.

Voici un résultat tout-à-fait singulier; nous avons observé §. 102. que la quantité d'esprit dans cette expérience étoit un peu plus grande que celle du Sel ammoniac qui restoit dans la tête-morte de l'expérience §. 100., & qu'au surplus il se sublima quelques grains d'une matière blanche; nous voyons par celle-ci que bien loin d'excéder la quantité d'eau nouvellement ajoutée, nous n'en avons pu retirer que la moitié; mais il est bon d'observer que malgré que le fond de ma cucurbite ait été fondu, le degré de feu néanmoins n'aura pas été aussi considérable que celui qu'a souffert l'autre cucurbite qui étoit de terre, & à feu nud.

Quant à l'augmentation du poids, elle doit être attribuée aux parties de Chaux qui ont été enlevées dans l'opération ce qui ne paroît pas avoir besoin de plus grande démonstration, les résultats des expériences dont j'ai rendu compte ci-devant me paroissant plus que suffisantes pour nous convaincre de cette vérité.

VII.^E EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac avec le Sel ammoniac fixe.

Esprit volatil sublimé très-blanc.

107. JE fus curieux d'observer ce que le Sel ammoniac fixe donneroit avec du nouveau Sel ammoniac.

Je mêlai à cette fin $\frac{4}{\text{onc.}} \frac{1}{2}$ du Sel ammoniac fixe résultant des expériences 104. & 105 avec $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{1}{2}$ de Sel ammoniac sans être privé d'eau, & j'obtins environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ d'esprit urineux $\frac{1}{8}$ d'un sublimé très-blanc, & $\frac{16}{\text{gr.}}$ d'une matière de même sublimée qui étoit extrêmement grasse & qui adhéroit très-fort au verre, l'ayant détachée avec un pinceau, elle étoit d'un gris cendré; étant brûlée sur du papier à la chandelle, elle donna un couleur verte à la flamme; son goût étoit très-salé, & très-picquant sur la langue, moins cependant que celle du sublimé blanc qui communiquoit de même la couleur verte à la flamme.

La tête-morte pesoit $\frac{4}{\text{onc.}}$ & un peu plus de $\frac{4}{8}$ elle attiroit très-fort l'humidité, sa couleur étoit rouffâtre, sa faveur étoit (bb) brûlante, sa texture enfin friable entre les doigts; son poids ne fut pas considérablement augmenté.

108. Mon plan étant celui de rapprocher les différens phénomènes que présentent les décompositions du Sel ammoniac faites par différens intermédiaires, je ne saurois négliger

(bb) Cette substance me paroît devoir être mise au nombre des caustiques plus puissants.

giger de rendre compte de ce que j'ai observé de plus remarquable dans la répétition que j'ai faite des opérations d'ailleurs très-connuës.

VIII.^E E X P É R I E N C E.

Distillation du Sel ammoniac avec la grenaille de plomb.

Esprit volatil caustique.

Plomb corné.

J'E pris $\frac{2}{\text{onc.}}$ de plomb grenailé que je mis dans une cucurbite de verre avec $\frac{6}{8}$ de Sel ammoniac: le feu fut administré dans le commencement avec beaucoup de précaution, pour que le Sel ammoniac ne se sublimate point, & fut poussé sur la fin avec beaucoup de vivacité, de manière que le fond de la cucurbite s'étoit presque fondu.

Il passa dans le récipient un esprit jaune dès-plus pénétrants & dont la force étoit encore augmentée par l'addition du Sel de tartre, ce qui me fit conjecturer qu'il étoit passé un peu de Sel ammoniac fluor avec l'esprit urinaire; j'en fus d'autant plus convaincu que cet esprit faisoit une violente effervescence & s'échauffoit très-fort pas le mélange de l'huile de vitriol, répandant dans ce tems beaucoup de vapeurs blanches qui avoient une forte odeur d'esprit de Sel; il se sublimate ensuite des fleurs de Sel ammoniac d'un jaune foncé qui contenoient un peu de plomb: les deux tiers environ de la tête-morte étoient convertis en plomb corné, & ce plomb corné en occupoit la partie supérieure, & adhéroit comme des scories à la partie inférieure qui étoit formée par le plomb qui avoit été fondu & que l'acide n'avoit point attaquée.

IX.^e EXPÉRIENCE.

Distillation du Sel ammoniac avec le plomb
& la Chaux-vive.

Esprit volatil caustique.

109. **D**E la distillation d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de plomb avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Chaux-vive, & $\frac{9}{8}$ de Sel ammoniac je retirai de même un esprit caustique très-pénétrant & d'une couleur jaune; cet esprit faisoit effervescence avec l'huile de vitriol & ressembloit parfaitement en tout au précédent. La tête-morte cependant parut m'offrir quelque différence. 1.^o En ce que le plomb étoit presque tout converti en plomb corné. 2.^o Que la Chaux sembloit n'avoir pas souffert de changemens sensibles; pour m'en assurer d'avantage, j'en séparai une partie au moien d'un tamis fort ferré; je la mis dans un creuset au feu, & je ne remarquai aucune des vapeurs que le Sel ammoniac fixe donne abondamment dans cette opération; après cela il me parut qu'elle n'attiroit pas l'humidité de l'air avec plus de force que ne fait la Chaux-vive commune, & bouillonna, ou du moins faisoit un sifflement en entrant dans l'eau.

Les différences remarquables qui sont entre la tête-morte de l'expérience précédente & de celle-ci, me font conjecturer qu'il faut que l'acide marin soit délayé dans beaucoup d'eau pour attaquer le plomb, & que c'est pour (cc) cette

(cc) Je ne prétends pas que cette seule cause facilite la dissolution du plomb j'ai même raison de penser que cet effet n'a pas lieu lorsqu'elle est toute seule, mais que dans le cas où il se trouve de l'Alkali volatil combiné à cet acide, ce mélange exerce son action sur le plomb, tant que ces deux substances ne sont point dans un certain degré de concentration,

cette raison que dans l'expérience précédente il n'y a eût qu'une partie du plomb convertie en plomb corné, pendant qu'outre à du Sel ammoniac fluor il s'est encore élevé une quantité considérable de fleurs de Sel ammoniac ; ces deux effets n'ayant lieu probablement que lorsque l'acide & l'Alkali volatil sont dans leur plus grand degré de concentration.

2.^o Que la Chaux sert à retenir une partie de l'acide du Sel ammoniac qui s'échapperoit dans le commencement de l'opération avec l'Alkali volatil.

3.^o Que l'acide marin affoibli par beaucoup d'eau a plus d'affinité avec le plomb qu'avec la Chaux (*dd*).

Miscel. Tom. III.

r

X.^E

(*dd*) Cette opération a fait le sujet d'une grande question entre les Célébres *M. Geoffroy, & Neumann*. Ce dernier ayant remarqué que le Chimiste François avoit placé les substances métalliques, au dessous des Sels, comme ayant un moindre rapport avec les acides, dans la table des affinités, lui fit observer que cette règle souffroit des exceptions, en lui donnant pour exemple la décomposition du Sel ammoniac par les substances métalliques ; mais *M. Geoffroy* n'attribuant cette décomposition qu'à l'altération considérable que ces substances souffrent en passant à l'état de Chaux, faisoit rentrer cette exception dans la loi générale, en supposant que les Chaux métalliques contiennent quelque peu d'Alkali fixe qui se développe, ou qui se forme dans la calcination. *M. Neumann* répondit que si cela eut été vrai, on n'auroit pas dû obtenir de l'esprit urinaire par le minium bien lavé dans de l'eau bouillante & desséché, comme l'on l'obtenoit de même en l'employant sans aucune préparation, & pour couper court à toute sorte de dispute, il lui fit voir qu'on pouvoit substituer avec un égal succès le plomb granulé, & sous la forme métallique ; je ne sache pas que *M. Geoffroy* ait répondu de puis au Savant Chimiste du Roy de Prusse, la preuve étant sans réplique, mais si cet Illustre Physicien eut cherché à s'éclaircir plus particulièrement sur cette exception en examinant avec soin les produits qu'on obtient par ces opérations, il eut sans doute vu qu'elle n'avoit lieu que dans le cas particulier de l'acide du Sel ammoniac, qui non seulement est très-foible, mais qui se trouve associé à une grande quantité de matière phlogistique ; ce qui, peut-être, ne contribua pas peu à la désunion qui se fait de cet acide d'avec l'Alkali volatil, & tout au moins auroit-il reconnu que la table qu'il a dressée ne pouvoit pas être exactement vraie dans tous les

Distillation du Sel ammoniac avec le plomb,
& le Sel de tartre.

Esprit urineux.

Sel volatil.

110. **C**omme le Sel ammoniac décomposé par le plomb ne donne que de l'esprit urineux, & que d'autre part les Alkalis fixes donnent très-peu d'esprit, & beaucoup de Sel volatil; je me proposai d'observer les résultats qui me viendroient de la combinaison du plomb avec du Sel de potasse, & je crus en même tems de pouvoir m'assurer, si dans cette opération l'acide marin attaque par préférence l'Alkali fixe comme il seroit assez naturel: pour n'avoir rien à me reprocher, je crus devoir employer une quantité de Sel ammoniac capable seulement de saturer une quantité donnée de plomb dans la décomposition qu'il souffriroit; c'est pour cette raison que je distillai une once de Sel ammoniac sur $\frac{3}{\text{onc.}}$ de plomb, & $\frac{3}{\text{onc.}}$ de Sel de potasse.

Je

les cas, & qu'il auroit dû en former deux, comme le remarque fort-bien *M. Baumé*, savoir une qui exprima tous les rapports des substances dans les opérations qui se font par la voye humide, & une autre dans laquelle fussent marqués les rapports en opérant par la voye sèche; ou pour m'exprimer d'une manière plus générale une table qui désigna le plus ou le moins d'aptitude que les substances ont à s'unir, suivant que par la combinaison des principes secondaires, le nouveau composé approche plus ou moins du rapport des élémens ou des véritables principes qui constituent des composés plus ou moins aisés à être détruits. La Chimie ne seroit plus alors une science purement expérimentale, elle pourroit fort-bien être sujette au calcul avec autant d'exactitude que le sont les sciences physico-mécaniques, l'astronomie &c.

Je dois cependant avertir que faite de plomb granulé, j'employai de petites lames minces, & que le Sel de potasse n'étoit pas bien pur, deux circonstances qui certainement pourroient causer des variations, & c'est pour cela que j'en avertis.

Je retirai $\frac{1}{8}$ $\frac{15}{gr.}$ d'esprit volatil très-limpide qui faisoit une violente effervescence avec l'huile de vitriol, & répandoit des fumées blanches & épaisses; rougissoit un peu le papier bleu pendant qu'il étoit humide, & qu'il devenoit blanc en se désséchant; cet esprit contenoit $\frac{54}{gr.}$ d'un Sel volatil cristallisé en aiguilles très-déliées. Une partie du Sel ammoniac se sublima, & il en resta une petite quantité en forme d'efflorescence sur la tête-morte, laquelle étoit d'une couleur brune parsemée de points d'une très-belle couleur bleüe comme l'azur de Berlin, une partie du plomb paroissoit réduite en litharge, le reste étoit fondu avec toute la masse, & présentoit différentes couleurs dans la partie inférieure qui étoit tout-à-fait adhérente au verre, & sembloit ne faire qu'un tout avec lui; je me déterminai sur cela à remettre dans la cucurbite tout le Sel ammoniac qui n'avoit point été décomposé avec $\frac{3}{onc.}$ $\frac{1}{2}$ d'eau commune sur la tête-morte, & à faire ainsi une nouvelle distillation; je retirai par ce moyen $\frac{2}{onc.}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ d'esprit de Sel ammoniac un peu plus foible que le précédent, mais il ne se fit point de Sel volatil, ce qui d'ailleurs est assez naturel, vû que la quantité d'eau nouvellement ajoutée n'a passé qu'en partie dans le récipient, le reste ayant été absorbé & retenu par la tête-morte, laquelle, de brune qu'elle étoit, passa à un blanc éclatant, sa saveur étoit salée & amère

comme l'est ordinairement le Sel fébrifuge; la partie du plomb qui touchoit le fond de la cucurbite n'a souffert d'autre altération que la fusion, & une petite partie de celui qui étoit mêlé à l'Alkali fixe vers la surface supérieure avoit changé légèrement sa couleur, le reste ne paroissoit avoir souffert aucun changement, & n'étoit pas même entré en fusion.

XI.^e E X P É R I E N C E.

Distillation du Sel ammoniac avec la Chaux de cuivre; ou avec le fer.

Esprit volatil.

Ens veneris.

ou

Ens Martis.

III. **L**A distillation d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac avec $\frac{4}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de vitriol de cuivre bien calciné m'a aussi donné un esprit urineux jaune très-pénétrant & caustique; des fleurs de Sel ammoniac teintes en jaune, & un peu en verd lorsque j'employois du Sel ammoniac impur au lieu de fleurs. La tête-morte étoit une matière rousse, un peu déliquescence & d'un goût stiptique. La limaille de fer rouillée ou non me donna à-peu près les mêmes résultats, la tête-morte seulement me parut différer considérablement, en ce qu'elle contenoit plus d'acide, son goût étoit beaucoup plus âpre, se gonflait davan-

davantage & se résolvoit entièrement en une liqueur épaisse & jaunâtre.

L'esprit urineux qu'on retire par l'intermède des Chaux ou des substances métalliques sous leur forme naturelle donne toujours des marques assurées de la présence de l'acide marin, quelque soit le rapport qu'on ait observé entre le Sel ammoniac & l'intermède; il en est de même de l'opération du Sel ammoniac privé d'une partie de son eau, avec la Chaux, ce qui prouve que la décomposition n'est pas complète.

112. Si nous réfléchissons maintenant sur toutes ces différentes décompositions & sur les circonstances qui les accompagnent, nous remarquerons que pour qu'elles puissent avoir lieu, il est nécessaire qu'il se dissipe une plus ou moins grande quantité de l'eau du Sel ammoniac, & que c'est pendant cette évaporation qu'elles arrivent.

Or il m'a paru avoir observé trois cas différens, savoir, le premier dans lequel est comprise la décomposition par les Alkalis fixes, & tous les intermèdes qui donnent très-peu d'esprit & beaucoup de Sel; les composés qui restent dans le fond du vaisseau sont des Sels qui retiennent à-peu-près autant d'eau que le Sel ammoniac, & la retiennent même avec plus de force.

Le second dans lequel doivent être comprises les Chaux & les substances métalliques sous leur forme naturelle; il demeure dans le fond des Vaisseaux des Sels qui attirent beaucoup l'humidité, mais qui la lâchent avec plus de facilité que les précédents.

Le troisième regarde la Chaux combinée avec le Sel ammoniac dans des circonstances différentes, savoir la Chaux-vive & le Sel ammoniac calciné, dont les résultats sont les mêmes que ceux des substances métalliques; la Chaux-vive & le Sel ammoniac avec toute son eau dont on ne retire aucun produit, excepté le phosphore

D' HOMBERG ; la Chaux éteinte & le Sel ammoniac fans être calciné ; la crème & l'eau de Chaux évaporée à siccité avec du Sel ammoniac contenant toute son eau.

De toutes ces combinaisons de la Chaux on a pour résidu un Sel ammoniac fixe à la vérité , mais qui diffère dans chaque opération par le plus ou moins d'eau qu'ils attirent ; cependant en général ces composés peuvent en être privés aisément par l'action d'un feu plus modérée que tous les précédents , & c'est selon moi , de cette force plus ou moins grande de ces nouveaux composés à retenir l'eau , que dépend la décomposition en esprit ou en Sel volatil ; mais comme les Sels volatils emportent avec eux une plus grande quantité de parties concrètes de l'intermède , il est naturel de penser que du moment que l'acide marin est dans le degré de concentration nécessaire pour former avec une partie de l'intermède un nouveau Sel de nature fixe , l'Alkali volatil se combine par le moyen de l'acide plus délayé , & dont l'eau surabondante ne sauroit être entièrement enlevée , avec les parties de l'intermède qui reste , & forme le Sel volatil concret : la Chaux étant en effet une substance dont les parties quoique d'une nature différente , ainsi que le pensoit le célèbre M. HOFFMANN , & que nous avons eû occasion de le constater , retient cependant ces parties avec une force que le feu ne fait qu' (ee) augmenter & que l'eau seule est capable de détruire : il est clair que plus la Chaux sera vive , moins l'eau contenuë dans le Sel ammoniac , quoique surabondante , pourra opérer cette désunion réciproque qui ne me paroît consister qu'en ce que l'eau dégage la partie volatile de la Chaux , qui ayant attaqué la partie phlogistique du Sel ammoniac , facilite d'autant

(ee) Nous aurons occasion de voir la raison de cette fixité de la partie volatile de la Chaux , & d'où lui vient cette dernière propriété.

d'autant plus la désunion entre le Sel volatil & l'acide marin, que cet acide affoibli par beaucoup d'eau paroît avoir plus d'affinité avec la Chaux qu'avec l'Alkali volatil, comme nous le ferons remarquer par la suite; d'où il suit que pendant que la Chaux est dans son état naturel, c'est-à-dire, que ces principes ne sont pas désunis par l'eau, elle peut bien former un corps surcomposé, en s'unissant au Sel ammoniac avec beaucoup de force, mais elle n'en peut pas procurer la décomposition.

XII.^e E X P É R I E N C E.

Distillation du Sel ammoniac dissout dans l'eau de Chaux.

Sel ammoniac fluor.

Esprit de Sel.

Sels ammoniacaux.

113. **P**our ce qui est de l'enlèvement de la partie inflammable des Alkalis volatils par la partie de la Chaux qui se volatilise, elle me paroît très-probable par ce que j'ai fait observer §. 97. où je rendis compte d'une double décomposition qui se fait par un tour de main particulier, & qui ne me paroît pas possible sans le secours du phlogistique qui diminue la force d'union que l'acide vitriolique a contractée avec la partie terreuse, & cela paroît d'autant plus probable, que c'est en faveur du feu, que cette opération se fait (*ff*); car d'ailleurs la crème de Chaux ne procure point d'esprit volatil

(*ff*) Cette opération dont j'ai parlé §. 97. a quelque chose d'analogue à celle du Soufre artificiel.

il non plus que l'eau de Chaux, comme je m'en suis assuré en distillant $\frac{2}{\text{onc.}} \frac{2}{8}$ de Sel ammoniac dissous dans $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{2}{8} \frac{1}{2}$ d'eau de Chaux, qui contenoit beaucoup de crème de Chaux, & comme ce mélange étoit trop liquide, j'y ajoutai encore environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ de terre vitrifiable, mais les $\frac{7}{8} \frac{1}{2}$ environ de la première liqueur que j'obtins n'étoient que du Sel ammoniac fluor très-limpide au fond de laquelle étoit un peu de liqueur très-jaune qui ressembloit assez à de l'huile figée, & qui, en se mêlant par l'agitation avec l'autre, donnoit une grande quantité de bulles d'air (gg).

114. Par toutes les expériences que j'ai faites, je crois pouvoir conclure que celles d'entre les décompositions qui méritent ce nom par excellence, sont celles qui se font par le moïen de la Chaux éteinte, & de l'huile de tartre, celle de l'Alkali fixe concret ne donnant qu'un Sel volatil surchargé de parties hétérogènes, de même que les crayes & les autres terres absorbantes : pour celles
qui

(gg) La seconde liqueur qui passa dans le récipient étoit du véritable esprit de Sel fumant, elle pésoit environ $\frac{46}{\text{gr.}}$ ce qui prouve que l'eau de

Chaux contient un véritable acide vitriolique, le reste du Sel ammoniac se sublima en fleurs jaunes, parmi lesquelles il s'en trouvoit une petite quantité qui étoit d'un beau rouge, & que je me doutai être du Sel ammoniacal secret de Glauber. La seconde liqueur mêlée à la première servit de dissolvant à celle qui étoit au fond du matras, & toute la liqueur prit ainsi une couleur violette; je ne dois cependant pas laisser ignorer que les pierres à fusil que j'avois calcinées & dont je fis usage contenoient vraisemblablement un peu de parties férugineuses dont je cherchai à les délivrer par un peu d'esprit de vitriol, & par des édulcorations répétées, j'en enlevai l'acide.

qui se font avec les substances métalliques, elles sont très-imp parfaites (*hh*).

115. Nous avons observé que le Sel ammoniac fluor exige beaucoup d'Alkali fixe pour développer son odeur urineuse §. 100., pendant que très-peu de Chaux produit cet effet, cela me paroît prouver que l'acide marin étendu dans beaucoup d'eau a plus d'affinité avec la Chaux qu'avec l'Alkali volatil, & qu'il en a davantage dans cette circonstance avec celui-ci qu'avec l'Alkali fixe.

116. Nous avons aussi remarqué §. 101. & nous l'avons répété ci-devant que le Sel ammoniac avant de se sublimer en fleurs donne un peu de liqueur urineuse, ce qui semble nous faire voir que l'acide marin s'unit à une plus grande quantité d'Alkali volatil lorsqu'il est foible, que lorsqu'il est concentré.

XIII.^e E X P É R I E N C E .

Distillation du Sel ammoniac fluor avec l'Alkali fixe.

Sel ammoniac fluor.

117. **P**our m'assurer si l'acide marin délayé dans beaucoup d'eau avoit plus d'affinité à l'Alkali volatil qu'à l'Alkali fixe, je pris $\frac{4}{\text{onc.}} \frac{36}{\text{gr.}}$ de Sel ammoniac fluor, & j'y mis autant de Sel de potasse qu'il en fallut
Miscel. Tom. III. f pour

(*hh*) Une marque certaine que la décomposition du Sel ammoniac n'est pas complète & dont on peut juger par la seule inspection, c'est la couleur jaune qui est toujours plus foncée à mesure qu'elle contient plus de Sel ammoniac fluor, & ce qui sert à le prouver, c'est la facilité avec laquelle on peut l'enlever par l'addition d'un Alkali fixe ou de la Chaux.

pour lui faire développer l'odeur urineuse, ce qui monta à $\frac{2}{\text{onc.}}$, mais avant que l'Alkali fixe eut absorbé toute la liqueur, ce qui je cherchois à faciliter par l'agitation du mélange, il ne s'élevoit plus d'odeur urineuse; après avoir lutté avec soin le Chapiteau & le récipient, j'en fis la distillation au bain de sable, & la liqueur qui passa pesoit environ 12 à 15 grains de plus que ne pesoit le Sel ammoniac fluor, & la tête-morte par conséquent pesoit ces grains de moins, ce qui m'a fait voir que la liqueur avoit emporté un peu d'Alkali fixe; elle étoit de même couleur qu'auparavant, & n'avoit point d'odeur urineuse sensible, mais elle la développoit par l'addition de la Chaux.

XIV.^B E X P É R I E N C E.

Distillation à feu nud du caput mortuum
de l'expérience précédente.

Sel sublimé.

118. **C**omme j'avois fait cette distillation dans une cucurbitate de verre, j'en pris la tête-morte, & ayant reconnu qu'elle contenoit de l'acide marin, malgré que la liqueur dont nous avons parlé ne sentit pas l'urineux, je me proposai de voir si par la force du feu je pouvois détacher cet acide, pour examiner ensuite si par ces différentes opérations il avoit souffert quelque chan-

J'ai remarqué qu'elles ne sont jamais parfaites, & qu'il arrive toujours de deux choses l'une, savoir ou du Sel ammoniac sublimé, ou de l'intermède non décomposé: la première a lieu toutes les fois qu'on emploie une trop grande quantité de Sel ammoniac, & la seconde lorsque cette quantité est trop petite.

changement ; je fis donc piler $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{7}{8} \frac{50}{\text{gr.}}$ de cette tête-morte , je la mis dans une cucurbite de terre à creufet avec environ $\frac{1}{8}$ d'eau diftillée , & j'en retirai premièrement $\frac{1}{8} \frac{25}{\text{gr.}}$ d'une liqueur plus foible mais de même nature que la première , $\frac{1}{8}$ d'un Sel fublimé à la voûte de la cornuë , & la tête-morte qui s'étoit réduite à $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{5}{8}$

$\frac{25}{\text{gr.}}$ avoit prife une couleur bleuâtre : j'examinai la liqueur & le Sel , l'un & l'autre donnerent beaucoup de vapeurs blanches avec l'huile de vitriol , développerent une odeur urineufe affez forte avec la Chaux vive , ils paroiffoient cependant avoir du goût du Sel marin , mais le Sel loin de décrépiter fur une lame de fer rougie , fe diffoit en fumée , ce qui me fit juger que c'étoit du véritable Sel ammoniac.

119. Cette expérience me fit reflouvenir que j'avois obtenu le même effet une autre fois que j'avois voulu faire du Sel volatil , & que le vaiffeau ayant caffé par un coup de feu après que l'opération étoit déjà fort avancée , j'ai entonné le fond de ma cornuë dans une cucurbite de terre , & j'en retirai par ce moïen du Sel fublimé comme celui dont je viens de parler , favoir fans odeur urineufe , fentant feulement un peu l'empireume.

120. En réfléchiſſant fur les circonſtances des décompoſitions du Sel ammoniac pour en retirer le Sel volatil & peut-être l'eſprit , il me paroît d'entrevoir qu'il en eſt de ces ſublimations comme des précipitations , c'eſt-à-dire que la partie volatile enleve un peu de l'intermède fixe,

pendant que l'intermède retient aussi quelque peu de la partie volatile.

Seroit-ce une loy générale des volatilisations?

Dépendroit-elle de ce que par des nouvelles combinaisons une partie des substances fixes devint volatile, & une partie de celles qui sont volatiles prit le caractère de fixité?

Ou seroit-ce enfin que toutes les substances continssent ces parties d'une manière distincte?

La seconde de ces propositions peut fort bien être la véritable, mais comme il sera toujours nécessaire de quelques tours de mains pour les défunir & les faire paroître chacune dans son état naturel, il me semble que la première est la plus générale & la plus conforme à l'expérience; car nous voyons qu'il est très-possible de faire prendre un caractère de fixité en entier à une substance volatile par des procédés très-connus, de même qu'on peut volatiliser des substances très-fixes. Il est vrai cependant que dans plusieurs substances il se trouve des parties plus ou moins doiüées de ces propriétés.

XV.^E E X P É R I E N C E.

Distillation de l'esprit volatil avec le noir de fumée.

Esprit urineux empireumatique.

121. **J**E tentai encore inutilement d'obtenir du Sel volatil, ou plutôt de convertir en Sel l'esprit urineux en combinant $\frac{2}{\text{onc.}} \frac{1}{2}$ de noir de fumée avec $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{1}{2}$ d'esprit volatil fait avec la Chaux, mais je ne retirai qu'une liqueur urineuse grasse un peu empireumatique; la surface de la tête-morte étoit de la couleur du verdet, je

je crus néanmoins devoir soumettre la tête-morte à une chaleur plus forte, je la mis pour cela dans une cucurbite de terre, & après avoir retiré une liqueur très-limpide, d'un goût salé un peu empireumatique qui développoit une odeur fort agréable par le Sel de tartre & la Chaux qui faisoit effervescence avec l'huile de vitriol sans répandre des fumées, il se sublima environ $\frac{36}{gr.}$ de véritable Sel ammoniac altéré par une odeur très-empireumatique.

XVI.^E E X P É R I E N C E.

Distillation d'une dissolution de Sel ammoniac avec la tête-morte d'un Sel vitriolique calcaire qui avoit servi à une distillation d'urine putréfiée.

Esprit urincux.

Sel ammoniac sublimé.

122. **J**E ne me dispenserai pas de rendre compte d'une expérience que j'ai faite pour obtenir du Sel volatil en employant de la Chaux que j'avois chargée d'acide vitriolique après qu'elle avoit servi à retirer le phlegme d'une quantité d'urine putréfiée, & qui étant ainsi combinée avec beaucoup d'huile de vitriol, me donna une quantité considérable d'esprit urincux très-pénétrant accompagné cependant d'une odeur un peu fœtide, cet esprit bouillonoit. (ii) considérablement avec l'huile de vitriol

(ii) Cette combinaison est à-peu-près celle dont parle *M. Vallerius* dans un Mémoire sur le nitre artificiel, & par laquelle il dit que le Docteur *Piesch*, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin, a fait

vitriol, jettoit des vapeurs blanches & épaisses, manifestoit un mouvement d'effervescence avec le Sel de tartre : d'où il suit incontestablement que cet esprit d'urine tenoit du véritable Sel ammoniac en dissolution : c'est donc du caput mortuum qui resta dans cette opération que je me suis servi ; c'étoit une substance d'une surface unie, & ayant des crevasses comme la Chaux éteinte, desséchée, d'un grain tout-à-fait fin, d'une légèreté surprenante ; elle étoit blanche dans sa partie supérieure, un peu bleuâtre dans le centre, d'un goût fade, ne s'humectant point à l'air : je mêlai $\frac{6}{\text{onc.}} \frac{4}{8}$ de cette tête-morte avec $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac & environ $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{2}{8}$ d'eau distillée dans une cucurbite de terre, & j'en retirai $\frac{3}{\text{onc.}} \frac{36}{\text{gr.}}$ environ d'une esprit urineux assez fort, $\frac{3}{8}$ d'un Sel sublimé à la voûte, & la tête-morte dont la couleur bleuë étoit considérablement augmentée pesoit environ $\frac{6}{\text{onc.}} \frac{3}{8}$; ayant examiné le Sel sublimé à la voûte, je trouvai que c'étoit du Sel ammoniac.

123. Cette expérience sert à nous faire voir combien il est difficile d'enlever l'acide vitriolique à la Chaux, de même que le phlogistique dont elle se charge avec tant d'avidité, & confirme en même-tems ce que nous avons dit

fait du nitre artificiel ; je n'ai pas encore eû le tems de m'assurer si je pouvois retirer de ce Sel, mais je puis avancer que cette tête-morte fait une grande effervescence avec l'huile de vitriol & manifeste l'odeur insupportable de l'esprit de nitre, en répandant dans cette occasion une grande quantité de fumées dont je ne pus pas distinguer assez bien la couleur ; il ne me fut cependant pas possible de retirer du salpêtre par la dissolution, la filtration & l'évaporation de cette tête-morte.

dit §. 112. favoir que le Sel féféenique enleve la partie phlogiftique du Sel ammoniac & facilite par-là fa dé-compoftion ; & quoique le Sel fublímé ait donné des marques de Sel ammoniac de même que la liqueur ; ces fignes cependant ont été beaucoup plus foibles que ceux que donnent les fleurs de ce Sel ou le Sel fluor , d'ailleurs la diminution de poids de la tête-morte nous prouve affez qu'il s'en eft volatilité une partie, & il eft probable qu'elle foit de la nature de la partie volatile qui fe dégage de la Chaux par le moïen de l'eau, c'est-à-dire que ce foit un fel féféenique. Il eft bon d'avertir auffi que dans l'efprit d'urine dont nous avons parlé ci-devant, l'on voyoit des petits corps précipités au fond de la liqueur, & d'autres qui y nageoient ; or il eft probable que ce n'étoit que de ce Sel féféenique.

XVII.^E E X P É R I E N C E

Séparation du Sel volatil d'avec l'eau qui le tient en diffolution au moïen du Sel ammoniac.

124. **P**Our ne rien négliger de tout ce qui me paroiffoit pouvoir contribuer à la formation d'un Sel volatil urineux par le moïen de la Chaux, je voulus éffayer fi la méthode que propofe l'Illuftre M. LEMERY m'en fourniroit effectivement, & pour faciliter l'opération, j'ai diffous deux parties de Sel ammoniac en gâteau qui comme on fait contient beaucoup plus de parties inflammables que les fleurs, dans trois parties d'efprit de Sel ammoniac, & je retirai fur $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{5}{8}$ d'efprit volatil & $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac une quantité affez confidérable de très-beau Sel volatil cristallin, mais dont il me ne fur pas possible

possible de savoir le poids, parceque la liqueur ayant bouilli dans le fond des matras le détruisit dans peu de minutes; je l'avois cependant reconnu quelque tems avant cet accident, & son odeur étoit beaucoup plus pénétrante que n'est celle du Sel volatil fait avec l'Alkali fixe ou la craye.

XVIII.² E X P É R I E N C E.

Séparation du Sel volatil d' avec l'eau qui le tient en dissolution.

125. **C**E résultat me fit esperer d'obtenir du Sel volatil avec le seul esprit de Sel ammoniac, comme l'avance, ainsi que je l'ai dit, le Savant M. LEMERY, je mis pour cela $\frac{1}{\text{onc.}} \frac{6}{8} \frac{1}{2}$ d'esprit de Sel ammoniac fait avec la Chaux dans un matras à long col garni de son Chapiteau, & comme j'avois observé qu'il est indispensable pour réussir de ne donner qu'un petit degré de chaleur afin que l'eau ne puisse en s'évaporant détruire la formation du Sel volatil, je crus devoir employer un bain-marie en prenant la précaution de ne jamais laisser bouillir l'eau en la tenant toujours entre 60. & 65 degrés de chaleur au thermomètre selon la production de M. RAUMUR.

Il se fit effectivement du Sel volatil par ce moïen, mais ce Sel n'étoit pas si beau ni si volatil que le précédent; d'ailleurs il se détruit avec beaucoup de facilité, sa couleur est un peu terne, & l'opération est dès-plus laborieuses (kk).

126.

(kk) Cette opération, toute pénible qu'elle est, ne laisse pas d'être fort intéressante par les singularités qu'elle fournit, je tirai, avant toutes

126. Ces expériences nous apprennent plusieurs vérités, & servent à confirmer ce que j'ai avancé §. 112. que la forme concrète ou liquide que prend le Sel volatil, ne dépend pas seulement de la quantité de l'intermède concrét qu'il enleve avec lui dans cette opération, mais principalement de la force avec laquelle le nouveau Sel fixe qui résulte & qui reste dans le fond du vaisseau retient l'eau qui lui est nécessaire.

127. Nous déduirons encore qu'en employant de la Chaux-vive avec une suffisante quantité d'eau pour l'éteindre & pour opérer par la décomposition du Sel ammoniac, la chaleur étant assez grande pour résoudre en vapeurs l'humidité surabondante au Sel ammoniac fixe, il n'est pas étonnant que dès le commencement de l'opération où il n'est pas même nécessaire d'employer le feu, cette décomposition ne se fasse qu'en esprit.

Miscel. Tom. III.

t

128.

tes choses, que je retirai par ce moyen environ trois gros de Sel volatil très-dur qui est sans contredit plus pénétrant que celui qu'on retire par d'autres méthodes.

Ce qu'il y a de plus singulier c'est qu'au dessous de 50. & à 70. il se détruit, & qu'il ne se forme qu'entre ces limites; outre cela pendant que le Sel se forme dans le col du matras on voit des vapeurs dans le Chapiteau, ce qui prouve que ce Sel est moins volatil que l'eau, apparemment à cause des parties de Chaux aux quelles il s'est associé, & ce qui me paroît servir de plus forte preuve à cela, c'est qu'il se dissout à un degré inférieur que celui au quel se forme le Sel; de manière que par cette chaleur il s'évapore une plus grande quantité d'eau qu'il ne s'élève de Sel volatil pour former des cristaux avec elle; quant au degré supérieur, il est clair que cette proportion sera encore moins conservée, puis que l'évaporation à mobilité égale sera toujours proportionnelle à la quantité absolue des deux substances; & comme il se trouve dans l'esprit urineux assez d'eau pour tenir le Sel en dissolution, car sans cela il seroit sous la forme concrète; il s'en suit nécessairement qu'il doit toujours se faire une évaporation de parties aqueuses capable de tenir le Sel qui s'élève dans une parfaite dissolution; je crois que la Chaux enlevée est aussi la cause de la grande force de ce Sel en ce qu'elle en dénature la partie grasse, au lieu que dans les autres elle leur donne des entraves & en émousse l'odeur.

128. Si nous observons enfin les résultats des dernières expériences §. 118. 119. 122. 123. nous voyons que la volatilité des intermédiaires fixes n'est due qu'à l'association des acides & de la matière inflammable. (//)

129. Que dans les Alkalis fixes cette volatilité doit être entièrement assignée à l'acide marin, qui étant par lui-même volatile n'a pas besoin d'autre secours pour communiquer cette propriété à ces substances.

130. Que dans la Chaux au contraire se rencontrant l'acide vitriolique qui n'est pas par lui-même volatile, & qui ne peut acquérir cette propriété que par le moyen de l'eau & du phlogistique, ce n'est que dans ces circonstances que cette propriété peut se développer; & comme cet acide attaque avec plus de force le phlogistique que l'acide marin, il est naturel que ce soit lui qui exerce par préférence cette fonction.

Il suit de-là que l'acide sulphureux ne doit pas seulement sa volatilité à la matière inflammable à laquelle il s'est uni, mais encore à l'eau dans laquelle il est délayé.

131. En rappelant ici l'observation faite par M. MALOUIN que les Sels séléniteux quand ils ont été une fois privés de toute l'eau qui les tenoit en dissolution, il en faut une beaucoup plus grande quantité pour les redissoudre; il paroît que la fixité de la partie qui est disposée à devenir volatile dans la Chaux dépend du même principe, savoir que l'acide vitriolique étant alors dans un grand degré de concentration est surchargé de parties terreuses dont il ne retient plus qu'une moindre quantité lorsqu'il est affoibli par l'eau, & qu'il peut exercer librement son action sur les substances inflammables; en effet nous avons observé §. 73. que la Chaux peut dé-

com-

(//) C'est ce que j'ai avancé dans une note §. 17.

composer le Soufre en attaquant sa partie phlogistique, mais que ce n'est qu'à la faveur de l'eau, comme il arrive dans toutes les décompositions de cette substance, qui ne peuvent absolument avoir lieu sans son secours.

132. En considérant l'opération qui est nécessaire pour la formation du Soufre artificiel, il est naturel de voir que ce n'est que dans l'état de fluidité que l'acide vitriolique peut attaquer le phlogistique, mais qu'il se passe une grande différence dans la manière avec laquelle cette union se fait, car dans l'état de fonte cette union est la plus intime possible, & dans celui de dissolution elle est bien petite, (*mm*) au reste nous remarquerons que le tartre vitriolé paroît être la combinaison la plus parfaite de cet acide avec une substance d'une nature différente, parcequ'il est nécessaire d'employer toute la violence du feu pour la détruire, pendant qu'il ne faut que des opérations très-simples & très-aisées pour décomposer le Soufre & les sélénites que je regarde après le tartre vitriolé comme les composés de cet acide les plus difficiles à détruire, mais nous laisserons des discussions que je

t 2

me

(*mm*) Les expériences dont je vais rendre compte me paroissent assez propres pour confirmer cette proposition. Comme le mélange du charbon & du Sel ammoniac dont j'ai parlé §. 89. ne m'avoit rien donné ainsi que je l'avois prévu, j'y ajoutai du vitriol vert bien calciné, & je retirai de ce mélange de l'esprit de Sel mêlé à de l'esprit sulphureux très-puissant & du Sel ammoniacal vitriolique, ce qui sert à nous faire voir encore qu'on peut tout aussi bien employer ces sortes de Sel pour dégager l'acide du Sel ammoniac que les acides libres, il est vrai qu'il seroit peut-être nécessaire de repasser l'esprit de Sel sur du nouveau Sel ammoniac pour l'avoir pur, mais toujours est-il moins vrai qu'on obtiendrait par ce moyen le Sel ammoniac secret de *Glauber*, avec plus de facilité, & moins de danger.

Une seconde expérience sert encore à appuyer les raisonnemens ci-devant.

Je pris $\frac{1}{---}$ d'esprit volatil $\frac{3}{8}$ de Soufre & je laissai ce mélange onc.

me réserve à traiter autre part dans toute l'étenduë qu'elles peuvent mériter.

133. Je reviendrai à ce que j'ai dit §. 130. que c'est l'acide vitriolique qui se volatilise avec des parties terreuses dans la Chaux en attaquant par préférence de l'acide marin la partie inflammable du Sel ammoniac, & l'attaquant même avec plus de force ; je ne disconvien-drai pas cependant que peut-être la partie que cet acide abandonne à la faveur de l'eau ne puisse être attaquée par l'acide marin & se volatiliser avec lui de manière que la décomposition fut d'autant plus intime par la Chaux, que les deux acides y concourent, & il me paroît à propos d'observer qu'il en est de celle-ci comme de plusieurs dissolutions faites par l'acide marin dans lesquelles cet acide n'a de jeu, qu'autant que les substances ont déjà été, pour ainsi dire, ouvertes & atténuées par des acides plus-forts.

J'en ai eû un exemple dans le plomb minéralisé par le Soufre dont j'ai parlé dans la note du §. précédent, ce plomb qui est si réfractaire, s'est pourtant réduit en plomb corné pour la plus grande partie en le mêlant à des fleurs de Sel ammoniac dans un creuset à un feu
au

en digestion pendant la nuit sur des cendres tièdes & dans un vase d'un très petit orifice que j'eus soin de couvrir d'un cornet de papier ce qui me donna la teinture dorée dont parle le Célébre *M. Boherave*, mais dont le procédé n'est pas si simple, & comme il étoit resté du Soufre qui n'avoit point souffert de changement,

j'ajoutai à ce mélange $\frac{3}{4}$ de minium; j'en fis ensuite la distilla-
onc.

tion dont je retirai une liqueur mêlée d'esprit de Sel & d'acide sulphureux, un peu de Sel ammoniacal vitriolique, & le plomb calciné fut entièrement minéralisé par le Soufre, sa couleur étoit noire, sa consistance étoit friable, il s'attachoit aux doigts & donnoit une flamme bleüe étant exposé à une chaleur modérée de même que fait le Soufre, & ne discontinuoit à brûler qu'en lui interceptant la communication avec l'air libre, en un mot c'étoit du véritable plomb brûlé.

auquel un mélange de ce même plomb avec de la poudre de charbon n'avoit rien changé.

134. J'ai dit §. 109. en parlant de la différence entre les résultats de la combinaison du Sel ammoniac avec le plomb, & de ce même Sel avec le plomb & la Chaux-vive, que j'avois lieu de conjecturer que l'acide marin devoit être affoibli par beaucoup d'eau pour attaquer le plomb, & §. 110. dans la note que non seulement par cette raison, mais encore parceque dans le Sel ammoniac cet acide se trouve associé à un Alkali volatil (Sels qui sont toujours chargés de beaucoup de matière phlogistique) il exerce son action sur le métal (*nn*) j'ai dit ensuite que lorsque cet acide est très-foible, il paroît avoir plus d'affinité avec la Chaux, qu'avec les Alkalis volatils, & qu'il en avoit davantage dans cet état avec ces derniers qu'avec les Alkalis fixes, ces inductions quoiqu'appuyées ne doivent cependant pas passer en maxime, & je ne les donne que comme des doutes ou des conjectures qui ont besoin d'être prouvées d'une manière directe, ce que ne pouvant pas faire pour le présent d'une manière assez étendue, je me contenterai d'exposer quelques expériences que j'ai faites sur cela.

135. Je mis de la grenaille de plomb dans de l'acide marin, & après douze heures il ne me parut pas qu'il en fut attaqué d'une manière un peu considérable (*oo*).

J'affoibli cet acide par beaucoup d'eau, mais je n'observai pas qu'il y eut eû d'altération plus sensible au plomb après 6. heures.

J'ajoutai

(*nn*) Cette proposition que je n'ai donnée que comme une conjecture à exciter ma curiosité, & j'ai fait sur cela quelques expériences qu'on trouvera à la fin de ce mémoire.

(*oo*) Je dois avertir que mon esprit de Sel n'étoit pas d'une grande force, & que c'est peut-être pour cette raison que les effets qu'il a produits sur le plomb sous sa forme métallique ont été bien petits, mais comme je me suis servi de ce même esprit de Sel pour les Chaux, il me paroît que les résultats n'en sont pas moins concluants.

J'ajoutai à l'acide un peu d'esprit volatile, ce qui excita beaucoup d'effervescence, & il me parut à 3. heures de-là que le plomb avoit changé considérablement.

136. Je mis du pareil plomb dans de l'esprit volatile très-pénétrant, & j'en mis dans un autre affoibli par beaucoup d'eau; après 24. heures de tems le second avoit souffert beaucoup plus d'altération que le premier; mais je remarquai que le plomb étoit au fond de la liqueur sous la forme d'une Chaux précipitée, ce qui prouve que le plomb est attaqué par l'Alkali volatile, mais que ce n'est pas une véritable dissolution.

J'ajoutai un peu d'acide marin à ces esprits urineux, & je remarquai de même une grande différence d'action de cet acide sur ce métal par les deux liqueurs; car celle qui étoit plus foible agissoit avec beaucoup plus d'activité que l'autre, elle étoit très-limpide, les bulles d'air se dégageoient avec beaucoup de rapidité, & je remarquai qu'elle répandoit une grande quantité de vapeurs acides, pendant que l'autre n'en donnoit aucune; il est vrai que dans celle qui étoit plus concentrée le rapport entre l'acide & l'Alkali volatile étoit plus approchant du point de saturation; je mis une quantité d'eau dans cette dissolution & elle s'éclaircit un peu, mais elle n'étoit pas aussi limpide que l'autre, je crois cependant qu'il se trouvoit une plus grande quantité de plomb dissoute.

137. Ces expériences nous apprennent clairement que l'acide marin agit avec d'autant plus de force sur le plomb par le secours des Alkalis volatiles, que ces Alkalis sont plus éloignés de leur plus grande concentration, quoiqu'il soit naturel de penser que cette plus grande activité ne s'étende que jusqu'à un certain terme, qui je pense sera celui de leur parfaite dissolution.

138. Il paroît de même qu'elle nous prouve que l'acide marin a très-peu, ou peut-être n'a aucune action de

de dissolution sur le plomb (pp), seroit-ce à cause de la grande quantité de phlogistique que contient ce métal? c'est effectivement ce que semblent me prouver les expériences suivantes.

139. Quant à ce que j'ai dit de l'affinité de cet acide avec la Chaux, les Alkalis volatils & les Alkalis fixes, il me paroît que la chose est assez prouvée par les expériences dont j'ai rendu compte, & je ne m'y arrêterai pas davantage.

140. Voici en peu de mots ce qui m'a paru prouver que l'acide marin ne dissout point le plomb à moins qu'on ne l'ait privé de son phlogistique, c'est que l'esprit de Sel dissout le minium avec beaucoup d'effervescence, il en fait de même à la céruse mais avec quelque petite différence, & quoique ce même acide dissolve le Sel de sature, il le fait pourtant avec beaucoup moins d'activité & sans effervescence: or personne n'ignore que le minium & la céruse sont deux chaux de ce métal imparfait, la première faite par le feu, & la seconde par les vapeurs acides du vinaigre, de manière qu'elles sont entièrement privées de leur phlogistique, au lieu que le Sel de sature par les digestions & les cohobations répétées de l'esprit de vinaigre en reprend indispensablement, ce qui est assez prouvé par la révivification qu'on peut faire de ce Sel en plomb sans addition de phlogistique.

Ce phénomène de la dissolution du plomb par l'acide marin au moien d'un peu d'Alkali volatil semble favoriser le sentiment de ceux qui prétendent que l'acide nitreux n'est que l'acide vitriolique altéré par du phlogistique

(pp) J'entends par dissolution, une désunion intime & uniforme de toutes les parties d'un corps, d'où il suit immédiatement la limpidité de la dissolution, ce qui n'ayant pas lieu dans celle de l'esprit de Sel sur le plomb non préparé, ne me paroît par mériter ce nom, mais plutôt celui d'abrasion.

gistique & de l'Alkali volatil, & que l'acide marin n'en diffère qu'en ce qu'il ne contient pas l'Alkali volatil; si cela étoit cependant, le Sel ammoniac fluor combiné à l'Alkali fixe devrait donner du véritable nitre, ce qui ne m'a pas réussi, non plus que d'en tirer d'une distillation que j'ai faite du mélange de l'esprit de vin avec l'acide vitriolique saturé d'Alkali fixe après 12. heures de digestion, qui a été l'opération dont M. VALLERIUS dit en avoir retiré; pour moi je n'ai obtenu qu'un tartre vitriolé en cristaux très-distincts, qui différoient cependant de l'ordinaire, en ce qu'il n'avoit point du tout de saveur amère. J'ai remarqué à cette occasion que malgré que l'évaporation soit très-rapide les cristaux qui en résultent sont en grande quantité & très-bien figurés, qu'il ne se forme point de pellicules, & qu'ils se cristallisent au fond de leur dissolution, comme le Savant M. ROUELLE dit qu'il arrive dans l'évaporation insensible, aux dissolutions ordinaires de ces Sels à l'air libre.

Quoique je me fusse proposé de rendre compte dans ce Mémoire de l'action de la Chaux sur différentes substances, les questions incidentes ne m'ayant pas permis d'être plus court, j'ai été dans l'obligation de me borner au Soufre, au Sel de Glauber, & au Sel ammoniac, me réservant à en donner la continuation dans d'autres Mémoires.

EXPÉRIENCES

153

Pour chercher les causes des changemens qui arrivent au Sirop violat, par le mélange de différentes substances.

P A R L E M Ê M E.

L' Illustre M. NEUMANN a donné un Mémoire dans le quatrième volume des *Miscellanea Berolinensia* sur le peu de confiance qu'on doit avoir aux changemens de couleurs qui arrivent au Sirop violat par le mélange de quelque substance pour en déduire la nature.

On fait que la couleur verte sert à caractériser les substances alkales, que le rouge dénote la présence d'un acide, & que les Sels qui résultent de la combinaison exacte de ces principes, & plus généralement que les Sels parfaitement neutres n'apportent aucune altération à la couleur bleüe des végétaux, ce sont là des maximes généralement reçues; quoique cependant ces axiomes ayent été depuis fort long-tems adoptés, ce Savant a fait voir qu'ils étoient sujets à un grand nombre d'exceptions, & qu'on ne pouvoit être en droit de conclurre de ces changemens que la substance qu'on avoit employée fut acide ou alkaline, ou enfin neutre, lors qu'il ne survenoit aucune altération à la couleur naturelle au sirop.

Ce n'est point une ampliation de ces exceptions que je me propose, mais l'examen de ces changemens & celui des causes de ces exceptions mêmes.

Je distribuerai mes observations selon l'ordre qui me paroît le plus naturel, savoir celui que tiennent les acides,

& je chercherai ensuite à déduire les conséquences qui en découlent.

1. Le sirop violat mêlé avec l'huile de vitriol, prend une couleur rouge très-belle & plus ou moins foncée à mesure que la quantité d'eau dans laquelle on étend le sirop est plus ou moins grande.

2. Il n'en est pas de même si on met l'huile de vitriol sur le sirop sans le délayer dans une quantité d'eau considérable, quantité qui doit être fixée par l'espèce de dissolution qui se fait sans qu'il ne se précipite plus rien après qu'on l'a laissé reposer; car alors le sirop se convertit en charbon.

3. Toutes les fois que la quantité d'eau excède le point de saturation, s'il est permis de me servir de cette expression, la couleur se change en verd dans la dissolution du sirop.

4. Je ne parlerai dorénavant que des dissolutions saturées, j'avertirai toutes les fois que cette circonstance aura été altérée, & je les nommerai liqueur.

5. Le tartre vitriolé semble au commencement ne diminuer qu'un peu l'intensité de la couleur bleue, elle se change néanmoins après un certain tems en une couleur verte assez belle. Les fleurs de violette, ni le papier bleu ne souffrent aucun changement.

6. Le foye de Soufre, ou pour parler plus exactement, du Soufre & de l'Alkali fixe mêlés à cette liqueur au moïen de l'agitation lui font prendre une couleur jaune dorée très-belle (a)

7. Le Sel volatil sulphureux se dissout en très-petite quantité dans la liqueur, elle se change cependant en un verd assez clair après quelque-tems.

8.

(a) Toutes les fois que je ne parlerai point des fleurs de violette & du papier bleu, c'est parceque je n'y aurai remarqué aucune altération sensible.

8. Le Sel de Glauber se dissout en très-grande quantité dans la liqueur, & lui fait prendre aussitôt une très-belle couleur verte.

9. L'alun se dissout de même en grande quantité, & produit une couleur violette qui disparaît ensuite & se change en un verd sale. Les fleurs de violette & le papier bleu changent aussi en rouge; il se fait au reste un précipité considérable dans le commencement qui semble cependant diminuer par la suite.

10. L'alun de plume artificiel dont j'ai rendu compte dans le mémoire précédent se dissout encore en plus grande quantité, & fait prendre une très-belle couleur de cerise à la liqueur, aux fleurs de violette & au papier bleu.

11. Le vitriol verd communiqua à la liqueur une couleur verd d'olive, parut changer foiblement en rouge les fleurs de violette, & le papier bleu prit une teinte d'un gris-rougeâtre; il y eut aussi dans ce mélange un précipité considérable (b)

12. Le vitriol de cuivre paroît produire dans le tems même de la dissolution un peu de changement, & la liqueur prend à la suite une belle couleur verte, de même que les fleurs de violette qui se chargent d'une nuance tout-à-fait semblable à celle du verdet: le papier bleu au contraire semble relever un peu sa couleur naturelle.

(b) Dans le doute que le vitriol vert que j'avois employé n'eut souffert une espèce de décomposition, j'y ajoutai un peu d'acide vitriolique, ce qui produisit en effet une espèce de gonflement qui ne ressembloit pas mal à un mouvement de fermentation; pour m'at-û. et néanmoins qu'il ne se trouvoit pas une surabondance d'acide, je projettoi par intervalle des petites quantités de l'aille de fer jusqu'à ce qu'il ne parut plus de mouvement; la liqueur en question prit une couleur brune très-foncée qui étoit à peu-près la même que celle qu'on obtient en mettant de l'eau avec le charbon qui résulte de la combinaison de l'acide vitriolique & du sirop §. 2. de même que le papier bleu; les fleurs de violette au contraire devinrent d'un très-beau rouge.

13. L'huile de tartre commence par communiquer une couleur jaune à la liqueur qui se change ensuite en verd à mesure que la quantité du sirop est plus grande ; cette couleur cependant ne se soutient pas & redevient jaune orangé ; les fleurs de violette développent un bien plus beau verd qui se change de même en jaune à mesure que l'humidité s'évapore & qui paroît d'un blanc sale lorsque les fleurs sont sèches.

14. Le Sel de tartre se dissout en très-grande quantité, communique d'abord une belle couleur verte à la liqueur & paroît la partager en deux parties dont la supérieure est un coagulum blanc, & l'inférieure est une espèce de précipité vert très-foncé : après quelque tems cependant cette liqueur prend une couleur jaune orangé.

15. La Chaux-vive change cette liqueur en un verd très-clair après avoir passé par le jaune comme celle qui est mêlée à l'huile de tartre §. 13., & jaunit de même ensuite.

16. La Chaux lavée change la liqueur dans le moment du mélange en verd-clair qui passe ensuite au jaunâtre.

17. Les os calcinés changent la liqueur en verd-clair, & cette couleur s'y soutient.

Je crois devoir faire remarquer que le Sel de tartre, la Chaux-vive, la Chaux lavée, les os calcinés & le Sel volatil de Sel ammoniac produisent un mouvement dans la liqueur qui ressemble beaucoup à un mouvement de fermentation.

18. Le Sel volatil fait prendre une couleur verte à la liqueur qui se change ensuite en jaune orangé.

19. L'esprit volatil de Sel ammoniac change aussitôt en verd un peu jaunâtre cette liqueur qui ne se soutient pas & qui passe au jaune &c. Et en un très-beau verd les fleurs de violette ; mais ce changement est encore plus prompt avec l'eau de luce, cette couleur néanmoins se change aussi en jaune.

20. L'huile de vitriol combinée avec l'huile & étendue ensuite dans l'eau, procura une très-belle couleur à la liqueur, & changea les fleurs de violette en très-beau rouge.

21. Si l'eau-forte que l'on mêle avec la liqueur en question est en trop grande quantité, elle ne prend pas une belle couleur rouge, encore est-ce plutôt un jaune doré, qu'un véritable rouge qu'on peut lui faire prendre, quelque soit le rapport de ces substances entr'elles; il en est de même en employant le sirop tout pur; le papier bleu prend un rouge de brique de même que les fleurs de violette qui en diffèrent cependant de quelques nuances; ce rouge quoiqu'il en soit n'est jamais beau & passé d'abord au jaune citron comme la liqueur reposée qui contient l'Alkali fixe.

22. Le Salpêtre se dissout en grande quantité dans la liqueur & lui fait prendre une couleur verte.

23. L'acide marin fait prendre une très-belle couleur rouge ponçeau à la liqueur qui est d'autant plus foncée, que la quantité de cet acide est moins grande: lorsqu'on en mêle au sirop sans être délayée, il se manifeste une très-belle couleur de rubis qui ressemble parfaitement à du vin.

24. Le Sel marin ne se dissout pas en aussi grande quantité dans cette liqueur que le salpêtre & lui fait prendre une couleur verte foncée.

25. Le Sel ammoniac fait changer en verd brun la liqueur en question.

26. La limaille de fer semble aussi faire prendre une couleur verte foncée à cette liqueur.

27. La pierre à caustère fait prendre dans l'instant du mélange une belle couleur verte à cette liqueur qui se change ensuite en jaune.

28. La substance saline dont j'ai parlé dans le mémoire précédent §. 69. paroît n'avoir produit aucun changement à la couleur du sirop dans le moment du mélange, mais elle est dans la suite devenuë de la couleur des eaux croupissantes.

29. Le Sel de saturne a fait prendre une couleur verte à la liqueur en question, & il s'est fait une séparation, en forme de précipité, des parties extractives qui n'avoient rien souffert dans l'intensité de la couleur.

30. La crème de tartre n'a aussi produit aucun changement dans le tems du mélange, mais elle lui a fait prendre une belle couleur de vin.

31. Le précipité blanc a converti la liqueur en bleu pâle & ensuite en verd-clair.

32. Le turbith minéral l'a changée en verd.

Je dois avertir, quoique la chose soit fort naturelle, que ni l'une, ni l'autre de ces substances ne s'est pas dissoute dans la liqueur.

33. Un Sel séléniteux chargé de beaucoup de matière phlogistique & par conséquent très-dissoluble dans l'eau, comme je l'ai fait remarquer dans le mémoire précédent, a changé cette liqueur en verd qui ne s'est pas soutenu, & qui a changé en jaune orangé avec un précipité très-abondant.

34. La pierre à plâtre qui n'est comme l'on fait qu'une sélénite calcaire naturelle, n'a point changé cette couleur au moment que jé l'y ai mise, elle parut cependant en avoir altéré la nuance dans la suite.

35. Le plâtre cependant m'a paru y avoir occasionné quelque changement dans l'instant du mélange, qui devint d'autant plus sensible dans la suite; sa couleur étoit d'un verd jaunâtre.

36. Le coicotar a fait prendre dans le moment du mélange une couleur rouge à la liqueur, & lorsqu'il se fut
entiè-

entièrement précipité , elle devint d'un très-beau jaune doré.

37. La noix de galle lui a communiqué une couleur brune olivâtre qui s'est soutenue & qui ne différoit pas de celle qui résulte d'un mélange de cette dissolution avec un peu d'huile grasse & beaucoup d'acide vitriolique ; elle ressembloit très-bien aussi à celles dont j'ai rendu compte dans la note du §. 11.

38. La liqueur délayée dans autant d'eau qu'il lui en fallut pour passer de la couleur bleue à la verte est repassée au bleu par un peu de savon que j'y ai fait dissoudre.

39. Du Sel de Glauber, du salpêtre & du Sel marin dissous successivement dans la liqueur en question & mêlés ensuite avec de l'esprit urinaire qui la fit changer tout de suite en verd-clair, repassa au bleu par l'addition du savon dissout & qui s'est coagulé dans ce mélange, comme il étoit assez naturel de le présumer, si quelqu'un des Sels n'avoit pas été à base d'Alkali fixe, ce qui me fait conjecturer que l'esprit volatil contenoit apparemment encore un peu d'acide marin.

40. Je mêlai une petite quantité de liqueur rendue rouge par l'acide vitriolique avec une grande quantité de celle qui étoit d'un jaune-clair par le mélange de l'huile de tartre, & je vis, qu'au moment du point de saturation, le mélange commença à verdir & se fonça continuellement sans jamais perdre de sa couleur, comme faisoit l'huile de tartre malgré que je l'en eusse chargée.

41. Sans entrer dans une récapitulation méthodique des faits dont j'ai rendu compte, il me paroît de pouvoir conclure que la couleur rouge prouve tout au moins une surabondance d'acide dans la substance mêlée à la dissolution du sirop ; pour ce qui est de la couleur verte je me crois bien fondé à dire d'après le Célèbre M. NEU-

MANN qu'elle est une preuve très-équivoque de la présence d'un Alkali, & qu'elle est même fausse, c'est-à-dire qu'elle prouve la présence d'une substance neutre très-dissoluble lorsque cette couleur se soutient; car si la substance qu'on a mêlée est un Alkali fixe ou (c) volatil, ou enfin si ce principe y domine la liqueur doit prendre une couleur jaune qui sera plus ou moins foncée à mesure que ce principe s'y trouvera en plus ou moins grande quantité.

42. J'ai de même lieu de penser que la couleur bleüe ne passe au verd par l'interposition des parties salines qui se sont dissoutes dans la liqueur que parceque les parties blanches du mucilage se trouvent plus divisées entr'elles (d) car du moment que ces parties se rapprochent, ou qu'on y en introduit de nouvelles, comme cela arrive par le mélange du savon, la couleur bleüe se manifeste
&

(c) En effet nous avons fait observer qu'une dissolution rendüe rouge par l'addition d'un acide, commençoit à se changer en verd avant d'avoir atteint le point de saturation lorsqu'on la mêloit à une dissolution du même sirop rendu jaune par l'action d'un Alkali fixe, & que cette couleur continuoît à se foncer à mesure que la quantité de la liqueur jaune étoit plus grande : *il suit de-là qu'il n'est pas nécessaire que le Sel soit parfaitement neutre, mais je dois faire remarquer que si l'excès de saturation dépend de l'Alkali fixe, la couleur ne se soutient pas & passe au jaune.*

(d) Je crois que ce n'est pas dans d'autres raisons que dans celle de l'interposition produite par la dissolution des substances salines qu'on doit chercher le changement de la couleur bleüe en verte, puisque les Sels ou les matières qui ne sont pas ou qui sont du moins très-pen dissolubles dans l'eau & qui d'ailleurs par la finesse de leurs parties ne peuvent se soutenir dans la liqueur, n'y produisent aucun changement & qu'au contraire plus les Sels sont dissolubles, ou plus les matières sont réduites en des parties assez déliées pour être soutenues, plus le changement est prompt & considérable. C'est aussi ce qui paroît exactement prouvé par le retour au bleu au moyen du savon; car cette substance comme l'on sait ne présente pas une dissolution parfaite dans l'eau, & elle n'y est que miscible, d'où il suit naturellement l'opacité des parties aqueuses qui ne tenant point du sirop en dissolution étoient auparavant diaphanes & n'osoient paroître la couleur verte.

Nous pouvons donc déduire de-là que la densité du milieu produit seule ce changement.

& se soutient tant que le nouveau coagulum se soutient lui-même par petits floccons dans la liqueur.

43. Si la substance saline outre à l'interposition de ses parties dans celles du sirop dissout, a encore de l'action sur ces parties mêmes, il en résulte la couleur jaune ou la couleur rouge, suivant que cette action est plus ou moins vive, de manière que (e) la couleur jaune ne seroit que la dilatation des parties qui du bleu ont passé au verd,

Miscel. Tom. III.

x

&

(e) L'action des acides & des Alkalis sur les parties extractives dont est composé le sirop est si différente, qu'on peut avec fondement avancer que l'une est tout-à-fait opposée à l'autre; il me paroît cependant qu'elle ne diffère que par l'activité avec laquelle elle se fait, mais ce seroit une question qui mèneroit trop loin, & je me bornerai à faire observer que l'action de l'Alkali fixe consiste en ce qu'elle dispose les parties extractives à la fermentation putride: en effet en surchargeant une dissolution de sirop dans l'eau d'Alkali fixe il se développe après quelques heures une puissante odeur d'esprit urineux qui diminue cependant ensuite par de nouvelles additions d'Alkali fixe & prend alors l'odeur & la couleur même de l'urine qui commence à se putréfier: or comme la putréfaction ne fait que désunir par une espèce d'extension les parties des substances qui en sont capables, je crois d'être bien fondé à penser que c'est de la raréfaction des parties qui constituent la couleur verte, qu'on doit répéter le changement de cette couleur en jaune. Les acides au contraire loin de disposer les matières à la fermentation putride sont faites pour en empêcher l'effet comme cela est connu de tout le monde, & j'ai lieu de croire que c'est en racornissant les molécules colorantes qu'ils produisent les changemens des couleurs; de manière que ces parties présentent de plus grands interstices entr'elles pendant qu'elles sont réduites à un plus petit volume pour les nuances de la couleur rouge, & qu'elles le sont au plus petit possible pour le noir le plus foncé.

Il me paroît qu'on ne peut mieux comparer cette action des acides & des Alkalis qu'à ce que l'on voit arriver aux substances animales ou végétales exposées à l'action immédiate du feu; ou bien à celle de cet agent modifiée par l'intermède de l'eau; car dans le premier cas, ces substances souffrent une contraction plus ou moins grande à mesure que l'action est plus ou moins vive, & au contraire dans la seconde elles s'étendent & se raréfient.

Cette différence cependant ne me paroît produite que parceque dans les acides l'action étant trop vive attaque d'abord la surface des substances, & se porte par une succession rapide sur les parties intérieures, au lieu que dans les Alkalis cette action est plus uniforme & s'étend en même-tems sur toutes les parties de la substance.

& le rouge une plus grande atténuation de ces parties : le noir enfin ne sauroit être que la destruction, ou pour parler plus exactement la division mécanique la plus forte possible.

44. Cette division ne me paroît être produite que par l'atténuation qui arrive au phlogistique, car je suis parvenu à faire du bleu par une surabondance de cette matière avec une dissolution de vitriol vert que j'avois fait long-tems bouïllir pour en séparer la terre férugineuse, & cela au moïen d'une grande quantité d'une forte décoction de noix de galle dans la dissolution en question; ce mélange après avoir passé par la couleur noire de différentes nuances & par le violet devint bleu de Roi lorsqu'il eut été parfaitement desséché; je dois cependant avertir que M. ROUELLE avoit déjà fait une pareille préparation comme je l'ai vû rapportée depuis par M. l'Abbé MENON dans son second mémoire sur le bleu de Prusse inséré dans les mém. de Math. & de Phys. présentés à l'Ac. Roy. des Sci. par divers Savans Tom. premier pag. 580.

45. Nous déduisons enfin de ce mémoire que pour que la couleur bleüe se change en verd il n'est pas nécessaire que la fécule colorante soit atténuée, & qu'il suffit qu'il se fasse une interposition des parties d'une substance blanche ou jaune qui donnent de l'opacité aux interstices du milieu interposé entre le molécules colorantes.

46. Qu'il n'en est cependant pas de même de la couleur jaune; car elle est sans contredit le résultat d'une dilatation qui se fait dans ces parties, de manière que leur densité se trouve diminuée.

Que le rouge dépend d'une plus grande division des parties de celles-ci, & que la noire n'est pour ainsi dire qu'une division si intime, qu'on peut la nommer du nom de destruction.

47. Tout ce mécanisme cependant ne fait son jeu qu'en vertu de l'action que les substances ont sur le phlogistique.

48. Lors qu'un corps est réduit en charbon, ce n'est pas qu'on en ait enlevé le phlogistique, je croirois plus volontiers qu'on n'a fait qu'en changer la distribution; les corps blancs me paroissent être ceux qui en sont les plus dépourvus, ou dumoins qui n'en retiennent que la quantité qui leur est nécessaire pour avoir les propriétés communes aux corps; d'où il résulte aussi une plus grande difficulté à les en priver. Ce qu'il y a de très-positif, c'est que la Chaux & le Sel de potasse, de même que le Sel de tartre deviennent bleus étant calcinés, au moins, à vase clos avec des matières qui contiennent beaucoup de phlogistique.

J'aurai occasion de développer plus amplement & plus démonstrativement dans un autre mémoire les vérités que je n'ai fait pour ainsi dire qu'indiquer dans celui-ci; il me suffit en attendant de faire remarquer la conformité de ces expériences & de ces inductions avec ce qu'en pensoit le célèbre Chevalier NEWTON: voici ses propres termes „ nec minus eodem facit, quod ex diversorum li-
 „ quorum permixtione, certæ colorum species permiros
 „ interdum ac notatu dignissimos ortus atque mutationes
 „ habeant: quorum quidem caussa nulli rei verisimilius &
 „ rationi congruenrius attribui potest, quam quod corpus-
 „ cula salina, quæ insunt in uno liquore, agant varie in
 „ corpuscula colorata alterius, vel coalescant cum illis;
 „ adeo ut illa inde adaugeantur vel extenuentur, (quo non
 „ modo magnitudo, verum etiam densitas ipsorum immu-
 „ tari potest) vel dividantur in corpuscula adhuc minora,
 „ (quo liquor, qui fuerat coloratus, poterit pellucidus
 „ evadere) vel consocientur complura inter se, & in gru-
 „ mulos coalescant, (quo ex binis liquoribus pellucidis,
 „ confieri poterit liquor coloratus.) NEWT: Opt: L. II. P. 3.^a
 Prop. V.^a pag. 98.

*Fautes qui se sont glissées dans le Mémoire sur la Chaux,
& qu'on prie le Lecteur de corriger.*

FAUTES.

LISEZ.

<i>Page</i>	<i>Ligne</i>		
87	24	; - - - - -	effacés
		6	6
104	1	$\frac{6}{8}$ - - - - -	$\frac{6}{gr.}$
105	27	. - - - - -	,
106	11	graisses . . .	goutes de graisse
123	^{(dans le} _(texte) 4	caustique sublimé	caustique. Sublimé
143	derniere	il me ne - -	il ne me
144	2	des matras - -	du matras
Ibid.	21	production - -	graduation
Ibid.	22	Raumur - - -	Reaumur
Ibid.	24	il se détruit avec	il ne se détruit pas avec
Ib. dans la note		je tirai - - -	je dirai
147 dans la note		est-il moins vrai	n'est-il pas moins vrai.

JOHANNIS-BAPTISTAE GABER

De humoribus animalibus

SPECIMEN TERTIUM.

QUUM experimenta de spontanea humorum mutatione persequer, paulatim eo deductus sum, ut varias etiam partes explorarem, quibus humores secundum naturam efficiuntur, atque adeo productiones varias tum albuminosae partis, quae serum constituit, tum lymphaticae, & aquae ad examen revocarem. Hinc varia de ruyfchiana membrana, de flocculis, quos in calida missus sanguis gignit, de fibrosa basi cruoris insulam efformante, de sale sanguinis essentiali tentamina nata sunt, quae minus fortasse perfecta, & absoluta, hic nullo alio ordine descripsi, quam quo se mihi primum obtulerunt.

1. Seri partem concrefcibilem ab aquosa frigoris ope separabam, partem nempe aqueam, quae primum, & minori frigore concrefciebat a parte reliqua, quae tardius congelabatur, sejungebam, easque in distinctis vasis liquefcere sinebam. Prior illa liquorem exhibebat limpidum, penitus in ignem diffabilem, ex acidis mineralibus non coagulabilem, a quo per digestionem nihil separabatur; pars altera liquorem praebebat densiorem, sero colorationem, viscidulum, igne, & acidis coagulabilem, & digestionis ope in clausis vasis in puriforme liquamen prorsus abeuntem perpauca omnino aqua supernatante.

2. Ex quo confirmatur albuminosam partem feri eam esse, quae in pus secedat, atque hinc fieri, ut eadem omnino deposita supernatans liquor concrefcibilem naturam amittat (a). Ex eo etiam experimento definiri commode

Miscel. TOM. III.

y

potest,

potest, qua proportione albuminosae partes se habeant ad aquosas in sero contentas: atque insuper deprehendimus partem serii aquosam concrescibili parti propemodum aequalem esse. Quae porro methodus horum elementorum proportionem definiendi minime fallax, coeterisque anteponenda videtur (*b*).

3. Diximus corium, quod cruorosam insulam pleuritico- rum obtegit, alkalicis volatilibus solvi, mox eorum evaporatione iterum concrescere, ita tamen ut pristinam duritiem, & colorem non recuperet, sed in tremulae gelatinae speciem tantummodo coëat (*c*). Libuit autem experiri quid eveniret, si ejusmodi solutioni, aut aqua, aut acida admiscerentur. Itaque admixta aqua, soluta membrana gelatinae specie ad liquoris superficiem colligebatur; quo fit, ut ipsa sic soluta saponaceam indolem non adquirat, quum aqua solubilis non efficiatur. Quod si vero in eam solutionem spiritum nitri immitterem, soluta crusta ad fundum praeceps ferebatur, & pristinam albedinem, & duritiem referebat. Constat igitur speciem, quam exhibet, gelatinae aemulam, dum aut alkalihi evaporatione, aut aquae admixtione concrescit, tribuendam esse aquae, quam in poris suis concrescendo retinet, indeque fieri, ut acida mineralia, quae aquam non minus, quam alkali abripiunt, pristinam formam, ac densitatem eidem restituant.

4. Libuit etiam indolem sabulosae materiae, in quam temporis progressu serii sedimentum puriforme facessit per experimenta investigare (*d*). Hujusmodi itaque materiem in varios liquores immisi, aquam, vini spiritum, acetum distillatum, acidum nitri, alkali volatile. Tribus prioribus mentruis soluta nullatenus est; duobus postremis prompte, & perfecte solvebatur. Ex quo adparet ea concrementa
salina

(*b*) Confer *III. Haller Elementor. Physiol. T. II. pag. 124.*

(*c*) *Specim. II. § 30.*

(*d*) Confer. *Specim. II. §. 20.*

salina non esse, quum aqua non solvantur, & albuminosae feri parti in eo esse similia, quod alkohole solvi non possint, solvantur vero alkaliciis volatilibus; in eo autem differre, quod solvantur acidis mineralibus, quum feri pars gelatinosa ab iisdem cogatur.

5. Ex iis etiam constat concrementa ea terrea a topheae podagrorum materia differre; nam haec aceto distillato, & spiritu salis intra viginti-quatuor horas solvebatur, contra in spiritu salis ammoniaci, c. c., urinae integra perstabat (e), ut propterea iis solveretur, in quibus terrea materies integra perdurabat, iisque resisteret, a quibus terream hoc puris concrementum solvebatur. Eodem modo a calculis differre constabit tum felleis, tum urinariis, quorum aliquos in alkaliciis iisdem integros permanere observavimus.

6. Quum porro corium pleuriticum in vasis clausis sponte colliquatum (f) diu asservassem, animadverti turbidum eum liquorem in tophos abire iis omnino similes, quos purulentum feri sedimentum produxerat, quique similiter tentati eandem naturam ostendebant (g), ut inde probabile fiat colliquatum corium a purulento feri sedimento minus discrepare, quam subito aspectu (g) ex aliqua consistentiae, & coloris diversitate nobis differre visa fuerint, & confirmatur eorum sententia, qui censent unam eandemque utriusque materiem esse (h), albuminosam nimirum feri partem, quod aliis etiam experimentis consentaneum est, quae hic continenter adnotamus.

7. Insulam cruorosa in minima fragmenta comminuatam repetita aquae affusione elueham, ut cruore per aquam abrepto

(e) Pinelli. Saggio delle transazioni. T. IV. pag. 157.

(f) Specim. II. §. 20.

(g) Specim. II. §. 26.

(h) Celeb. Sauvages de l' inflammation §. 87.

Cl. De-Haen Part. II. Cap. II. pag. 22.

Cl. Quesnay de la saignée pag. 419. 420.

abrepto sola ipsius insulae pars fibrosa, albidaque supereset (*i*); tum eam partem fibrosam variis iis experimentis exploravi, quae circa corium pleuriticum alias institueram. Eandem omnino naturam constanter demonstravit: nempe clausis vasis digesta in liquamen abibat, alkohole, & acidis mineralibus indurabatur, alkaliceis volatilibus perfecte solvebatur, eorum tamen evaporatione concretura.

8. Ex quibus demonstratur corium pleuriticum ex eadem materie constare, ex qua fibrata, albidaque insulae cruorosa matrix constituitur, albuminosa nempe feri portione, uti MALPIGHIO (*l*) HALLERO (*m*), aliisque summis Viris visum fuerat. Hinc porro intelligitur cur corium pleuriticum ad superiorem insulae cruorosa faciem constanter adhaereat; cur interdum globulis cruorosis interceptis non nisi dilutiore colore, majorique duritie id corium a cruorosa insula distinguatur (*n*); cur in scorbuto imminuta cohaesione globulorum sanguineorum ad fibrosam sanguinis partem corium crassius fiat (*o*); cur in inflammationibus prout cruoris quantitas imminuitur corii crassities augeatur (*p*); cur denique corium a nobis observatum fuerit, quod flocculenta corona per serum dispersa cingebatur (*q*); ac postremo cur & tota placenta, & corium pleuriticum aequae parum ferri contineat (*r*).

9. Omnino probabile est educto sanguine, defectuque motus, vel caloris, vel utriusque aqueam feri partem minorem

(*i*) Confer *Malpighium* de polypo pag. 33.

Menghinum Comment. Bononiens. T. II. Part. II. pag. 254.

Cl. Kronaver apud *Hallerum* in addendis Physiolog. T. VIII. Part. II. pag. 139. *Cl. Kronaver* enim opusculo non sine dolore careo.

(*l*) Loc. citat.

(*m*) Tom. II. Physiolog. pag. 126. 127. 128.

(*n*) *Quesnay* loc. citat. pag. 411. 412.

(*o*) *Lind.* Traité du Scorbut.

(*p*) *Quesnay* loc. citat. pag. 415. 416.

(*q*) *Specimen*. II. §. 25. not. d.

(*r*) *Menghini* loc. cit. pag. 255.

norem jam albuminosae partis quantitatem solutam servare posse, hinc excedentem portionem secedere quemadmodum quorundam salium portio aqua calida solutorum ab eadem frigescente separatur. Portionem hanc albuminis frigore, & quiete coeuntem globulos cruorosos abripere, & insulam constituere, corium vero pleuriticum fieri ab albuminosa parte, quae aut nullos, aut pauciores globulos sanguineos concresecendo abripuit, sive quod frigori magis exposita promptius coierit, sive quod in concretionem magis prona esset, sive quod minorem, quam secundum naturam ad globulos sanguineos adhaesionem haberet, & quidem promptiorem ex frigore congelationem ad corium pleuriticum constituendum conferre, inde erui videtur, quod corium ad superiorem insulae faciem perpetuo adhaereat frigori magis expositam, quamquam corium ipsum sero gravius sit, tum ex eo etiam, quod hyeme corium frequentius occurrat. Majorem albuminosae partis proclivitatem ad cohaesionem ad crustam efformandam conferre ostendunt inflammatorii morbi, in quibus adest frequentissime, ejusque durities feri vim concresecibilem auctam esse testatur. Demum eo etiam spectare imminutam cruoris ad albuminosam partem feri adhaesionem innuere videntur scorbutus, cachexia, hydrops ipse, in quibus morbis aliquando ea alba crusta sanguinem obtegit (s).

10. Quum insulae cruorosa non lotae frustra in acido minerali, & alkohole immitterem similiter duresebant, alkalice vero volatilibus non perinde solvebantur ac si lota fuissent; sed spiritus volatilium cruore tantum inficiebatur, grumus autem nigrior evadebat, ac integer persistabat (t). Ex quo constat cruorosos globulos, quibus fibrosa sanguinis

nis

(s) Utramque hanc causam conjungit *Ill. Haller* in addendis T. VIII. Physiolog. pag. 142. 143.

(t) Eundem eventum habuit experimentum *Ill. Halleri* T. II. Physiolog. pag. 81.

nis pars obvoluta est, impedire quominus ipsa salibus alkalicis volatilibus dissolvi possit.

11. Quod si sanguis e vena exiliens aqua excipiat, aqua ipsa globuli sanguinei eluuntur, pars vero albuminosa feri sola fere concrefcit in notissimos flocculos, qui tam pauco cruore colorantur, ut fere albidii sint; & quidem eos flocculos eadem iterum naturam habere, ac corium pleuriticum, aut lotam cruorofam insulam deprehendi, alkohole nimirum indurari, ac in eodem immutatos perstare, spiritu volatilii perfecte solvi, digestionem in purulentum liquamen abire: perinde nimirum est sive cruorosi globuli per aquam, in quam sanguis e vena exilit, ita diffundantur, ut a concrefcente albuminosa feri parte abripi non possint, sive jam abrepti, & cum eadem in insulam coacti repetita aquae affusione deinceps eluantur (7).

12. Ex eadem albuminosa feri parte materies constitui videtur ejus membranae, quae ruyfchiana dicta est, quaeque ex concusso sanguine paratur. Sanguinem ab animalis vena intra vitream lagenam excipiebam, exceptum agitata phiala vehementer, ac diu quatiebam, mox fracta phiala, eundem sanguinem in aliud vas transfundens, observabam totum illum fluidum, spumofum, & admodum coccineum esse, sed in eodem multa coagula dura, albidaque reperiebam, quae corium pleuriticum, & colore, & consistentia referre videbantur. Coagula haec eadem etiam proprietates retinebant, quas modo dictum pleuriticum corium: nam iisdem menstruis solvebantur, iisdem fluidis dura, ac incorrupta persistebant, & intra vas clausum digesta in simile putridum liquamen immutabantur.

13. Igitur ea ruyfchiana membrana nihil aliud est nisi albuminosa feri pars, quae sponte concrefcens agitatione impeditur, quominus globulos sanguineos secum abripiat; seu potius albuminosa pars, quae interea dum concrefcit, intra serum sic eluitur per agitationem, ut globulos sanguineos

neos per ipsum diffundat, quo fit, ut & albumi colorem praefereat, & reliquas albuminosarum concretionum proprietates possideat. Quum vero globuli sanguinei non cogantur nisi quatenus a coeunte ea albuminosa parte abripiuntur, inde intelligitur, cur sanguis a quo ruyfchiana membrana separata est, solutus maneat (*u*). Quum nonnisi quaedam albuminis portio sponte a sero secedat, inde intelligitur, cur serum, a quo ea determinata albuminis portio jam secessit, aut quiete in insulam coeuns, aut agitatione in membranam ruyfchianam abiens, coagulabilem ex acidis mineralibus, alkohole, igne naturam praefereat (*v*), etsi nihil ulterius membranae ruyfchianae per agitationem ex illo elici possit (*x*). Nempe id serum tantam adhuc albuminis quantitatem retinet, quantam solutam servare potest, hinc concrecibilem naturam servat; nec tamen membranam ullam amplius potest suppeditare, quum sponte nihil amplius ejus albuminosae partis dimittere possit.

14. Ex his etiam intelligitur cur agitated sanguis nullum corium pleuriticum exhibeat, ex eo nempe quod albuminosa pars, quae in corium fuisset coitura, agitatione in Ruyfchii membranam transeat. Intelligitur etiam albuminis portionem, quae educto sanguine sponte coalescit, & insulam efformat (*y*) non tam defectu motus, quam frigore coire, quum agitato sanguine similiter secedat, & in ruyfchianam membranam immutetur, quod & allatis superioribus observationibus confirmari videtur, & pro demonstrato haberi potest, si modo verum sit sanguinem in calore animalis asservatum diutissime fluidum permanere (*z*).

15. Ex his omnibus consequens erit fibrosam insulae criorosae partem, concrementa, quae sanguis in aquam emif-

(*u*) *Cl. De Haen* pag. 90. 91. 92.

(*v*) *Idem* loc. citat.

(*x*) *Idem* pag. 88. 89. & 93. 94.

(*y*) *Sydenham* de Pleuritide.

(*z*) *Schyvenche Haematol.* pag. 90. 103. 105.

emissus facit, ruyfchianam membranam, corium pleuriticum, unam eandemque naturam praeseferre, & ex eadem albuminosa feri materie constitui: propterea arbitramur Auctores, qui a nostris discrepantia experimenta proposuerunt, & aut lotam cruorofam insulam, aut flocculos ex sanguine in calidam misso procreatos vini spiritu solvi affirmarunt; aut eodem aqueo nimis usos fuisse, aut experimenta in apertis vasis instituisse, ut spirituosa parte abeunte, haec deinceps orta putredine sponte solverentur, aut aliqua alia ratione in errorem inductos fuisse. In variis enim experimentis, in quibus vini spiritum communem, nec probe rectificatum adhibuimus, constanter tamen varia ea coagula non secus ac corium pleuriticum indurari observavimus, & sic indurata a longo jam tempore in eo liquore integra servamus.

16. Placuit praeterea alkalinorum fixorum actionem in varias memoratas albuminosas concreciones per experimenta investigare, quum omnes spiritu volatili salis ammoniaci calce parato indiscriminatim solvi constitisset; at contra comperimus perinde omnes oleo tartari per deliquium non secus, ac vini spiritu induratas fuisse, diuque in eodem, quamvis calori digestionis expositas, immutatas perstitisse, ut censeam similiter, ac in vini spiritu, in eo liquore ad plures etiam annos integras posse servari.

17. Ex his ipsis; quae hactenus attulimus experimentis lucem aliquam oriri existimo ad eam quaestionem dirimendam inter Viros Cl. acriter nostris temporibus agitam, num alkalica salia putredinem arceant, vel promoveant. Quae quidem quaestio vix poterat ex odore definiri, quum alkalicum fixum ex animalibus humoribus etiam sanis odorem extricet alkalini volatilis, volatile vero sal ipsum odore suo dubium relinquat, utrum odor corporis, cui admixtum fuit ipsi adscribendum sit, an novo volatili sali ex putredine orto. At cum certum sit serum per
putre-

putredinem liquari, & coagulabilem indolem deponere, inde confirmari potest utrumque alkali putredinem impedire. Etenim in allatis experimentis pars feri gelatinosa liquore tartari indurescebat, & sic indurata in eodem diutissime persistebat, & licet in spiritu salis ammoniaci calce parato soluta satis diu fervaretur, concrescibilem tamen indolem constanter servabat, quam dissipato per evaporationem alkali sponte concrescens ostendebat, ut propterea utrumque alkali inter antiseptica, & quidem actuosiora referri debeat.

18. Demum etiam aquae calcis actionem in crustam phlogisticam, aliasque albuminosas concreciones experimentis investigans comperi haud minus prompte ab hac, quam spiritu alkalino salis ammoniaci calce parato in tremulae gelatinae speciem primum conversas, mox perfecte dissolutas fuisse, adjecta aqua forti in pristinam albi coaguli speciem ad liquoris fundum iterum dejectas fuisse.

19. Cupiebam etiam salem sanguinis essentialem in aquea feri portione invenire. Quare aqueam eam portionem, tum congelatione (1) ab albuminosa separavi, tum a coagulato per ignem fero sponte extillantem excepi. Sed aut parciorem obtinui aquam, aut crassiorem, & turbidam, ut nihil inde ad propositum mihi finem exoriretur. Itaque alio rem eandem tentamine adgressus sum. Noveram ex Haenio (2) serum in fervidam immisum lacteam ipsam reddere, nec ullum coagulum exhibere, quantumvis aqua ebulliat; conjectabam igitur futurum, ut si albuminosas feri partes per aquam sic dispersas ab eadem secernerem, mox aquosam partem debito modo evaporare sinerem, salinae partis in eadem contentae crystallos obtinerem. At quum magnam aquae quantitatem, immisso in ipsam fero, per ebullitionem reddidisset lacteam, philtratione statim per

Miscel. TOM. III.

3

chartam

(2) Loc. citat. pag. 86. 87.

chartam adeptus equidem sum limpidam, ac aqueam feri partem a concrefcibili ita fegegatam, ut in igne evaporando concentrari poffet; fed quamvis fic evaporata falum admodum faporem adquireret, tamen frigido loco fervata cryftallos nunquam dimifit; ex quo conjicere eft falem fanguinis nativum hujusmodi effe, ut nunquam, aut aegre in cryftallos concrefcant. Sed de hac re alias fortaffe.

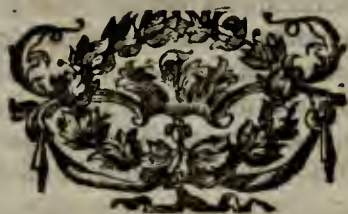
20. Duo reliqua mihi funt experimenta, quae breviter indicabo, alterum in animalibus ex nimio calore fuffocatis, alterum in iis, quae inedia conficiuntur. Quum enim ex his duobus caufis Cl. Scriptores humorum putredinem induci, indeque ea animalia enecari tradiderint, idcirco opportunum cenfui eandem rem experimento etiam meo explorare.

21. Duo cuniculi in hypocausto ad 35° thermom. reaurmuriani calefacto ex dyspnaea, & virium prostratione interierunt. Primus quidem fpatio horarum *xiiii.*, alter horarum *xviii.* Pulmones inflammati inventi funt, odor nullus foetidus, nec fanguis, nec bilis cum acidis efferbuit. Feles robusta in hypocausto inter $38.$ & $40.$ ejusdem therm. calefacto horis fex interiit. Cuniculus alter, quum in eodem calore duabus horis permansiffet, vivus adhuc ex eodem eductus eft, & brevi poftea interiit: utrumque animal pulmones inflammatos oftendit, neutrum vel foetuit, vel quodpiam aliud putredinis indicium praebuit. Conjectamus igitur Viros Cl., qui alium fimilium experimentorum eventum fortiti funt, forte animalia ad aliquod tempus in calente loco reliquiffe poftquam extincta effent, ubi mortuae carnes in corruptionem vergere citiffime debuerunt: nec dubitamus calorem ex interna caufa, auctoque motu natum, longe diverfum in animalium humores effectum gignere poffe.

22. Illud exquirere volui, utrum animalia, quae inedia pereunt, orta humorum putredine extinguerentur. Quod
etfi

etsi pro certo a multis proponatur, dubia tamen de ea re Cl. Virorum me ad experimentum iterandum excitarunt (ζ''). Cuniculum itaque, quem fames intra dies 21. confecerat ex convulsionibus diligenter explorabam. In eo pinguedineam telam adipe destitutam, & exsuccam observavi; ventriculū, & intestina vacua, nisi quod in intestinis identidem flavae bilis ramenta occurrerent, viscera coetera sana erant. Odor nihil putredinosi emittebat, neque humores aut foetebant, aut cum acidis effervescebant; quare credibile est, aut in carnivoris animalibus alium futurum experimenti eventum, aut alias praeter inediam putredinis causas adjunctas fuisse, ut corrupta, & prava alimenta, quibus observata a Cl. Viris, quorum fides minime suspecta est, putredinis signa tribui possint.

(ζ'') *Myrgagni de caus. & sed. epist. 24. §. 6.*



CAROLI ALLIONII

*Stirpium aliquot descriptiones cum duorum novorum
generum constitutione.*

DESCRIPTIO PRIMA.

ORTEGIA *dichotoma*, axillis ramorum unifloris
Tab. IV. f. 1.

EX radice perenni, longa, tereti, fibrosa cespes nascitur caulium procumbentium, qui ad cubitalem usque longitudinem sese extendunt. Caules continuo dichotomi, quandoque in primis ramis trichotomi, quadrangulares, striati, subasperi, virides, articulati, supra nodosi nodo aliquantum albescente.

Folia primum elliptica, deinde linearia, crassula, acuminata, sessilia, opposita, ad geniculos tantum nascuntur, subaspera, supra canaliculata, subtus longitudinali prominente nervulo donata.

Flos in alis dichotomiae ubique sedet, raro pedunculatus, cujus calyx noctu connivet, diu sole praesertim percussus aperitur, calycinis foliis erectis. Postremi rami duobus floribus finiuntur, uno sessili in ala una foliorum, altero pedunculato, sive ramum finiente, qui paullo infra calycem duas bracteas habet, foliolis ramorum divisionibus oppositis similes.

Calyx ex quinque foliolis concavis, elliptico-lanceolatis, viridibus, margine membranaceo albicantibus componitur. Calycis foliolorum tria interiora florem proprie continent, & longiora sunt; folia duo exteriora aliquantum breviora.

Germen trigonum est instructum stylo viridi, simplici embryonis longitudinem habente, cum stigmate rotundo.

Antherae

Antherae luteae, trigonae, trifurcatae in gremio interiorum foliorum brevibus filamentis insident, calyce breviores, stylo parum altiores.

Capula calyce persistente comprehensa, & ex ovato conica, apice trigona, tribus valvis aperitur, unilocularis, semina minuta continens oblonga coloris spadicei.

In saxosis prope *Javenium* nascitur nova haec *Ortegiae* species, cujus nullam mentionem apud rei herbariae Scriptores reperire licuit. Differt porro ab *Ortegia* LINNAEI spec. plant. pag. 49. sive *Juncaria Salmantica* CLUS. hist. pag. CLXXIV. radice perenni, habitu dichotomo, floribus in foliorum alis sessilibus, & caulibus quadrangularibus, qui in *Juncaria Salmaticensi* Juncorum ad instar teretes esse videntur, quemadmodum ex Clusiana Icone conjicere licet.

DESCRIPTION II.

BASSIA Tab. IV. f. 2.

NOVUM hoc plantae genus, cui *Bassiae* nomen instituo, radicem teretem, ramosam, fibrosam, perennem habet, caulem autem rotundum, parum firmum, continuo, & sine ordine ramosum, ramis iterum similiter ramosis. Primi caulis rami fere decumbunt. Tota planta villo hirsuta est. Ejus altitudo spithamam unam aut alteram ad summum aequat.

Folia lanceolato-lineararia sunt, crassula, compressa, sessilia, alterne, seu potius inordinatim dense posita. Duo autem simul nasci solent, quorum unum duplo longius est, in cujus ala duo flores sessiles adsunt; alterum brevius cum flore uno sessili, & foliorum fasciculo novum ramum facturo.

Flores omnes sessiles sunt in foliorum alis. Flos apetalus; calyx monophyllus, quinquefidus segmentis acutis.

Stamina quinque antheras luteas, didymas supra calycem exerunt.

Styli duo filiformes ex albo purpurei ex embryone nascuntur.

Florescentia autem absoluta calycis segmenta complanata & coalescentia florem claudunt, atque calyx capsula evadit, quae matura semen orbiculatum continet obscuri coloris, non cochleatum, sed in superiori facie circulare sulcum insculptum habens. Ea proportione, qua embryo majorem magnitudinem acquirit, receptaculum in majorem amplitudinem extenditur, & ad basim calycis quinque apparent flavescentes spinulae aequali distantia inter se posita. Calycis & receptaculi substantia firma & coriacea reddita fructum rotundum efficit complanatum, quinque firmulas spinas ex ambitu stellae in modum radiatas habentem.

Stirpis hujusce genus inter *chenopodium* & *salsolam* ambigit. Ab utroque autem differt singulari praesertim calycis in capsulam mutatione. Quamobrem cum sui proprii generis constitutionem mereri videretur, *Bassiam* appellandam censui in perpetuum amicitiae, gratitudinis, & existimationis monumentum erga doctissimum Ferdinandum BASSUM Bononiensem, Virum de universali naturali Historia maxime meritum, qui hujusce plantae semina a praeclarissimo Viro Vitaliano DONATI in Aegypto collecta, & in Italiam missa benevole communicavit.

D E S C R I P T I O III.

LINDERNIA *Tab. V. fig. 1.*

Plantae quam *Linderniae* nomine voco, radix annua est, & ex capillitio teretium albarum fibrarum, modo simplicium, modo ramosarum constituitur, ex quo nunc unus, nunc plures caules nascuntur, qui spirithamae altitudinem ra-

ro attingunt. Ad caulis initium duo oppositi rami saepe conveniunt; reliquo deinde caule & ramis saepius simplicibus. Caules tetragoni sunt, tenuiter striati, angulis acutis, intus cavi, sexdecim circiter membranas habentes, quae ex axe caulis radiatim nascuntur. Planta tota, tenera, succosa, glabra, & viridis est.

Folia opposita, integerrima, erecto-patentia, oblongo ovata, semi-amplexicaulia, sessilia, tribus aut quinque nervis in inferiori facie extantibus exarata, quae non male *Centaurii minoris* foliis comparari possunt; sed longe tenerioris substantiae sunt. Ex singulis alis foliorum pedunculus erigitur quadrangularis, foliorum circiter longitudine, florem sustinens.

Calyx ex quinque erectis linearibus foliolis fit, ex viridi purpurascens, acutis, & a tubo floris vix secedentibus.

Flos dilute purpureus, bilabiatus, tubo floris pene cylindrico: hiatus floris parvus. Labium superius admodum breve, parum concavum, bifidum segmentis subrotundis. Ab eo modice discedit labium inferius, quod recte fere protenditur, magnum, profunde trifidum segmentis rotundis, medio aliquantum majori.

Stamina quatuor ex tubo floris prope orificium orta: duo superiora simplicia, atque sub labio superiori inflexa, duo inferiora, sive infra superiora prope orificium floris nata ex nervo evidentiori, qui ex imo tubo floris nascitur, qui originem dat filamento uno antherifero, qui nempe inflectitur sub labio superiori, dum nervi producti extremitas recta procedens, & a tubo libera facta cornu simplex exhibet sterile, anthera omni destitutum, coloris dilute lutescentis.

Antherae sunt didymae, transversim positae, ex cinereo purpureae.

Stylus filiformis antheris immediate tectus, simplex, apice obscure bifido.

Embryo in capsulam evadit viridem, ovalem, oblongam, calyce comprehensam; unilocularem commissuræ loco fulco & linea aliquantum rubente signato, femina minima numerosa fordida albida continentem, cylindricæ placentæ affixa.

Pluribus locis collecta est rarissima hæc planta in *Pedemontio*; incolit vero loca spongiosa & palustria, & quæ aquis inandata fuerunt. Secus *Sesiam* non longe ab urbe *Vercellarum* nascitur. Legi etiam circa *Frosasum* in palustribus, uti etiam circa *la Mursaja*. Stirpem hanc collegerunt optimi mei discipuli & strenui Botanicas cultores, nunc Medicorum Collegio adscripti, Petrus DANA, & Ludovicus BELARDI, quorum prior circa *Envie*, & in finibus *Bargiarum*, alter autem circa lacum di *Majon*, & inter *Gijani* & *Candeil* plantam hanc copiose nasci observarunt. Solet autem sæpe oriri iisdem locis, quibus *Isnardia* provenit. In America quoque hanc stirpem crescere in literis postremo ad me datis significavit Celeb. LINNAEUS, ad quem olim hujusce plantæ specimen misi, & suspicatur hujusce plantæ femina cum oryza in Europa venisse.

Novæ hæc planta non est, sed a LINDERNIO breviter etiam cum icone descripta. In *Tournefortii alsatici* editione pro novo genere oblata primum est *pyxidariae* nomine, deinde in *Horto alsatico* dicta est *Alsinoides paludosa foliis anagillidi similibus stlosculis monopetalis rubescentibus capsula oblonga*. Una cum Cl. LINDERNIO circa Argentoratum anno 1727. legit elegantem hanc stirpem indefessus stirpium indagator D. GAGNEBIN, cujus specimen etiam benevole ad me misit aliquot ab hinc annis una cum schedula continente ea, quæ habet LINDERNIUS, & brevem illam descriptionem, quam in *flora Irenensi* pag. 237. adjecit Doctissimus HALLERUS. Ipse quidem GAGNEBIN *amirrhinum* etiam *palustre minus centaurii minoris foliis* appellavit, sed animadvertit sui generis plantam esse, eamque *Linderniam* posse

posse vocari. In honorem itaque Cl. LINDERN *Linderniam* appello, sublato *pyxidariae* nomine, quo filicinum plantae genus recentiores Botanici designarunt.

Erit itaque *Lindernia* plantae genus flore bilabiato labio superiore brevi, concavo; inferiori magno trifido, staminibus quatuor instructum, quorum inferiora bifurcata sunt, unum stylum habens, & fructum ferens unilocularem, polyspermum.

Quod attinet ad vires medicas nihil certi statuere licet. Loci natalis conditio, & totius plantae habitus, ejusdemque sapor cum *gratiola* conveniens similes purgantes vires suadet, quod instituenda experimenta decernent.

DESCRIPTION IV.

VIOLA, acaulis fol. palmato multifidis, & laciniatis.

Tab. V. fig. 2.

RAra haec *Violae* species, atque a paucis Botanicis visa, quae apud nos reperta est in jugo *assiete*, ex radice tereti, longa, ramosa, alba, perenni, folia atque flores protrudit instar *violae martiae*. Foliorum petioli unciales fere sunt, semiteretes, intus sulcati, atque extus extante nervo praediti, qui deinde per omnes foliorum lacinias porrigitur.

Folia subrotunda sunt laevia, ultra medium quinquefida, substantiae firmulae, superius obscure & nitide, subtus pallide virentia. Foliorum lobi posteriores profunde & inaequaliter trifidi, medii simplices & tantum in exteriori facie dentati, medius & extremus lobus omnium maximus, in tria subaequalia segmenta profunda trifidus, lateralibus laciniis saepe exterius dentatis. Lacinae omnes lineares fere sunt obtuso sine reflexate, patentes, & divergentes. Haec est frequentior forma foliorum, sed eadem vario ludunt mo-

do; nempe lobi posteriores bifidi interdum sunt, modo mediis & majoris lobi segmenta iterum magis aut minus profunde resecta sunt. Deficit quandoque etiam unus ex mediis lobis. Alias loborum posteriorum segmenta profunde ita secta sunt, ut ex novem lobis folia composita videantur.

Scapi florales inter folia eriguntur petiolis breviores, & a foliis ipsis saepius tecti duas oppositas squamas, sive bracteas supra sui medium habentes; purpuro virent, teretes, leviter striati, propè florem aliquantum complanati.

Flos nutat. Calyx viridis, conicus, ex quinque foliolis omniventibus compositus, gibbis, ovatis, acutiusculis.

Petala quinque in perfectis exemplaribus, sed saepius tria aut bina, inter calycis & germinis basim nascuntur, unguibus linearibus, pellucidis, germini appressis, quae, ubi in bracteas expanduntur, quinque antheras albas, bifidas habent, quae supra germen coronae instar tubam circumdant. Bractea ovato acutiuscula est concava, & cochleari formis apice reflexo & emarginato ex flavo purpurascens colore tincta, margine albo. Petala supra germen elata, conniventia, ipsum obtegunt.

Stylus simplex brevis cylindricus, cum stigmate barbato, crasso, arcuato, albedo, albo staminum pulvere saepe conspersus.

Embryo in magnam capsulam excrevit propendentem, & versus terram incurvato scapulo reflexam de more reliquarum violarum, quae trigona est, obtusa, trivalvis, cordata, femina laevia ovata obscure purpurea quindecim & ultra continens.

Haec violae species fortasse eadem erit cum *Viola montana folio multifido* CLUS. *hist.* pag. 301. & BAUH. *hist.* III. pag. 545. sive *Viola acauli foliis pinnatifidis* LINN. *spec. pl.* 1323., quam nuperrime cum brevi descriptione recensuit inter helveticas stirpes Celeb. HALLERUS *emend.* VI. n. 61. Nonnulla quidem sunt huic Violae ab Auctoribus tributa,

tributa, quae cum nostra Viola non consentiunt; numquam enim folia habet in decem angusta segmenta ad pediculum discissa, ut refert J. BAUHINUS, & icone exhibet. Praecl. HALLERUS suae Violaefolia, ex tribus paribus pinnarum componi affirmat, & flores ad Violam martiam accedere. Non ausim tamen separare, cum sciam hujusmodi folia lobata, & multifida pro ratione locorum dissimilem faciem exhibere, atque minima nostrae Violaefolia posse aliis in locis majorem fortasse amplitudinem obtinere. Cum itaque unice extet Bauhiniana icon, quae rudis & imperfecta est, opportunum visum est raram hanc stirpem & accurate describere, & ejusdem iconem exhibere.

*Explicatio Tabularum ad has descriptiones
pertinentium.*

Tab. IV. fig. 1. ORTEGIA

- a* Flos per microscopium auctus, ut stamina magis pateant.
- b* Filamentum cum anthera.
- c* Flos naturalis magnitudinis.
- d* Embryo cum stylo in magnitudine auctus.
- e* Capsula naturalis magnitudinis.

Tab. IV. fig. 2. BASSIA

- a* Flos per microscopium auctus, ut stamina videantur.
- b* Stamen separatum.
- c* Calyx in naturali sua magnitudine.
- d* Semen in sua magnitudine per microscopium auctum.
- e* Semen a folliculo suo separatum.

Tab. V.

Tab. V. fig. 1. LINDERNIA

- a Floris labium inferius cum portione tubi, ut appareant stamina inferiora bifurcata.
- b Fructus sive capsula.
- c Fructus apertus cum seminibus placentae affixis.

Tab. V. fig. 2. VIOLA acaulis, foliis palmato-multifidis, & laciniatis.

- a Embryo jam grandior factus cum petalis: omnia in sua magnitudine per microscopium aucta.
- b Petalum cum anthera microscopio auctum.
- c Folium separatim exhibitum, sicuti solet frequentius esse.

Plantae omnes praeter floris partes in naturali sua magnitudine pictae sunt.



M A N I P U L U S

INSECTORUM TAURINENSIIUM

A CAROLO ALLIONIO

E D I T U S.

MANIPULUS hic insectorum pertinet ad Cl. Virum Ottonem Fridericum MÜLLER, Danum, Acad. Imp. Nat. Cur., Societ. Scient. Boicae, & Helveticae Sodalem. Cl. hic Vir per Italiam litterarium iter facturus cum in hanc Urbem venisset, rerum hujusce. regionis ad historiam naturalem pertinentium feracitate excitatus, insectorum, atque etiam novorum non exiguam copiam in nostra patria adesse ratus, me quammaxime hortatus est, ut vellem hanc etiam naturalis historiae partem excolere, atque insecta colligere, quod per optimorum discipulorum naturalis historiae studio deditorum operam fieri curabo. Ipse autem per loca quaedam a me ipsi indicata, uti per colliculum Cappucinatorum, & secus fl. Duriam aliquot ambulationes proxime elapsi Julii postremis diebus suscepit, excursionum comite Petro DANA meo discipulo, & diligenti naturalis historiae cultore, cum optimum virum, quod gratissimum certo fuisset, sequi non possem clinicis curis impeditus. Paucae vero ambulationes cum summa Cl. Viri oblectatione obtulere non pauca insecta, & ipse gavissus plurimum est se reperiisse in nostra regione Fridrichsdalina, Lapponica, Aegyptia, imo etiam Americana; tum etiam quaedam, quae minus nota, ac nova sunt. Manipulum itaque sollicite conscripsit, quem Commentariis nostris adjicio, ut rem gratam, utilemque naturalis historiae amatoribus faciam. In hoc autem manipulo ita recensentur collecta insecta, ut quae jam definita sunt, nominibus tantum tri-

via-

vialibus erutis ex Perillustris LINNAEI *Sist. natur. ed. 10.*
Ejusdem *Fauna Suecica*, & *Fauna sua Fridrichsdalina* indicen-
tur; quae autem nova, aut minus nota sunt, ad sua ge-
nera cum brevi descriptione referantur.

COLEOPTERA.

- SCARABAEUS** *auratus*
variabilis.
cervus.
virens, muticus capite thoraceque glabris,
aeneis: elytris rugoso-testaceis: pedibus
nigris.
Totus glaber, sed pectus villosum. Co-
lor capitis, thoracisque punctis minimis
excavati ex aeneo viridis, uti quoque
scutellum, & sutura elytrorum. Abdomen
lateribus maculis pallidis, subius glaber-
rimum.
- DERMESTES** *mollis.*
stercoreus.
- SILPHA** *atrata.*
- CASSIDA** *viridis.*
- COCCINELLA** 2. *punctata.*
5. *punctata.*
7. *punctata.*
9. *punctata.*
13. *punctata.*
22. *punctata.*
2. *pustulata.*
- CHRYSOMELA** *graminis*
alni.
nymphaeae.
staphyleae.

CHRYSOMELA *populi.*

merdigera.

4. *punctata.*

Taurinensis, cylindrica, atra: elytris luteis, punctis sex nigris.

Elytra marginata flava, versus basim cujusvis punctum unicum nigrum, in medio duo.

luteola, oblonga, lutea: thorace bipunctato: elytris fascia longitudinali nigra.

Caput, thorax, elytra, pedes lutei; in fronte duo puncta, in thorace utrinque unum, in quovis elytro fascia lata, nigra. Oculi & antennae fusca. Abdomen nigrum, puncta duo obsoleta basim elytrorum versus.

CURCULIO

scrophulariae.

crassus, brevirostris, niger: elytris convexis striatis.

Totus niger. Thorax globosus punctis elevatis; in cujusvis elytrorum striae cavitate series una punctorum distinctorum. centaureae, brevirostris, oblongus, griseus: elytrorum fasciis duabus obliquis fuscis.

Inter majores est. Totus griseus, punctis elevatis, nigris, inaequalibus sparsus. Puncta haec faciunt, ubi pilis minimis obsita, colorem griseum, ubi glabra, subfuscum; hinc fasciae duae obliquae fuscae in quovis elytro formam duplicis V. mentientes.

ATTELABUS

coryli.

apiarius.

CERAMBYX

cerdo
textor.
moschatus.
linearis.

sartor, niger, thorace mutico subglobofo: elytris fuscis, lineolis, punctoque albis.

Minor: nigra sunt caput, thorax, oculi, antennae, pedes; elytra fusca; apice, lineaque media obliqua curva, ac basi puncto, lineolisque duabus albis, minimis.

LEPTURA

attenuata.
melanura.
necydalea.

Thorax subglobosus punctis quatuor nitidis; margo elytrorum non purpureus; femora antica elevata nigra, reliqua ferruginea.

marginata, nigra thorace subglobofo: elytris subulatis utrinque marginatis lutescentibus.

Animalculum totum nigrum, elytris exceptis, quæ flava, abdomineque breviora. varia, thorace globofo, elytrisque flavo-virentibus: fasciis nigris.

Caput, thorax, abdomen, elytra flavo-virentia, in quibusdam individuis cinerea; in thorace fascia transversa nigra; ad basim elytri figura C, medioque duae fasciae nigrae. Pedes nigricantes. Antennae nigrae.

CANTHARIS

melanura.
sanguinea.
viridissima.

In quibusdam femora postica valde crassa.

CANTHARIS *tomentosa*, nigra, thorace, teretiufculo: elytris tomentosis fulcis.

Tota nigra. Elytra sola luteofusca subpilosa, ad lentem striata.

ELATER *aterrimus.*
ferrugineus.
badius.

CICINDELA *campestris.*

BUPRESTIS *nitidula.*

oc̄to-maculata nigra: elytris maculis oc̄to aureis.

Thorax glaberrimus, nitidus, niger; antennae, pedesque primi lutei. Elytra striato-punctata, basi macula curvata, medio subquadratae duae, quarum infima basim versus extenditur; apice macula reniformis fulva.

MORDELLA *aculeata.*

paradoxa, antennis pectinatis: capite, thorace, elytris luteis.

Thorax haud postice trilobus, nec elytra apice nigra. Abdomen truncatum segmentis omnibus margine, & dorso nigris. Pedes nigri, femora posteriorum vii & articuli plantarum basi lutea; varietatem tamen ejus, quae in Fauna Svec. describitur, credo.

STAPHYLINUS *niger.*

FORFICULA *auricularia.*

BLATTA *Lapponica.*

GRILLUS *viridissimus.*

verrucivorus.

rufus.

viridulus.

bifasciatus thorace subcarinato, rugosus: elytris griseis: fasciis duabus fuscis.

Color ex rufo-griseus. Caput & thorax rugosa. Pectus & abdomen subtus punctis sparsis fuscis. Antennae fuscae thorace paullo longiores. Elytra albidiora fascia altera in medio, altera media inter hanc & thoracem fuscis. Alae caerulecentes fascia nigra, apice albae.

caeruleus, thorace subquadrato: maculis, & punctis ubique caerulecentibus.

Color griseus, capite, thorace, basi elytrorum, pedibus, & dorso abdominis, ut Lucius elixus, caeruleus. Alae hyalinae basi caeruleae. Antennae griseo, & caeruleo annulatae, thorace paullo longiores.

HEMIPTERA.

CIMEX

annulatus.
marginatus.
haemorrhoidalis.
pabulinus.
laevigatus.
hyoscyami.
equestris.
griseus.
baccarum.

Italicus, sanguineus, scutello longitudine abdominis: subtus maculis, supra fasciis longitudinalibus nigris.

Ruber, in thorace sex fasciae longitudinales, in scutello quatuor nigrae, abdomi-

dominisque margo & inferior pagina nigro, & rubro variegata. Alae superiores apice nigrae, inferiores nigricantes.

4. punctatus, oblongus, lamina thoracis elytrisque luteo-testaceis: maculis quatuor nigris.

Caput, thorax, abdomen, scutellum subcaerulea; puncta duo nigra in thorace, huic adjacet lamina utrinque macula nigra. Elytra lutescentia, margine lineola, apice macula alba, cui nigra conigua est. Apice elytri membranaceo punctum quoque album. Pedes flavescens; femorum apex niger.

- Segusinus, antennis apice capillaribus: corpore oblongo nigro: elytrorum apicibus coccineis.

Totus niger, glaber; apice elytri macula coccinea, extremo apicis nigro. Pedes flavescens, basis femorum nigra.

APHIS

jaceae.

LEPIDOPTERA.

PAPILIO

Jo.

Ajax.

Machaon.

Atalanta.

Antiopa.

Maera.

Galathea.

Cardui.

Rhamni.

Brassicae.

PAPI-

*Jurtina.**Janira.**C album.**Hyale.**Aegeria.**Prorsa.**Urticae.**Lucina.**Cinxia.**Lathonia.**Arion.**Argiolus.**Idas.**Comma.**Malvae.**Tages.*

Linea, alis integerrimis divaricatis fulvis immaculatis: primoribus supra lineola nigra.

Similis Pap. Comma, at prorsus immaculatus.

*Populi.**Stellatarum.**Porcellus.**Filipendulae.*

Virginea, alis superioribus cyaneis: maculis quinque, punctisque totidem rubris albo marginatis.

Similis Filipendulae. Alaë inferiores coccineae, margine exteriori caeruleo, inferiori testaceo; differt tamen thorace virenti, margine collarique duplici albo, maculis punctisque rubris peripheria alba cinctis. Puncta haec numero quinque occupant.

*cupant locum sextae maculae Filipendulae
versus apicem alae.*

SPHINX

ligata, alis omnibus nigris albo maculatis:
abdominis fascia duplici aurea.

*Antennae apice albido. Abdomen ce-
ruleum basim, & medium versus fascia
aurea. Macula aurea in claviculis 4. po-
sticorum pedum.*

variegata abdomine barbato: alis hyalinis,
margine ferrugineis.

*Segmentum abdominis primum, & se-
cundum viridia, quartum, & quintum
ferruginea, quintum, & sextum lutea,
barba laterali horum alba, terminali
nigra. Abdomen subtus ferrugineum. Tho-
rax, & caput viridia. Pedus album.
Antennae nigrae. Alae albae, pellucidae,
margine ferrugineo.*

PHALAENA

*Caja.
salicis.
plantaginis.
ypsilon.
pacta.
grossulariata.
glaucinalis.
verticalis.
purpuralis.
atomaria.
viridana.
trigonella.
Swamerdamella.
pentadactyla.*

NEUROPTERA.

LIBELLULA

*quadrifasciata.**Fridrichsdalensis.**sanguinea.**frumenti.*

triedra, ϵ alis omnibus basi lutescentibus: puncto marginali albido: abdomine triangulari.

Pedemontana, alis hyalinis macula fusca: puncto marginali corporeque sanguineo.

β alis hyalinis macula fusca: puncto marginali luteo: abdomine fulvo.

In ϵ frons, pectus, abdomen punctumque marginale rubra. Thorax & macula alarum, quae puncto marginali approximatatur, fusca. In β frons, pectus, punctum marginale lutea. Thorax abdomenque fulva. Pedes utriusque nigri.

virgo β , & ϵ .

puella α , β , δ .

EPHEMERA

bioculata.

HEMEROBIUS

perla.

Chrysops.

PANORPA

communis.

Italica, lutea alis aequalibus, puncto marginali: abdomine falcato.

Facies omnino Tipulae, at alae quatuor, rostrumque Panorpae, licet minus communis. Totia lutescens. Antennae setaceae, oculi ocelli, & apex rostri fusca. Abdomen falcatum, supra luteum, subtus subvirens apice fusco. Pedes longissimi, apice tibiae spina duplex. Alae aequales lutescentes puncto marginali concolori.

HYME-

HYMENOPTERA.

TENTHREDO *pratensis.*
viridis.
padi.
ustulata.
saltuum.
septentrionalis.

quadrinaculata, antennis clavatis, nigra pilosa: fronte, scutello, abdominisque maculis quatuor flavis.

Maxima. Tota nigra. Frons, scutellum, abdominis segmentum secundum, & tertium superne fascia lata flava; haec in secundo utrinque incisa, in tertio omnino interrupta maculas quatuor constituit. Thorax & segmenta superne, & inferne glabra, marginibus pilosa. Antennae clavatae; maxillae fortes. Pedes pilosi. Tarsi setis rubris. Alae fulvae.

bifasciata, antennis septemnodiiis nigra: abdominis fasciis duabus, tibiisque posticis albis.

Tota atra. Segmentum abdominis secundum, & tertium supra album; tibiaeque posticorum. Quibusdam individuis duo puncta alba in quarto segmento.

ICHNEUMON *extensorius.*
compunctor.
manifestator.
glaucopterus.
appendigaster.
desertor.
luteus.

comitator.

punctator, niger, abdomine subtus albido bifariam punctato: pedibus subflavis.

Niger immaculatus. Abdomen subtus albidum punctis utrinque quatuor nigris.

Pedes lutescentes.

SPHEX

*fabulosa.**Aegyptia.*

VESPA

coarctata.

quinquefasciata, nigra, thorace lineis punctisque, abdomine fasciis quinque, punctisque quatuor luteis.

Apex antennarum, & pedes fulvi; femora basi nigra; in basi thoracis, alaeque versus lineolae. Dorso puncta quatuor, lateribus utrinque unum; versus juncturam abdominis loco scutelli tres lineae, quarum superior transversa in quibusdam interrupta, flava; in ipsa junctura abdominis maculae duae flavae. Abdominis fasciae quinque incisae, quarum prima remota dorsum tantum occupat; quatuorque puncta lutea, duo majora inter primam, & secundam fasciam; minora in basi abdominis. Apex quoque luteus. Datur varietas duplo minor.

horticola, nigra thorace lineola, punctisque duobus: abdomine fasciis quinque interruptis, pedibusque luteis.

Antennae fulvae; lineola interrupta basi thoracis; integra inter alas.

6. *maculata*, nigra, thorace immaculato: abdomine maculis 6. albis: alis basi fulvis.

Tota atra, punctis excavatis hirta, parum hirsuta. Ocelli nulli. Abdominis segmenti 2.ⁱ & 3.ⁱ dorsa maculae. 4. magna: aequales, 4.ⁱ duae minores albidae. Alae umbraticae a basi ad medium aureae.

APIS

*manicata.**succincta.**iruncorum.**hortorum.**pratorum.**terrestris.**lapidaria.**acervorum.**muscorum.*

inlubrica, nigra nitida: alis caeruleis nitentibus.

Maxima. Tota nigra glabra. Margo thoracis, pectus, abdomen subtus., ac pedes parum hirsuta; tarsi posticorum hirsutissimi. Alae pulcherrimae. Iridis colore caeruleo nitentes., lumini obversae saturate fuscae.

fulva, hirsuta nigra: thorace abdomineque fulvis.

paludosa, hirsuta nigra: thorace antice, ac postice, abdomine antice. flavis: ano albido.

Tota hirsuta atra; Thorax marginie antico, & postico, abdomen antico luteo. Segmentum penultimum, ac antepenultimum abdominis lutescentia; apex niger.

FORMICA

*Herculeana.**fusca.*

Miscell. TOM. III.

c. c.

DIP-

D I P T E R A.

TIPULA

crocata.

MUSCA

*arbutorum.**menthastris.**noctiluca.**carnaria.**domestica.**cadaverina.**scolopacea.**mellina.*

valentina, antennis plumatis glabra: thorace ferrugineo: abdomine flavo cingulis duobus nigris.

Magna. Frons cornea flava. Oculi fusci. Thorax, & scutellum ferruginea, nitida setis nigris cincta. Pedes obscurius ferruginei. Abdomen flavum marginibus primi, & secundi segmenti nigris; subtus fasciae nigrae. Alae fulvescentes.

cincta, antennis setariis pilosa, thorace caerulefcente: abdomine ferrugineo: linea dorsali nigra.

Os argenteum. Thorax niger, glaber lincis tribus lacteis. Abdomen ovatum setosum, ferrugineum, dorso linea longitudinali interrupta nigra, medio cinctum lineola alba certo suo visibili. Pedes nigri femora flavescencia.

CULEX

pipiens.

ASILUS

*forcipatus.**tipuloides.*

A P T E R A.

TERMES

fatidicum.

ACARUS

gymnopteronum.

JOH. PETRI MARIAE DANA

*De Hirudinis nova specie, noxa,
remediisque adhibendis.*

HIRUDO alpina, nigruans, ventre, ad medium bilineato,
explanato, corpore ab ore, & cauda nulla depres-
sione distincto Tab. VI. fig. 1. ad 6.

A Nimäculum est vulgarem Hirudinem habitu quadante-
nus referens, sed multo eadem constantissime minus,
duarum linearum longitudinem in summo incremento non
excedens, latitudinem linearem raro superans, crassitie li-
neam non attingens; quod non exiguam mutationem in
motu progressivo subit. Primo enim brevius factum veluti
in hemisphaerium parumper oblongum intumescit; postea
porrectum, & extensum valde oblongam formam acquirit.
Faciem ejusdem superiorem convexam *dorsum* appellabi-
mus: inferiorem complanatam *ventrem* dicemus: attenuatum
extremum, quod in motu progressivo anterius reperiri solet
oris; quod vero posterius *caudæ* nomine, licet improprio,
designabimus. Motum illum quo decurtatur, *contractionis*,
quo autem extenditur, & porrigitur, *distensionis* seu *exten-
sionis* nomine vocabimus. In Tab. VI. fig. 1. animalis
non contracti dorsum, fig. 2. ejusdem venter, fig. 3.
ejusdem contracti dorsum, sed omnia naturali magnitudine
exhibentur. Similia ostendunt fig. 4., 5., & 6., sed
magnitudine per microscopium adaucta.

Animaculi non contracti (*Vid. fig. 1., & 4.*) dorsum
universum primo aspectu lucido-nigrescens apparet. At, si
attente observetur in media, elatiorique parte intensius ni-
grescit, quam versus margines, ubi sensim sensimque niger
color in griseum obscuriorem transit. Quod si oculorum acies
lentis vitreae adjumento intendatur, e fundo, ut ajunt,
gri-

griseo-albescente nigri quidam villi elevari videbuntur, qui densiores sunt in summo dorso, & paulatim rariores fiunt ad margines, atque ea propter magis apparentem prope hos griseum colorem relinquunt.

Inferior corporis superficies complanata est, (*Vid. fig. 2. & 5.*), & univérse magis quam dorsum ad griseum colorem accedit. Nascitur ab ore linea prae caeteris animalis partibus albescens, quae ad duos longitudinis trientes recta extenditur: & in albam vesiculam *b* desinit, quae in contractione animalis magis prominula, & quasi tumescens, quam in extensione observatur.

Hujusmodi albescentem lineam utrinque sequitur linea nigri obscuri coloris (*Vid. fig. 5.*), quae vesiculam cingit, & ultra vesiculam nigrum quoddam punctum, sive maculam nigram imprimit; linea nempe, quam albam diximus, area est duabus nigris lineis comprehensa.

Extremum anterius *O* fit a corpore sensim, ad longitudinem semilineae attenuato, & producto in semiconum apice exacte truncatum, & in illius elongatione extantibus angulis quasi cornutum. Hoc proprie nomen oris tantummodo meretur, cum in parte sui inferiore explanata etiam levis emarginatura per lentem conspicua fiat, quae angulis est interposita, & semilunata videtur; cujus vestigium apparet ad *O* (*fig. 5.*)

Posterior animalculi extremitas *C* rotunda fere est, neque ullo notatur divisionis vestigio, quo a corpore separetur, neque ita attenuatur, ut caudae nomen proprie mereatur.

Margines planam inferiorem, a convexa superiori Hirudinis superficie distinguentes concolores fere ubique apparent, & quemadmodum reliquae partes, vix ulla nisi per microscopium conspicua rufa in quolibet ejusdem motu exasperantur; quod in vulgari Hirudine ad oculum observatur.

Contractione, & elongatione alternata, ut diximus, motus suos progressivos absolvit Hirudinis ista species. Dum decurtatur anteriorem partem figit, & ad illam sui posteriorem extremitatem adducit. In hoc motu ita contrahitur, ut ad oblongum hemisphaerium aliquomodo accedat; dimensio verticalis, & transversa adaugentur, ad os usque totum corpus crascescit; tuncque magis nigrum, & lucens dorsum observatur (*Vid. fig. 3., & 6.*). Dum elongatur, & magis proprie progredi dici potest, caudam firmatam servat, & anteriorem partem cum ore elongando producit; verticalis, & transversa dimensio imminuitur, longitudo eousque saepius adaugetur, ut duplo major quam in priori contractione fiat. Nullo horum motuum tempore animalis os in orbiculum dilatatur, sed prope illud gracilescit, & extenuatur ita uniformiter, ut nulla depressio collum a reliquo corpore distinguat, & designet. Quae etiam de Cauda patentius vera sunt. Haec autem omnia constanter observavi ita se habere in triginta, & ultra individuis, quae ad examen revocavi.

Experimenta quaedam nunc addam suscepta, ut in hujus Hirudinis naturam inquirerem. Digito fonti immerso supercandere, aut morsu adhaerere constanter recusabat.

Cum aquae nativae parva portione simuleducta haec Hirudo, quamdiu illa frigeat, alacriter vivere, & moveri pergebat: quoquomodo autem aqua incalesceret ex manus, Solis, aut atmosphaerae calore male se habere incipiebat; agitabatur primum, deinde languescebat, &, nisi frigida aqua renovaretur, brevi moriebatur. In arido autem relicta citius peribat. Tentatum est vivas Hirudines aqua immerfas in planitiem transferre, ea adhibita diligentia, ut aquam neque Solis, neque manus calor calefaceret; sed, anteaquam ex montibus descensum esset, semper interierunt.

De industria resupinatum hoc animalculum extra aquam progredi non poterat, sed varie inflectebatur, donec cau-
dam

dam, vel os figere posset. Tunc facile in pronum, naturalemque situm restituebatur, unde facile motus suos progressivos libere absolvebat.

Multipli ratione hujus hirudinis corpus dissecti, omnibus partibus diligenter examinatis microscopii ocellis multiplicantis auxilio. Nihil aliud autem in ipso detegere potui praeter tubum tenuissimum, pellucidum, & intestinulorum more per interiora, innumeris circumvolutionibus factis, serpentem, qui resectus pellucidum humorem plorabat. Post quatuor aut quinque horae minuta hujusmodi tubulus motus aliquos contractiles adhuc servabat. Viginti minorum spatio Hirudo omnis arefacta nihil organici praeferebat. Imo Hirudulae aliae integrae super calentem a Sole lapidem per semihoram expositae, ita exsiccatae sunt, ut ad nihilum fere redactae viderentur, in sui vestigium exsuccam tenuem pelliculam supra lapidem relinquentes. Manibus quoque paullo diutius contrectatae, aut asservatae cito exsiccabantur. Caeterum fere gelatinosa valdeque tenera animalculi interior substantia membrana tenui, & debili obtegitur, quae separata pellucescit, sed, dum contentis referta est, opaca apparet, & obscurior.

Inter Hirudines recenseo licet cum notis a Celeb. LINNAEO generi Hirudinis assignatis non plane consentiat. Neutquam enim habet os, aut caudam in orbiculum expandendam, sed habitus omnis, formaque Hirudinis speciem esse declarat.

Augusto mense habitantem vidi in fundo alpinorum fontium, quotquot fere editiores, & Soli minus expositos fecus viam invenimus, qua a R. P. Cisterciensium Monasterio per alpes, & sylvas ad Garexium itur. Neque infrequens etiam invenitur in vicinis, editisque alpibus ad Garexii Commune proprie pertinentibus versus *le Caranque*, & *Batifol*. Supra adversas quoque alpes *Bric d' Mindin* dictas non raro occurrere notatum est. In reliquis vero ejusdem loci

montibus, & alpibus, in conterminis Ulmetanis, in Apenninis Ligurum proximis, nec non in caeteris Ulmetae, Tendae, Brigaeque ad Carlinum, & Viosennam fertilissimis, quas deinde, plantarum exquirendarum causa, conscendimus, alpibus, nullibi harum Hirudinum aliquam reperire potuimus; quamquam acquisitae notitiae non immemores fontes singulos, quos offendimus, ideo diligenter inspexerimus.

Vernacula lingua apud eos alpicolas hae Hirudines dicuntur *le Sioure*, aut *Souire*. Notissimae autem cuique ibi sunt, atque ab iis quam maxime cavent, cum vetusta, & malis eventibus nimium confirmata apud ipsos, observatione constet, tum pecoribus, tum hominibus adeo infensa haec animalcula esse, ut certam necem afferant, si incaute cum aqua deglutiantur, nisi prompte auxilium afferatur. Quamobrem solent non sine cautela horum fontium aquam bibere; aut enim prius accuratissime ab his animalculis mundant; aut, ut omne periculum tutius effugiant, cum eadem in fabuloso fundo vivant, profundius fontem excavant, & aquarum commotionem avertentes ex summo fonte hauriunt. Eadem adhibita cautela pecora ad fontes adducuntur.

Singulari harum Hirudinum specie, earumque noxa percussus, diligentissime ab alpicolis sum fuscitatus ea omnia, quae longa observatio eosdem docuerat, atque animadverti fuisse singulos hac in re consentientes. Symptomata itaque, quae ex eorum communicatis notionibus collegi, haec sunt. Aegri hujusmodi primum conqueruntur post ingestionem animalculi de quodam sensu rofionis, terebrationis in ventriculo. Ventris totius tormina adeo acerba cum vomendi conatibus accedunt, ut, manibus ventri continuo appressis, & inflexo trunco, ipsum assidue comprimere cogantur ad doloris atrocitatem aliquomodo diminuendam. Aliqui vehementer adeo memoratis doloribus torquentur, ut neque stare, neque se erigere, multoque minus domum redire queant

queant, sed in terram saepe concidant: aestus dolorifici sensum in ventre percipiunt; dentibus saepe strident; exagitantur; concutiuntur; frigescent; cum furore per intervalla delirant; singultiunt; vomunt; vultu livent. Alii protinus toto corpore post refrigerationem convelluntur vehementissime, & incalescent. Omnes sudore, ac frigore demum superveniente, moriuntur, saepiusque ne integro quidem elapso die miserrime pereunt. Aliqui, licet rarius, diem alteram attingunt.

Atque haec ita quidem contingere visa sunt, si absque re mediis aegri perierunt. At ubi paullo serius remedia opportuna exhibita sunt, pleraque morbi symptomata mitiora quidem fieri, alia vero plane tolli observatum est; difficile tamen, & tarde sanitas perfecta, & pristina reddita est.

Caeterum e mortis faucibus fere omnes ereptos generatim afferunt, quibus sal, vel oleum, & agarium prompte dari potuerint, quae ideo tamquam antidota ab ipsis reputantur, ut maximum vitae periculum in mora positum declinetur. Paucissimos enim absque remediis, vel ob loci distantiam, vel ob sociorum defectum id fuerit, servatos fuisse norunt; eosque nonnisi post convulsiones, & mentis alienationes, iisdem postridie remittentibus, domum redire potuisse, & difficile convalescere retulerunt.

Agarium quod pertinet apud ipsos remedium est prae vicinorum laricum copia vulgatissimum. Ideo exsiccatum domi servare, & in pulmento cum pipere mixtum in omnibus fere morbis indiscriminatim adhibere solent. Non infrequenter ut perpurgentur, & vomant, cum oleo, rarius vero cum lacte, miscent. Nihil exinde mirum, si contra Hirudinis descriptae noxas similiter adhibuerint; si ejusdem vim, tamquam omnium efficacissimi antidoti, experimentis dudum probatam unanimes extollant.

Salis communis in similibus casibus utilitates eximias aliqui retulerunt, & Chirurgus ipse confirmavit; rarius tamen

nec nisi agarici, & aliorum defectu in hominibus usu venisse intellexi.

Sola aqua tepida, lactis sero, vel lacte copiose, & prompte ingestis propter reliquorum defectum tanta illa symptomata plerumque mitescere observarunt; non tamen cuncta, quemadmodum ab agarico, tolli deprehenderunt; imo saepius exinde nonnisi post menses aegros sanitati restitui ajunt, quo tempore cum ciborum inappetentia, & languore, ventris tumore, & levi dolore, inertes, & excolores vitam degunt.

Haec praecipua sunt, quae ex veridicorum hominum consentientibus responsionibus collegi, atque publici juris facienda esse putavi, tum ut iter per eas regiones facientes ab iisdem caveant, opemque, si opus fuerit, necessariam noscant; tum quod existimaverim hujusce Hirudinis Historiam omnibus rerum naturalium studii cultoribus acceptam esse futuram.

Huic commentariolo aliud adjungam, quod agit de aliquot animalibus, quæ vulgo *Urticae marinae* dicuntur. Has porro omnes observationes institui in postremo botanico itinere, quod, favente Excellentissimo, & Amplissimo Marchione CAISSOTTI Supremo rei literariae universae Moderatore, per extremas apenninas alpes suscepi, & in Comitatum Nicaensem descendens ad usque maritimas oras produxi. Cum vero comitem itineris habuerim Franciscum PEYROLERIUM botanicum Regium Pictorem, idcirco horum animalium icones eo meliores subnectere possum, quod saepius viventia animalia vivis coloribus statim ab eodem accurate pingi curaverim.

E J U S D E M

*De quibusdam Urticæ marinae vulgo dictæ
differentiis.*

I.

ARMENISTARI.

GENUS. *Animal corpore sub-cartilagineo, tenui, complanato; basi ab erecto velo divisa, arcubus lineata, margine tentaculato.*

SPECIES. *Armenistari tentaculis in membranam perfecte coalitis.*
Tab. VI. fig. 7. & 8.

EMinus visum hoc animal totum laete caeruleum apparet; sed propius, & diligenter inspectum una cum caeruleo argenteum colorem præferet. Duabus planis, tenuibus cartilagineo-membranaceis partibus, componitur, quarum una *p q r s* (fig. 7. & 8.) amplior, & oblonga est; & eo quod inferius in animali aquae imposito reperiri solet, *basis* dicetur: altera vero *q z r* (fig. 8.) inaequaliter triangula, majorique suo latere *D C A* perpendiculariter priori affixa est, & quoniam velum erectum representat, *veli* nomine distinguetur, eoque libentius, quod ab hac voce generis hujus altera vera species *Veಲ್ಲae* nomen jamdudum habuerit.

Basis animalis *p q r s* ovali-oblonga est, valdeque obtusa. Summa illius longitudo *p C r* ad duas fere uncias extenditur; latitudo vero unciam vix aequat. Superior illius superficies leviter convexa, est, & in duas aequales partes a velo distinguitur, quod ita super ipsam oblique cadit, ut inde facta sectio *A C D* angulum acutum faciat cum linea *p C r* majorem longitudinem ipsius baseos representante.

Inferior

Inferior ejusdem basis facies (quæ tota apparet in *fig. 7.*) leviter concava est, potissimum versus centrum C: longe ellipticam rufescentis coloris maculam habet ab eodem centro ad tres lineas utrinque productam juxta ipsius longitudinem, quæ in sui medio ultra lineam lata est. Hujus maculæ centralis portio communicare videtur superius cum sinuosa cavitate superposita CX, quæ ad velum pertinet.

Utraque baseos superficies tota tegitur a membrana, sive pellicula tenui, firmula, talcoso, & argenteo fere nitore splendente. Utraque tenuissimam cartilagineæ indolis substantiam intercipit, necnon plures caeruleos arcus, sive potius canales caeruleum humorem continentés. Ex horum canalium, & cartilagineæ substantiæ arcta cum membranis unione, firmitudo, & elasticitas vere cartilaginea baseos pendere videtur, quamvis humores ipsi ad id etiam conferant. Exsiccati enim Armenistari basis fragilis fit, atque tunc tenuissima cartilaginea substantia membranis, & canalibus interposita difficillime ab iisdem separatur, & potius sub specie squamarum, quam integræ cartilaginis oculis subjici potest.

Componi videtur velum *qzr* (*fig. 8.*) non modo ex productione membranarum baseos, sed etiam ex tenuissima cartilaginea lamina iisdem inclusa. Quamvis enim per sectionem oculis illa non subjiciatur; digitus tamen cartilagineas proprietates, & præcipue rigiditatem distinguit, quæ a simplici membranarum unione vix produci posset. Nulli autem rei aptius comparari potest recens velum, quam tenui laminae talci supra basin erectæ, sive pelluciditas, sive tenuitas cum rigida flexilitate conjuncta attendantur. Margo rigidus veli superior inaequaliter crenatus, aut irregulariter undulatus est, neque ultra eundem cartilaginea substantia extenditur. Ipsi vero membranæ sub tenuissimæ pelliculæ specie conjunctim ultra illum ad lineam extenduntur, & præsumma pelluciditate, & tenuitate in animali ab aqua educto

oculos pene fugiunt, & supra rigidam veli partem concidunt; sed facillime rursus velo aquae immerso conspiciendae sunt sub specie fluctuantis, & mobilissimae pelliculae. In recenti velo *q z r* lineae quaedam versus basim adnotantur, quae sensim, sensimque adscendendo versus superiora disparent, & evanescunt. Nullas vero, ut in *Veella*, lineas juxta veli longitudinem arcuatas, & ipsius limbo subparallelas videre potuimus.

Exsiccatum velum omnino pellucidum, basi multo tenuius, valdeque fragile fit; nullumque amplius in ipso linearum vestigium conspici potest.

Ubi inferius veli latus incipit a convexa baseos facie sinus caeruleus *DA* ex fusco notatur, qui versus medium, major est; sensim vero versus utramque extremitatem juxta *D*, & *A* evanescit. Producitur iste sinus a superiori baseos membrana, quae, dum ex utraque parte continuatur, ut in velum *q z r* faceat, hoc cavum spatium intercipit eo majus, quo centro *C* propius. Verticaliter quoque earumdem membranarum recessus per medium velum a centro superius continuatur. Et inde producta verticalis cavitas *CX* (*Tab. VI. fig. 8.*) versus summitatem *z* dirigitur, & in apicem sensim extenuata paullo infra mediam veli ejusdem altitudinem inconspicua fit.

In recenti animali caeruleo-rufescens humor in memoratis cavis continetur, qui, quo basi propior, eo coloratior est. In majori etiam copia versus centrum *C* reperitur. Ibi correspondet superiori portioni memoratae maculae, cum qua communicare quidem videtur, licet rufescens, & gelatinosa materia maculam efformans per sinum ex arte apertum superius ad *X*, debitamque deinde compressionem digito factam vix educi patiatur.

Sexdecim, & ultra conici canales sub specie totidem arcuum caeruleorum utrumque baseos segmentum pinguunt; horum subduplum numerum tantummodo exhibuimus in

fig. 7. & 8., ut distinctius earundem decursus conspici possit. Major canalium inter se distantia, & amplitudo est in majore utriusque segmenti portione, minor in minore reperitur. Ultra baseos diametrum *pCr* a veli origine *DCA* majores prodeunt, deinde in arcus margini subparallelos flectuntur, postea sensim minuuntur, & sibi viciniores facti, rectioresque in oppositam, seu acutiorem segmenti ejusdem partem invisibili fine terminantur. Canalium propterea unius segmenti distincta, & major extremitas proxima quidem est juxta *ACD* tenuissimis extremis canaliculorum segmenti alterius; at per interpositum velum ita separatur, ut nulla immediata cum alterius medietatis canalibus ejusdem communicatio conspiciatur. Neque etiam satis distincte utrum ibi extrema canalium baseos desinant, aut continentur in veli canales cernere potui; etiamsi armato oculo tum recens, tum siccatum animal examinaretur. Certum tamen est in eadem velo & basi communem portionem, venire arcus baseos attenuatos, a qua tenuissimae cerulescentes lineae per velum distributae discedunt. Baseos canales in majori extremo digitis ipsis distinguuntur; quemadmodum etiam major ejusdem partis inde facta crassities ipsis percipitur. Spatium canalibus memoratis interpositum est plus, minusve amplum, prout major est, vel minor eorumdem inter se distantia. Maximum propterea in majori cujusque segmenti baseos extremo, minimum in extremo minori, ubi canaliculorum distinctio ne armatis quidem oculis discerni potest. In exsiccatum animali non difficile canales iidem ab ejusdem membranis possunt separari, & albidum apparent, minores, sibi que magis proximi, licet satis adhuc distincti.

A basi macula ante descripta sub inferiori membrana molles, & caeruleae quaedam lineae, quasi radii versus peripheriam, undique dimittuntur arcus modo descriptos frequenter interfecantes.

Eaedem baseos membranae ultra ipsum cartilagineum baseos marginem circumquaque ad duas fere lineas conjunctim extenduntur, & in membranam laete caeruleo humore madentem, & mobilem continuantur. Haec membrana ex utriusque, superioris nempe, & inferioris membranae baseos unionis facta, mobilis est, libere in aqua fluctuans, vere tentacularis, integro margine, leviter tantum repando, & quasi a plicis undulato praedita. Per ipsam intense caeruleae quaedam rectae lineae notantur, quae directionem sequuntur radiatarum baseos linearum, & plicas memoratas fere distinguunt. Valde tenera, & lubrica est ista membrana, & plurimo caeruleo smegmate infecta; neque exsiccari facile patitur, sed chartis tota adhaerescit, easque caeruleo colore pingit; quod si recens contrectetur in caeruleum mucum, quo maxime abundat, fere tota facecit. Dum subter basim reflexa est eandem caeruleam uniformiter reddit.

Totum animal valde lubrico mucoso humore madet. Nullam autem omnino oris, aut alterius partis apertionem, etiamsi microscopium adhibuerimus, in externis ejus partibus observare potuimus.

Appulit haec Armenistari species ad extimam meridionalem Collis S. Albani Niceaensis ripam maritimam post procellam flantibus Austris adducta. Illius novitate percussus obtuli Piscatoribus, ut intelligerem num alias illud adnotassent. Ignotam sibi illius nomen esse, remque raro visam responderunt; sed cognoscere similem aliam edulem, quam vernali tempore copiose post procellas expiscantur, venientem, ut ipsi ajant, ex Africae litoribus, atque ex eorum indicationibus comprehendi eos probabiliter intelligere Vellellam Auctorum.

Non inquiram modo in oeconomiam, qua elegantissimum animal vitam, & speciem conservat. Commentitia enim plurima forent afferenda, cum vera ignorentur. Num per aptae subitantis absoptionem ab inconspicuis poris factam,

aut

aut per totam membranarum extensionem, aut per tentacularem solani membranam distributis nutritum sumat; num ita absorptus humor per canales, & sinus memoratos peculiari dispositione sitos ad animalis centrum adducatur, tamquam ad praecipuam ejus partem oblonga illa macula inferius apparente notata, ardua est investigatio; quoniam nullum os conspiceret, nulla etiam viscera detegere licuit; multoque minus penetrare, quoniam artificio hujusce animalis multiplicatio fiat.

Ad nullum cognitorum generum novam hanc speciem reduci posse, & ideo peculiarem generis constitutionem sibi promereri intelliget quicumque cum allata descriptione ea comparabit, quae Zoologi, & speciatim Celeberrimus LINNAEUS ad hanc rem proximius spectantia tradiderunt. Animal, cum quo nostrum magis convenit, est *Veella* auctorum, quod a Celeberrimo *Viro* ad Medusae genus refertur, sed utrumque reapse a Medusis videtur separandum, & ideo fortasse idem perspicacissimus LINNAEUS Medusae speciebus ultimo adjecit, quod minus, quam reliquas species cum Medusae genere convenire intelligeret. Si enim tributum a Veteribus *Urticae* nomen ab urticationis sensu, quem cuti imprimit, & comestibilitas excipiantur, quae reliquis *Urticis* marinis ad Medusam pertinentibus communia sunt, vix alia sufficiens ratio datur, qua ad eandem jure amandari queat. Neque enim reliquis Medusis similis partium structura competit, neque natura cartilaginea, aut saltem ad cartilagineam proxime accedens consistentia per totum corpus diffusa in illis conspicitur: tandem nullum os inferius centrale, aut in *Veella* descripserunt Auctores, aut in nostris observare potuimus. Quod tamen necessario conspici deberet, & demonstrari, ut, immutato Linnaeani generis carectere, ad Medusas illae reduci possent.

Et sane novi generis construendi necessitatem minime praetervisit, aut siluit sed aperte proposuit Cl. C. Marcus CAR-

RIUS (a) peculiarem Veellae fabricam admiratus. Nihilo tamen minus post ipsum multiplici scientia Clarus Johan. Baptista BOHADSCHIUS (b) solum urticationis sensum notis a structura petitis anteposuisse, & tanquam argumentum sufficiens assumptisse videtur, propter quod aliis Urticis adjungi queat; quamquam Medusis reliquis similem structuram, siquidem de eadem revera loquitur, Veellae tribuat. Verum neque Linnaeanis characteribus, ut ostendimus, illa aptatur, neque communissima illa figura cylindrica, vel orbiculata, quam in omnibus Medusae speciebus inesse dicit (c), neque demum interna fabrica ibidem adducta a Cl. VIRO in nostra specie, aut in Veella observantur: hinc dubitandi fortasse locus aliquis superest utrum VIR doctissimus idem animalis genus prae oculis habuerit, quod laudatus CARBURIUS descripsit, an potius aliud. Eo vel magis, quod dicat a se visi animalis corpus adeo tenerum fuisse, ut in auram avolaverit, & in spiritu vini difflexerit. Nostrum vero, & Carburianum Armenistari praecipue vero ejusdem basis facile exsiccari, atque exsiccata conservari potest. Praeterea ab ipso praesertim velo nota certa characteristica novi generis desumi posse nobis videtur, quae duas allatas species fabrica in multis non valde dissimiles, licet specifica differentia satis distinctas complectetur. Prima igitur erit Veella a FERN. IMPERATO (d), FAB. COLUMNA (e), novissimque a citato CARBURIO eleganter descripta, & delineata. Altera vero tentaculorum integritate praecipue distinguenda species ista erit, quam hic posuimus.

Tandem quod pertinet ad nominis rationem non plane incongruum duxi *Armenistari* nomen retinere: quia primum

(a) Lettera sopra un Insetto marino &c. Nuova raccolta d'Opuscoli scientifici, e filosofici Tom. 3. Venezia MDCCCLVII.

(b) De quibusdam animalibus marinis, eorumque proprietatibus &c. liber. *Dresdae* 1751. pag. 136. (c) Pag. 135.

(d) Hist. natur. pag. 679. descr., & pag. 688. *delineatur tentaculis ex parte integris.*

(e) Aquatil. & terrest. observ. pag. XX. descr. & pag. XXII. delin. ed. Rom. MDCXVI.

mum cognita hujusce generis vera species *Verella* dicta, *Armenistari* graeco nomine a laudato Cephaleno Auctore probe descripta fuerit. Poterit idcirco *Verellae* vocabulum pro primae speciei triviali nomine inservire; dum triviale aliud huic nostrae adponendum relinquimus.

I L.

M E D U S A E

S P E C I E S P R I M A .

MEDUSA per contractionem hemisphaerica, levis, tentaculis plurimis, membranae interius 24-punctatae revolutione detegendis. Tab. VII. fig. 1, 2, 3, 4, & 5.

IN loco natali adhuc situm hoc animal si inspiciatur hemisphaerium coccineum magis, vel minus perfectum exhibet; quod per planam sui inferiorem partem saxo arte appressum, per convexam vero libere mobile est. Quaecumque de causa illud contrahatur, perfecte hemisphaericam formam induit (*Vid. Tab. VII. fig. 1, 2, & 3*). Quod si dilatatum, seu expansum conspiciatur, compressum fit, simulque inclusas quasdam sui partes videndas exponit. Priorem statum *contractionis*, vel *coarctationis*, alterum *dilatationis*, seu *expansionis* (*Vid. fig. 4.*) nomine vocabimus. Sub diversis propterea istis, aliisque etiam apparitionibus, quas ipsius motus, & anatomicae ostendunt, sigillatim hoc animal describemus, atque multiplici icone, quantum fieri poterit, ejusdem structuram explicare conabimur.

Ut inferior hujus Medusae superficies integra in conspectum veniat, a scopuli portione, cui firmiter adhaerens repetitur, (quemadmodum videre est in *fig. 1.*) accurate est separanda. Vivente animali id facere non potui absque

laceratione. Sed, cum illud integrum, faxoque adhaerens in aqua dulci moriendum reliquerim, & subinde disrupti faxi fragmenta paullatim separaverim, tunc inferior superficies nitide conspici potuit, quae levis est, & lacte rubens diametri circiter uncialis, prout sistit *fig. 3. Tab. VII.* Plana quidem illa est, & uniformis; sed per quasdam saturatius rubentes, radiatas lineas divisa, seu distincta apparet in plura fere triangularia segmenta apice suo ad centrum conniventia in punctum, ceu in apertionem communem ipsis interpositam.

In convexa contracti (*fig. 1. & 2.*) animalis facie per memoratam mediam ipsius apertionem introspecti possunt innumeri rubri dentes, seu tentaculorum, de quibus deinde dicemus, apices circumquaque in orbem positi, indeque latera efformantes interius in foramen productae apertionis ejusdem. Prout adaugetur interdum, vel imminuitur apertio, magis vel minus distincta, & extantia tentaculorum extrema conspici possunt. Reliquum hemisphaericae convexitatis leve est, & vivide-rubro colore nitet; videturque fere cruoris coccinei coagulum hemisphaericum levi membrana tectum repraesentare, quam liceat *cuticulae* nomine imposterum designare.

Communis est utrique superficiei haec cuticula, sed ubi ad memoratum foramen pervenit, interius reflectitur, ut supra interiores omnes partes producat, & quamdam tegminis mobilis, ac retractilis speciem per interpositam tenuem gelatinosam substantiam efformat, quod trahitur, & retrahitur supra partes contentas, sicuti praeputium supra glandem humanam; hinc eadem praeputii voce non male posset appellari. In contracto animali (*fig. 1. & 2.*) hemisphaericae convexitatis apparentem, & maximam partem constituit hoc praeputium, & continuatur inferius cum residua parte convexitatis ipsius: revolvitur in expanso animal

mali, sicque ipsius concava, & interna facies convexa fit, & internam sui originem ostendit (*fig. 4.*), quae est paulo infra mediam totius hemisphaerii altitudinem.

Interna haec praeputii superficies (*fig. 4.*) lucide rubens, & levis est, si vigintiquatuor grisea puncta excipias, quae parum, sed aequaliter inter se, & semilineam ab eisdem circulari margine distant. Eadem cuticula laxè teguntur haec puncta, & si immissa acu eleventur tubulum caecum, brevem, griseum fere exhibent.

Aliae quoque partes, revoluto praeputio, conspicuae fiunt, quas ideo (*fig. 4.*) simul repraesentari curavimus. Detegitur inde hemisphaerium aliud parvum. (*fig. 4. lit. ii*) priori concentricum, aequè leve, & rubellum, nuclei ad instar priori inclusum, cujus convexitas superius posita simili, & juxtam eandem directionem correspondente foramine (*f*) previa est. Foramen istud constringi quidem ab animali, & dilatari potest, non autem, revoluto partibus ipsum constituentibus, evanescere; quemadmodum de foramine illo externo praeputii hemisphaerii majoris superius contingere innuimus.

Circumponitur ad hujus parvi hemisphaerii basim, corollae, seu zonae cujusdam species (*zzzz fig. 4.*), saturatus rubro colore distincta, ultra duodecimam pollicis partem, inter allati hemisphaerii basim, & internam praeputii originem extensa. Fit autem ex duplicis densa serie binatarum concolorum mammillarium prominentiarum, sive ex parvis simbriis compresso-conicis, inter se se distinctis, liberis, ultra lineam cum semisse longis, vix semilineam in sua basim seu exortu latis, sensim exinde in acutiusculum, mobilissimum, & libere fluctuantem apicem extenuans. Tentaculorum apices in contractione animalis versus interiora respiciunt; at in illius expansione ad exteriora divergentes zonam radiatam exhibent.

Praeter haec, quae ex viventis animalis variis motibus conspicua fiunt, ut parvi hemisphaerii (ii) partes internae lultrentur, sectio juxta ejusdem convexitatem caute duci debet donec sectae partes, similem cum praeputio hemisphaerii majoris substantiam habentes, attolli queant. His revolutis (*Vid. fig. 5.*, in qua parvum hemisphaerium sectione apertum est, ut partes internae conspiciantur), idem ruber color per totam ipsarum internam superficiem extensus observabitur; si albescentem, & fere tendineosam lineam (*ot Tab. VII. fig. 5.*) excipias, quae a basi interna sectionum partium oritur, versus rotundam illarum apertionem (o) dirigitur, atque desinit ad ejusdem apertionis viciniam.

Detegitur insuper convexitas quaedam inaequalis, (*Vid. fig. ejusdem mediam partem*) in sui medio pervia, quae hujusce parvi hemisphaerii peculiarem nucleum constituebat.

E variis plicis haec convexitas componitur, quarum quinque suo limbo obtuso, marginato, & circulari ad se se mutuo in centro illius approximatae stellatum quoddam spatium relinquunt, quod allatam foraminis speciem efformat. Haec apertio stellata binis supra descriptis foraminibus in eadem directione substernitur, & major, minorve fieri potest, prout eadem plicae sibi plus, minusve arcte appressae sunt, desinitque in amplum cavum ab ipsis plicis, quasi a valvulis, aut labiis obtectum, ad tres fere lineas extensum, facta plicarum diductione, vel elevatione facile conspiciendum. In hoc cavo cinerea quaedam, ac fere mucosa substantia aquae mixta reperiebatur, quae animalculorum loco proximo vagantium contritam substantiam fere repraesentabat.

Quamvis hanc Medusae speciem scopulis perpetuo affixam, numquam solutam invenerim, neque facile ab illis manu separari potuerit; attenta tamen ejusdem structura, non plane negaverim a loco ad locum transire posse, & fortasse etiam aliquando solutam vagari. In peculiari tamen contractionis motu, quem firmata basi, praesertim si irritetur, violente

violente perficit, ad dimensionem fere tertia parte minorem coarctatur, & tunc praeputii apertio vix conspicua, aut valde exigua fit, & per ipsam lenta mucosa substantia, quam diximus in profundo ipsius cavo reperiri, veluti spuma quaedam saepius exit.

Feli porrectum animal avide deglutiebatur, neque ullum eidem damnum attulit. Ipsum vero, aliasque varias Urticas marinas piscatores vulgari nomine *restegets* appellant.

Habitantem reperiebam Augusto mense in perruptorum scopulorum excavationibus, foraminum, quae copiose aderant, amplis lateribus a Sole tutis adhaerentem. Supra aquae marinae libellam extantia quidem erant illa foramina, attamen per intervalla a refluus majoribus undis allui, aut saltem inspergi solebant.

Quae huic Medusae plane convenientia synonyma, & icones non invenio, nisi forte quis velit huc pertinere Urticas rubras, quas habent RONDELETIUS (f), & Petrus BELLONIUS (g), quae colore quidem conveniunt, magnitudine vero, situ tentaculorum, & partium structura satis diversae sunt, ut conferenti patebit. Nullius vero cognitarum Medusae specierum icon proximius accedit ad nostram in statu suo contractionis repraesentandam, quam exhibita a Cl. Theodoro GRONOVIO in Tom. IV. Act. Helveticorum; quamvis attenta ejusdem descriptione plurimum hae species inter se, & ab aliis jam notis differant. Etenim in illa adnotat Vir Doctissimus admodum pellucidam, & tenerrimam totius corporis substantiam; quatuor transversales costas, tentacula marginalia plurima minima, *magnitudine*, ut ait Auctor, *aequalia*, earumque ope *celerrime oblique per aquas saltabat animal*, *manente corporis parte semper antorsum directa*. In nostra specie coccineus color est, substantia autem corporis non adeo tenera, sed firmior, & forti cuticula obducta,

(f) De piscibus lib. 7. cap. 17. pag. 530.

(g) Aquatil. lib. 20. pag. 340. 341.

(h) Pag. 38. Tab. IV. fig. 7.

eta. Tandem nostrum animal locali motu fere deititurum, neque per aquas saltare posse videtur. Primo quidem quod aquis innatans numquam videri potuerit, sed semper saxo post mortem tenaciter adhaerens; deinde quod quatuor costis a Cl. GRONOVIO memoratis plane careat.

Denique monere juvat nullam specierum, quas Cl. JANUS PLANCUS in egregio suo libro de *minus notis &c.* habet, ad hanc noitram pertinere. Cum enim dubitarem, utrum pro hujus synonymo sumi posset globosior Urticae species, quam Vir doctissimus ibidem (i) memorat; dubii solutionem ab Auctore petii per epistolam a Cl. sui Amico, meique Praeceptore amantissimo D. ALLONIO ipsi datam. Vir autem praestantissimus, cui cum descriptione pictura transmissa fuit, respondit novam sibi speciem videri, aut saltem minus notam, & descriptam; atque ab iis, quas ipse in laudato libro descripsit, revera distinguendam.

S P E C I E S A L T E R A.

Si in ulla Urticae marinae specie certe in ea, quae cinerea dicitur ab Auctoribus, multiplices varietates occurrunt. Aliae enim ex cinereo ad album, aliae ad griseum, aliae ad caeruleum, purpureumque vergunt; nonnullae etiam ex griseo, purpureo, vel etiam viridi colore diversimode variegatae reperiuntur. Quae tamen singulae, cum sola colorum inconstantia ludant, distinctam speciem non videntur constituere, nisi peculiaris alia nota ex partium diversa structura petita accedat, qua distingui mereantur. Reliquis propterea missis hujus generis speciebus, quae in Niceensi mari copiose reperiuntur, nonnulla de rariori una specie memorem, quam exhibet *fig. 6. & 7. Tab. VII.* eritque.

Medu-

Medusa orbiculata, utrinque compressa; tentaculis marginalibus plurimis, perpetuo nudis.

Hujus Medusae corpus complanatum orbem repraesentat, cujus ad centrum media crassities, seu altitudo est duarum linearum, ad peripheriam vero lineam parumper superat. Diameter autem, sive latitudo ad unciam circiter extenditur.

In una ejusdem facie quinque sunt arcuatae plicae (*zzzz fig. 6.*) convexitatibus suis versus centrum mutuo se se contingentes, & quinque-labiatum ideo Medusae os repraesentantes. Circumvolvitur exinde arcuatae plicae utraque extremitas, & post varios anfractuosos recessus versus peripheriam simili extremitati proximae plicae occurrit, & cum ipsa continuatur. Fit inde ut omnes plicae simul sumptae rotam superficiem efforment, & veluti intestinulum unicum proprio mesenterio alligatum, & in se demum redeuntem exhibeant.

Cavum quoddam spatium quinque illis plicis os constituentibus subjacet, quod ad duas circiter lineas amplum conspicitur.

Altera animalis superficies (*ooo fig. 7.*) magis complanata, & fere plana est; albida etiam membrana minutissimis lineis a centro divergentibus radiata obtegitur, ex cujus disruptione fusco-flavescens gelatinosa, & ad lentem quasi stupea materies erumpere observatur.

Ad margines superficiebus descriptis comprehensos paullo magis versus primam illam duplex oritur series griseo-caeruleo-fulgentium tentaculorum (*ssss Tab. VII. fig. 6. & 7.*), quae pollicarem longitudinem habent; sensim sensimque versus extremum extenuantur, & ibi minus colorata fiunt. Hujusmodi autem tentacula nulla agitatione commota radiatim divergunt instar nectariorum Passiflorae incarnatae, aut si velis radiatum florem belle repraesentant, cujus discus albidus, & radius cinereus sit,

Hanc Medusæ speciem cum præcedente in aqua falsa quinque mensium spatio maceratam microscopio pluries subjeci. In utraque autem per microscopium observari cuticulam, quæ totum corpus obtegit, satis firmam se se conservasse, & rugas tantummodo contraxisse, quæ a peripheria ad centrum dirigebantur, satisque conspicuæ erant in magis plana utriusque superficie; in facie vero, ubi Medusæ os in utraque locatur, in præputio prioris speciei, in plicis, & in tentaculis utriusque transversim circulariter eadem rugæ dirigebantur, & minutissimæ erant.

De hujus Medusæ motibus nihil addam, nisi quod per undas solutam vagari scripserit præclarissimus Amicus VERRANI, Medicus, & Historiæ maritimarum amantissimus cultor, qui circa Villafrancam Niceensem reperit, & hanc cum maritimis aliis in aqua maris probe servatam humanissime communicavit.

Synonima, & icones non habeo; nisi huc forte pertineat urtica cinerea RONDELETHI, (k) quæ tamen, si ex manca descriptione, & icone, quam dedit, neglecto colore, liceat judicare, est vivendi modo, tentaculorum longitudine, ac dispositione, aliisque valde diversa.

(k) De piscibus lib. XVII. pag. 529-

Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

GALLI per la Gran Cancellaria.

ECLAIRCISSEMENTS

SUR LE MOUVEMENT DES CORDES VIBRANTES

PAR M. EULER.

I. **T**OUS ceux qui ont entrepris de déterminer le mouvement des cordes vibrantes ont borné leurs recherches à ces trois conditions:

1^o Ils ont considéré la corde comme fixée en ses deux extrémités A & B (*fig. 1.*), & tendue par une force quelconque, en sorte que dans son état naturel sa figure soit représentée par la ligne droite AB : ce n'est que dans cet état que la corde peut demeurer en repos ou en équilibre.

2^o Ils n'ont considéré que les mouvemens extrêmement petits d'une telle corde, en sorte que si la ligne AYB représente la figure que la corde prend pendant son mouvement à un instant quelconque, on puisse toujours regarder les appliquées XY de cette ligne comme infiniment petites.

3^o Ils ont supposé que le mouvement de chaque élément de la corde Y se fasse toujours suivant la direction de l'appliquée YX ou qu'il ne s'en écarte qu'infiniment peu. On pourroit bien traiter plus généralement cette question, mais alors la Théorie conduit à un calcul si embarrassé qu'on n'en sauroit rien conclure.

II. La dernière condition se réduit à celle-ci, que l'inclinaison de chaque élément de la corde Yy à l'axe AB soit infiniment petite, ou bien que la tangente tirée à chaque point Y fasse avec l'axe AB un angle infiniment petit. Ce n'est que dans ce cas qu'on peut regarder chaque élément de la courbe Yy comme égal à l'élément répondant de l'axe Xx : or cette condition est absolument nécessaire.

re, pour que le mouvement de chaque point Y se fasse dans la direction de l'appliquée YX . Delà on comprend aussi réciproquement que toutes les fois, que cette condition convient à la figure AYB , le mouvement de chaque point Y ne fauroit s'écarter de la direction de l'appliquée YX .

III. Donc quand on demande le mouvement de la corde après qu'elle aura reçu une impulsion quelconque, il faut absolument que la figure qui lui a été imprimée d'abord soit telle, que non seulement toutes les appliquées XY soient quasi infiniment petites, mais que l'inclinaison de tous les élémens de la courbe AYB soit aussi infiniment petite. On pourroit encore ajouter cette condition, qu'on ait imprimé en même tems à chaque élément de la corde un certain mouvement selon la direction de l'appliquée, & ce mouvement initial doit aussi être tel, qu'il n'en résulte aucun saut dans la suite; ou bien que la figure de la corde demeure toujours conforme aux loix prescrites. Cela remarqué, examinons plus soigneusement tant la question en elle même, que la solution que la Théorie fournit.

Q U E S T I O N.

IV. *Aiant réduit la corde tendue à une figure quelconque, si au moment qu'on la relache, on imprime encore à chaque élément de la corde un mouvement quelconque: on demande, pour chaque moment du tems suivant, tant la figure, que le mouvement que la corde aura alors, supposant que tant la figure initiale que le mouvement qui lui aura été imprimé soient d'accord avec les loix prescrites.*

V. Soit AB (fig. 2.) la corde fixée dans ses deux extrémités A & B , & rendue par une force quelconque, à laquelle on ait imprimé au commencement la figure ASB , & d'abord cette courbe doit être telle, que 1^o toutes ses appliquées soient quasi infiniment petites, & 2^o que toutes les tangentes ne s'écartent qu'infiniment peu de l'axe AB . Ces deux conditions sont si naturellement liées avec la tension, qu'il seroit presque impossible de réduire la corde à une telle figure, où ces deux conditions n'eussent pas lieu. De là il est clair, que la figure initiale peut être variée à l'infini, & qu'elle dépend entièrement de notre volonté. Il est donc possible de donner à la corde une telle figure, qui ne sauroit être exprimée par aucune équation analytique, comme si on la tiroit par un mouvement libre de la main, sans qu'aucune loi de continuité y ait lieu.

VI. Il n'y a certainement aucun doute, qu'on ne puisse imprimer à la corde une telle figure, & où pourtant les deux conditions prescrites aient lieu. Pour s'en assurer mieux, on n'a qu'à tirer de A à B une ligne courbe quelconque AMB en observant cette seule condition, qu'il n'y ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe: alors en diminuant toutes les appliquées XM quasi à l'infini selon un même rapport, de sorte que $XS = \alpha XM$, prenant α pour une fraction extrêmement petite, non seulement toutes les appliquées XS deviendront infiniment petites, mais aussi les tangentes dans tous les points S seront infiniment peu inclinées à l'axe AB , tout comme les deux conditions prescrites l'exigent.

VII. On ne sauroit douter non plus qu'après avoir imprimé à la corde une telle figure discontinue ou irréductible à aucune équation analytique, la corde étant subitement relâchée, soit qu'on lui imprime encore quelque mouvement

ou non, n'en reçoive un certain mouvement de vibration. Mais on trouve ici bien des raisons de douter si dans ces cas la Théorie est suffisante de nous conduire à une solution, puisqu'il semble que l'analyse, comme elle a été traitée jusqu'ici, ne sauroit être appliquée qu'à des courbes, dont la nature peut être renfermée dans une équation analytique. Mais il n'est pas encore tems de décider cette question: si l'analyse est incapable de nous fournir une solution pour ces cas, nous ne nous en appercevrons que trop tôt: & partant il n'est pas nécessaire de restreindre d'abord la question aux seules courbes continues, dont la nature est exprimée par quelque équation.

VIII. Mais si la Théorie nous conduit à une solution si générale, qu'elle s'étend aussi bien à toutes les figures discontinues que continues il faudra avouer, que cette recherche nous ouvre une nouvelle carrière dans l'analyse, en nous mettant en état d'appliquer le calcul à des courbes qui ne sont assujetties à aucune loi de continuité, & si cela a paru impossible jusqu'ici, la découverte sera d'autant plus importante. Or en effet j'ai remarqué à cette occasion, que la partie de l'analyse des infinis; à laquelle cette question appartient, renferme essentiellement ce caractère, qu'elle reçoit des fonctions absolument arbitraires, pendant que de telles fonctions sont entièrement bannies de l'analyse ordinaire qu'on a cultivée jusqu'ici, & qui roule principalement sur des fonctions d'une seule variable. Mais l'analyse dont nous avons besoin ici, s'occupe des fonctions de deux ou plusieurs variables: où cela arrive de bien remarquable, que chaque intégration introduit dans le calcul une fonction absolument arbitraire au lieu d'une simple quantité constante.

IX. Après avoir réduit la corde à une figure quelconque ASB , on suppose communément qu'on la relache subitement, sans lui imprimer aucun mouvement, de sorte

5

que dans ce premier instant tous les élémens de la corde sont en repos, ou leur vitesse nulle. Mais il est possible que dans le moment même, où l'on relâche la corde, on imprime à chacun de ses élémens un certain mouvement, dont la direction doit toujours être perpendiculaire à l'axe. Pour tenir compte de cette circonstance on peut décrire sur l'axe AB l'échelle des vitesses initiales AVB dont chaque appliquée XV marque la vitesse, qui aura été imprimée au point de la corde S selon la direction SX . Puisque les extrémités de la corde A & B demeurent toujours immobiles, il est évident que cette courbe AVB doit passer par les deux termes A & B , de même que la figure initiale ASB .

SOLUTION DYNAMIQUE DE LA QUESTION.

X. Posons maintenant la longueur de la corde $AB = a$ (*fig. 2.*) son poids $= P$, & la force dont elle est tendue $= T$; or prenant une partie quelconque $AX = x$, soit le poids de cette partie $= p$, qui marque une fonction quelconque de x , afin que la solution s'étende à des cordes dont l'épaisseur est variable. Ensuite pour l'état forcé auquel la corde a été réduite au commencement; soit l'appliquée $XS = s$, & la vitesse qui aura été imprimée au point S dans la direction SV soit $XV = u$, en sorte que u marque l'espace parcouru par cette vitesse dans une seconde. Cela posé on demande, quelle figure, & quel mouvement la corde aura, après un tems quelconque écoulé depuis cet état initial.

XI. Soit donc écoulé depuis ce commencement un tems $= t$ secondes, & supposons que la corde ait à présent la figure AYB (*fig. 3.*), pour laquelle posons l'appliquée

$XY = y$, qui répond à la même abscisse $AX = x$, où au commencement l'appliquée étoit $XS = s$, & il est clair que y fera une certaine fonction tant de l'abscisse x que du tems t , dont la nature doit être déterminée par l'état initial, auquel nous supposons que la corde a été réduite. Tout revient donc à trouver cette fonction y , dont la valeur elle même nous découvre la figure AYB , & la formule différentielle $(\frac{dy}{dt})$ la vitesse du point Y dans le sens XY , de sorte que si le point Y se meut vers X , sa vitesse sera $= - (\frac{dy}{dt})$.

XII. Delà il est évident, que la fonction y que nous cherchons doit avoir les propriétés suivantes :

1^o Posant le tems $t = 0$, il faut qu'il devienne $y = s$, puisqu'au commencement la corde est supposée avoir eu la figure donnée ASB (*fig. 2.*) dont l'appliquée répondante à la même abscisse $AX = x$ vient d'être nommée $XS = s$.

2^o Posant encore $t = 0$, il faut que la formule différentielle $-(\frac{dy}{dt})$ devienne $= u$, puisque u marque la vitesse initiale, dont le point S aura été poussé selon la direction SX . Donc si la corde n'avoit reçu aucun mouvement au commencement, mais qu'elle eut été simplement relachée, il faudroit qu'il fut $-(\frac{dy}{dt}) = 0$, en supposant le tems $t = 0$.

3^o Ensuite puisque les deux extrémités A & B de la corde demeurent immobiles, l'appliquée y doit aussi être une telle fonction des deux variables x & t , que posant ou $x = 0$, ou $x = a$ elle s'évanouisse toujours dans l'un & l'autre cas; par la même raison il faudra que dans ces deux cas la formule de la vitesse $(\frac{dy}{dt})$ s'évanouisse aussi.

XIII. Maintenant pour découvrir les forces, dont l'élément de la corde en Y est poussé à présent, tirons en Y la tangente YT , & posons l'angle qu'elle fait avec l'axe $XYT = \omega$, que nous supposons être infiniment petit, & puisque en vertu de la tension T l'élément Y est tiré suivant la direction YT par cette même force T , il en résulte suivant la direction YX la force $T \sin. \omega = T \omega$, & suivant la direction de l'axe XA la force $T \cos. \omega = T$, qui est détruite par la tension de l'autre côté, d'où l'on voit que la tension est par tout la même. Mais de l'autre côté, dans l'élément suivant, l'angle ω devient $\omega + d\omega$, & partant l'élément Y sera poussé par la force $T (\omega + d\omega)$ suivant la direction contraire XY . Donc puisque l'élément Y est sollicité par ces deux forces ensemble, il sera poussé suivant la direction XY par la force $= T d\omega$.

XIV. Tant que nous envisageons la courbe AYB , le tems t demeure le même: donc puisque l'angle $XTY = \omega$ est infiniment petit, nous aurons $\omega = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, & partant $d\omega = dx \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, de sorte que l'élément en Y est sollicité dans le sens XY par la force motrice $T dx \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Or le poids de la partie de la corde AX ou AY a été supposé $= p$, d'où le poids de l'élément en question sera $= dp$, qui exprime en même tems sa masse; donc la force accélératrice dans le sens XY sera $= \frac{T dx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où puisque p est une fonction de x connue par l'épaisseur variable de la corde, la formule $\frac{T dx}{dp}$ aura aussi une valeur connue. Si la corde avoit partout la même épaisseur, le poids de toute la longueur $AB = a$.

aiant été posé $= P$, nous aurions $a : P = x : p$, & partant $\frac{dx}{dp} = \frac{a}{p}$, ou bien la force accélératrice seroit $= \frac{Ta}{P} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$.

XV. Aiant trouvé la force accélératrice de l'élément Y dans le sens $YY = \frac{T dx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right)$. Nous n'avons qu'à considérer le mouvement de ce même élément. Or aiant déjà remarqué (XI.) que la vitesse de cet élément dans le sens XY est $= \left(\frac{dy}{dt} \right)$ son accélération dans le même sens fera $= \left(\frac{ddy}{dt^2} \right)$, qui doit donc être proportionnelle à la force accélératrice. Mais pour obtenir une équation déterminée puisque nous exprimons le tems t en secondes, & la vitesse par l'espace parcouru dans une seconde, nous n'avons qu'à introduire la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une seconde. Soit donc cette hauteur $= g$, & la comparaison de la force accélératrice avec l'accélération nous fournit cette équation :

$$\frac{2Tg dx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dt^2} \right).$$

XVI. Voilà donc une équation différentielle du second degré de la résolution de laquelle dépend la détermination du mouvement de la corde, & tout revient maintenant à chercher, quelle fonction des deux variables x & t doit être l'appliquée y , afin qu'elle satisfasse non seulement à cette équation, mais qu'elle renferme aussi les conditions marquées ci-dessus (XII.). Or j'observe ici que $\frac{2Tg dx}{dp}$ est une certaine fonction de la seule variable x , fans que le tems t y soit compris, & que cette fonction dépend de l'épaisseur de la corde. Mais il est encore impossible de

de résoudre cette équation en général, quelle que soit la variabilité de l'épaisseur de la corde, puisqu'ici je n'ai pu découvrir que certains cas, dont le nombre est bien infini, où la résolution réussit, mais à présent je me bornerai uniquement aux cordes, dont l'épaisseur est par tout la même, parceque c'est le cas, auquel presque tous ceux qui ont traité cette question se sont attachés.

Résolution analitique de la question pour le cas, où la corde a partout la même épaisseur.

XVII. Puisque la corde a partout la même épaisseur, à cause de $dx : dp = a : P$, notre équation sera

$$\frac{2Tga}{P} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dt^2} \right),$$

où a marque la longueur de la corde, P son poids, & T la force dont elle est tendue, la valeur de g étant

15 $\frac{1}{7}$ pieds de Rhin; la quantité $\frac{2Tga}{P}$ est donc constante,

& exprime une certaine surface, & partant pour abréger

je poserai $\frac{2Tga}{P} = cc$, pour avoir à résoudre cette

équation

$$cc \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dt^2} \right).$$

Il est aisé de trouver une infinité des fonctions des deux variables x & t , qui étant substituées au lieu de y satisfont à cette équation, & qui remplissent en même tems la condition qu'il devienne $y = 0$, soit qu'on pose $= 0$, ou $x = a$.

XVIII. Pour en donner un exemple supposons $y = a \sin. mx \cos. nt$, & puisque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = am \operatorname{cof}. mx \operatorname{cof}. nt, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -amn \operatorname{fin}. mx \operatorname{cof}. nt$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -an \operatorname{fin}. mx \operatorname{fin}. nt, \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -ann \operatorname{fin}. mx \operatorname{cof}. nt$$

l'équation trouvée exige qu'il soit $mnc = nn$, ou $n = mc$; de sorte que $y = a \operatorname{fin}. mx \operatorname{cof}. mct$, laquelle valeur évanouit déjà au cas où $x = 0$, mais pour qu'elle évanouisse aussi au cas où $x = a$, il faut prendre $ma = i\pi$, où π marque la périmétrie d'un cercle, dont le diamètre $= 1$, & i un nombre entier quelconque. Voilà donc une solution particulière de notre question renfermée dans cette équation :

$$y = a \operatorname{fin} \frac{i\pi x}{a} \cdot \operatorname{cof} \frac{i\pi ct}{a}$$

XIX. Puisqu'on peut prendre pour i un nombre entier quelconque, cette formule fournit une infinité de formules dont non seulement chacune donne une valeur convenable à y , mais aussi deux ou plusieurs jointes ensemble. D'où l'on tire une solution beaucoup plus générale renfermée dans cette expression qu'on peut continuer à l'infini :

$$y = a \operatorname{fin} \frac{\pi x}{a} \operatorname{cof} \frac{\pi ct}{a} + \beta \operatorname{fin} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

& puisqu'en écrivant $\operatorname{fin} \frac{i\pi ct}{a}$ au lieu de $\operatorname{cof} \frac{i\pi ct}{a}$ on satisfait également aux conditions prescrites, on peut donner cette solution encore plus générale :

$$y = a \operatorname{fin} \frac{\pi x}{a} \operatorname{cof} \frac{\pi ct}{a} + \beta \operatorname{fin} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof} \frac{2\pi ct}{a} + \&c. \\ + a' \operatorname{fin} \frac{\pi x}{a} \operatorname{fin} \frac{\pi ct}{a} + \beta' \operatorname{fin} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{cof} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

XX. Voyons maintenant, quel devrait être l'état initial de la corde, pour que cette formule exprimât le mouvement dont la corde sera agitée dans la suite. Pour cet effet nous n'avons qu'à poser $t = 0$, & puisque alors

y devient égale à l'appliquée s dans la figure initiale ASB (fig. 2.) nous aurons pour cette courbe l'équation qui suit :

$$s = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Or pour les vitesses u qui doivent être imprimées à tous les élémens de la corde, puisque $u = -\left(\frac{dy}{dt}\right)$, en posant

$= 0$; nous aurons

$$0 = -\frac{\pi c}{a} \alpha' \sin. \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi c}{a} \beta' \sin. \frac{2\pi x}{a} - \frac{3\pi c}{a} \gamma' \sin. \frac{3\pi x}{a} - \&c.$$

Donc réciproquement toutes les fois qu'on aura imprimé à la corde une telle figure & un tel mouvement, la valeur de y donnée ci-dessus nous découvrira pour tout tems suivant tant la figure, que le mouvement de la corde.

XXI. Comme les valeurs de s & de u contiennent une infinité de termes, il semble qu'elles renferment tous les cas possibles, de sorte que quelque figure & quelque mouvement, qu'on ait imprimé à la corde au commencement, ces deux valeurs y puissent être ajustées. Car en effet on peut toujours déterminer en sorte les coëfficiens α , β , γ &c. & α' , β' , γ' &c. que l'une & l'autre des courbes ASB & AVB passe par une infinité de points donnés. Cependant quelque convainquant que paroisse cet argument, je ne saurois envisager cette solution, que comme très-particulière; & cela par la même raison, qu'on regarderoit fort-mal à propos toutes les courbes possibles comme renfermées dans cette équation parabolique $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ quoi qu'on puisse faire passer cette courbe par une infinité de points donnés.

XXII. Je soutiens donc que cette solution quelque générale qu'elle paroisse, n'est que très-particulière, & qu'elle n'épuise point l'étendue de l'équation différentielle

second degré $cc \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dr^2} \right)$ qui renferme la solution complète de notre question. Pour nous assurer entièrement de cette insuffisance, on n'a qu'à considérer le cas où l'on n'auroit ébranlé au commencement qu'une partie de la corde comme AX , le reste BX aiant demeuré dans un repos parfait. Car posant cette partie ébranlée $= b$, il faudroit déterminer en sorte les expressions trouvées pour s & u , que prenant $x > b$ elles devinsent $= 0$, & cela pour toutes les valeurs possibles entre b & a , ce qui est manifestement impossible. Ainsi le mouvement, que la corde recevra dans ce cas, ne sauroit jamais être représentée par l'expression donnée ci-dessus pour l'appliqué y .

Intégration complète de l'équation.

$$cc \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dr^2} \right).$$

XXIII. Mais pourquoi vdroit-on s'arrêter à une solution particulière & exiger la détermination d'une infinité de coëfficiens, tandis qu'on est en état d'assigner l'intégrale complète de cette équation, qui doit nécessairement renfermer tous les cas possibles, & qu'on peut même aisément appliquer à toutes les figures & à tous les mouvemens qu'on aura imprimés au commencement à la corde. Je me tiendrai donc uniquement à l'intégrale complète de cette équation différentio-différentielle qu'on trouve exprimée, de cette manière.

$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$,
 où $\Gamma : (x - ct)$ marque une fonction quelconque de la quantité $x + ct$, & $\Delta : (x - ct)$ une fonction aussi quelconque de la quantité $x - ct$. Donc puisque cette ex-

pression renferme deux fonctions absolument arbitraires, c'est une marque certaine qu'elle est l'intégrale complète de notre équation différentio-différentielle.

XXIV. Pour faire voir comment cette expression satisfait à la question, on n'a qu'à en faire la substitution; pour cet effet je marquerai le différentiel d'une telle fonction générale $\Gamma : u$ par $du \Gamma' : u$; donc si nous posons $\zeta = \Gamma : (x + ct)$ nous aurons $d\zeta = (dx + c dt) \Gamma' : (x + ct)$, & partant $(\frac{dz}{dx}) = \Gamma' : (x + ct)$, & $(\frac{dz}{dt}) = c \Gamma' : (x + ct)$. De là notre expression fournira par la différentiation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct) + \Delta' : (x - ct), \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = c\Gamma' : (x + ct) - c\Delta' : (x - ct)$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + ct) + \Delta'' : (x - ct), \quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\Gamma'' : (x + ct) + cc\Delta'' : (x - ct)$$

d'où il est évident, que $cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ devient égal à $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, tout comme la nature de notre question exige.

XXV. Puisque cette intégrale contient deux fonctions absolument arbitraires, il n'y a aucun doute qu'on ne les puisse prendre en sorte, qu'elles conviennent à l'état initial auquel la corde aura été réduite au commencement. On n'a qu'à remarquer que la fonction $\Gamma : (x + ct)$ représente l'appliquée d'une courbe quelconque, prenant l'abscisse $= x + ct$, & que l'autre fonction $\Delta : (x - ct)$, représente l'appliquée d'une autre courbe quelconque, qui répond à l'abscisse $x - ct$. Donc au lieu de ces deux fonctions arbitraires on peut substituer deux courbes quelconques soit régulières, ou comprises dans quelques équations, soit irrégulières, ou tracées à volonté sans qu'elles soient attachées à quelque loi de continuité.

XXVI. Comme la question elle même renferme déjà deux courbes absolument arbitraires, l'une ASB (fig. 2.) qui est la figure qu'on a donnée au commencement à la corde, & l'autre AVB , qui est l'échelle des vitesses imprimées à la corde au premier instant du relâchement; aucune solution ne sauroit être complète, à moins qu'elle ne fût applicable à ces deux courbes absolument arbitraires. Donc puisque ces deux courbes ne sont sujettes à aucune loi de continuité, il faut bien que la solution ne soit sujette à aucune limitation à cet égard. Ainsi la nature de la question elle même nous donne déjà à connoître que la solution, pour qu'elle soit complète, doit nécessairement renfermer deux fonctions absolument arbitraires pour qu'on en puisse faire l'application à toutes les circonstances de la question.

XXVII. Cette reflexion est d'autant plus importante, que de telles solutions ont été tout-à-fait inconnues jusqu'ici dans l'Analyse, & qu'on a cru même, que le calcul n'étoit applicable qu'à des quantités soumises à la loi de continuité, ou comprises dans quelque expression analytique. Ce préjugé, s'il est permis de le nommer ainsi, a été sans doute la cause que ma solution générale des cordes vibrantes a paru fort suspecte même à des Géomètres du premier ordre; mais à présent j'espère que quand ils voudront bien peser la nature de la question, ils conviendront avec moi; que la solution ne sauroit être moins générale, que celle que j'ai donnée, & tous les prétendus inconvéniens, dont on a chargé ma solution, ne tombent que sur les premières limitations, auxquelles on est obligé de restreindre la question.

XXVIII. Mais rien ne sauroit mieux lever tous les doutes, que l'application de ma solution générale au mouvement déterminé d'une corde, après qu'on l'aura réduite au commencement dans un état déterminé quelconque. Car il faut

bien considérer, qu'il ne s'agit pas ici de déterminer d'une manière vague les mouvemens dont une corde tendue est susceptible, mais je suppose expressément, qu'on ait forcé au commencement la corde à une certaine figure donnée, & qu'on lui ait imprimé en même tems un certain mouvement pareillement donné. Cet état initial de la corde étant donc entièrement déterminé, il faut bien que le mouvement suivant le soit aussi, & qu'il dépende nécessairement de toutes les conditions de l'état initial. Je m'en vais donc examiner de quelle manière les deux fonctions arbitraires de ma solution doivent être déterminées, pour qu'elles répondent à l'état initial, laquelle la corde a été réduite au commencement.

Application de la solution générale à l'état initial de la corde.

XXIX. Aiant trouvé pour l'état de la corde après un tems quelconque de t secondes écoulé depuis le commencement, cette équation intégrale complète.

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$$

qui exprime la figure que la corde aura alors, on en déduit aisément la vitesse, que le point Y aura dans la direction

YX (fig. 3.); car puisqu'elle est $= - \left(\frac{dy}{dt} \right)$ nous aurons

$$- \left(\frac{dy}{dt} \right) = - c \Gamma' : (x + ct) + c \Delta' : (x - ct).$$

Maintenant nous n'avons qu'à poser $t = 0$ pour avoir l'état initial de la corde auquel nous avons vû, qu'il doit

devenir $y = s$, & $- \left(\frac{dy}{dt} \right) = u$, où s & u sont des fonctions données de x ; nous aurons donc

$$s = \Gamma : x + \Delta : x \quad \& \quad u = - c \Gamma' : x + c \Delta' : x,$$

& de ces deux équations il faut déterminer la nature des deux fonctions indiquées par les signes Γ & Δ , ou bien des deux courbes dont les appliquées représentent ces fonctions.

XXX. Pour cet effet multiplions la dernière équation par dx , & en prenant l'intégrale nous aurons

$$\frac{\int u dx}{c} = -\Gamma : x + \Delta : x,$$

cette équation jointe à la première nous fournit

$$\Gamma : x = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2c} \int u dx \quad \& \quad \Delta : x = \frac{1}{2} s + \frac{1}{2c} \int u dx,$$

où il faut remarquer que s marque l'appliquée XS de la courbe donnée ASB , qui répond à l'abscisse x , & que $\int u dx$ exprime l'aire AXV de l'autre courbe aussi donnée AVB , qui convient à la même abscisse x . D'où l'on comprend, que pour avoir les fonctions $\Gamma : (x + ct)$ & $\Delta : (x - ct)$ on n'a qu'à prendre au lieu de l'abscisse x , dans les deux courbes données, ou $x + ct$ pour la première, ou $x - ct$ pour l'autre fonction.

XXXI. De là on tire d'abord la construction suivante de notre question. Soit ASB (*fig. 4.*) la figure à laquelle a été réduite la corde au commencement, AVB l'échelle des vitesses, dont les appliquées XV représentent les vitesses que tous les points de la corde S ont reçues au commencement dans le sens SX . Cela posé après le tems écoulé $= t$, le point de la corde S sera parvenu en Y , de sorte que l'intervalle XY soit $= \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$; or nous venons de voir que $\Gamma : x =$

$$\frac{1}{2} XS - \frac{1}{2c} AXV \quad \& \quad \Delta : x = \frac{1}{2} XS + \frac{1}{2c} AXV.$$

Donc prenant de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$ pour avoir les abscisses $AT = x + ct$ & $At = x - ct$; nous aurons pour le lieu cherché

Y l'ap-

$$Y \text{ l'appliquée } XY = \frac{1}{2} TN - \frac{1}{2c} \cdot ATU + \frac{1}{2} tn + \frac{1}{2c} \cdot Atu \text{ ou bien } XY = \frac{1}{2c} (TN + tn) - \frac{1}{2c} \cdot tTUu.$$

XXXII. Voici donc une construction bien simple pour déterminer le lieu de chaque point de la corde après un tems quelconque de t secondes écoulé depuis le commencement, & cette construction est uniquement fondée sur les deux courbes données ASB & AVB , par lesquelles l'état initial de la corde est déterminé. On voit aussi que cette construction réussit également bien, soit que ces deux courbes données soient renfermées dans quelque équation analitique, ou qu'elles soient tirées d'une manière quelconque sans qu'aucune loi de continuité y ait lieu. Il n'y a ici absolument rien, qui demande une expression analitique pour la nature de ces deux courbes, & dès qu'elles sont tracées leur route suffit toute seule pour déterminer le mouvement tout entier de la corde, puisque sachant pour tout tems les lieux de tous les points de la corde, on ne sauroit plus rien désirer pour une parfaite connoissance du mouvement. Je ne reconnois ici d'autres limitations, que celles que j'ai raportées au commencement, sans lesquelles notre solution ne sauroit avoir lieu.

XXXIII. Cette construction n'est assujettie à aucun inconvénient, tant que les points T & t tombent entre les termes de la corde A & B , mais quand ils tombent au delà, où ni l'une, ni l'autre courbe donnée ne fournit plus des appliquées, on voit bien qu'il faut continuer l'une & l'autre de ces courbes pour que cette construction puisse être mise en pratique. D'où résulte cette question bien importante, selon quelle loi il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà des termes de la corde A & B , afin que notre construction nous découvre le vrai mouvement de la corde; comme cette loi doit être

commune à toutes les courbes données par l'état initial, soit qu'elles soient continues ou discontinues, je remarque d'abord que cette loi ne fauroit être attachée à l'équation analitique qui exprimeroit peut-être la nature d'une telle courbe. Ainsi par exemple, si l'une de ces courbes étoit un arc de cercle, il seroit fort-mal à propos, si l'on vouloit continuer cet arc jusques à remplir un cercle tout entier.

XXXIV. Dans cette incertitude il faut s'en tenir uniquement à la Théorie, qui nous a conduit si bien jusqu'ici sans que nous aions besoin de nous livrer à des conjectures. En effet n'ayant pas encore tenu compte de toutes les circonstances qui concourent à déterminer le mouvement de la corde, il ne faut pas être surpris que la continuation de ces courbes ne soit pas encore décidée. Or nous n'avons pas encore introduit dans le calcul cette circonstance fort-essentielle à la question, que la corde est fixée par ces deux bouts A & B , de sorte que l'un & l'autre de ces points demeure toujours en repos. Sans cette condition la continuation de nos courbes seroit effectivement indéterminée, & partant c'est de là qu'il faut tirer la véritable loi que nous devons suivre dans cette opération. Je m'en vais donc rechercher cette loi dans les Articles suivans.

*Continuation des deux courbes données pour achever
notre construction.*

XXXV. Puisque notre question renferme essentiellement cette condition, que les deux points A & B demeurent toujours immobiles, la continuation des deux courbes ASB & AVT doit être telle, que si nous en déterminons pour un tems quelconque les éloignemens de ces deux points à l'axe, ils se trouvent constamment $= 0$; donc si nous concevons le point X transporté ou en A , ou en B , il faut que dans l'un & l'autre cas on ait toujours

$$\frac{1}{2} (TN + tn) - \frac{1}{2c} tTUu = 0$$

quelque grands ou petits qu'on prenne de part & d'autre les intervalles égaux $XT = Xt$, qui sont proportionnels au tems. C'est donc cette circonstance si essentielle à notre question, qui nous montrera de quelle manière il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà de l'étendue de la corde AB .

XXXVI. Comme cette expression qu'on doit égaler à zero dépend des deux courbes données à la fois, j'observe d'abord, que chaque partie doit évanouir séparément. Car si au commencement la corde aiant été réduite à la figure ASB avoit été relachée sans lui imprimer du mouvement, la courbe AVB évanouïroit ou seroit confondue avec l'axe même AB , & alors il s'agiroit de continuer la seule courbe ASB , d'où l'on tireroit $TN + tn = 0$. De la même manière, si au commencement la corde avoit été laissée dans son état naturel, & qu'on eut imprimé à chacun de ses points un certain mouvement représenté par la courbe AVB , de sorte que l'autre courbe ASB fût confondue avec l'axe AB : on n'auroit qu'à continuer la seule courbe AVB , dont la continuation devoit être telle, qu'il fut $tLUu = 0$, en prenant le point X ou en A , ou en B .

XXXVII. Cependant il n'est pas absolument nécessaire, qu'on pose séparément $TN + tn = 0$, & l'aire $tTUu = 0$, car on verra facilement que tout revient au même, pour vû qu'on fasse enforte que $TN + tn - \frac{1}{c} tTUu$ évanouïsse, sans que chaque partie séparément se réduise à rien. Ainsi quoique la continuation de nos deux courbes soit indéterminée en elle même, l'usage que nous en ferons est néanmoins déterminé, & partant rien n'empêche que nous ne continuions chacune à part, sans avoir égard à l'autre,

& de là nous tirerons la méthode la plus simple pour la pratique. Donc puisque nous avons à remplir ces deux conditions,

$$1^{\circ} TN + tn = 0 \quad \& \quad 2^{\circ} tTUu = 0$$

la première détermine la continuation de la courbe ASB au delà du terme A , & nous fait voir, que l'appliquée tn doit être égale à TN , mais posée dans une situation contraire par rapport à l'axe AB continué. Or la même continuation doit aussi avoir lieu dans l'autre courbe AUB afin que l'aire $tTUu$ soit réduite à rien.

XXXVIII. Soit donc AB (fig. 5.) la corde dans son état naturel, que nous supposons de la même épaisseur par tout, & nommant comme ci-dessus sa longueur $AB = a$, son poids = P , & sa tension = T , posons pour abréger

$$c = \sqrt{\frac{2Tg^a}{P}}, \quad \text{où } g \text{ marque la hauteur d'où un corps tombe dans une seconde.}$$

Cela posé soit ASB la figure, à laquelle la corde a été réduite au commencement, & AVB l'échelle des vitesses qui lui ont été imprimées au moment du relâchement, & pour déterminer le mouvement que la corde aura dans la fuite, il faut continuer les deux courbes au delà de A en sorte, que prenant les intervalles AX & Ax égaux entr'eux, il soit $xs = XS$ & $xu = XV$. D'où l'on voit que les courbes continuées AsB' & AuB' seront égales & semblables aux données ASB & AVB . Par la même raison au delà du terme B il faut décrire les courbes $Bs'A'$ & $Bu'A'$ égales & semblables aux courbes BSA & BVA , mais dans une situation contraire à l'égard de l'axe continué AB .

XXXIX. Par cette opération on poussera la continuation de nos courbes par les espaces AB' & BA' égaux à la longueur de la corde AB . Aiant maintenant à droite du point A les courbes $ASB's'A'$ & $AVBu'A'$, il faut qu'on ait à gauche des courbes semblables & égales $AsB'S'A''$

& $A u B' V'' A''$ décrites de l'autre côté de l'axe : & il en est encor de même au delà du terme B . D'où il est évident comment la continuation doit se faire de part & d'autre à l'infini; on n'a qu'à prendre sur la continuation de l'axe les intervalles AB' , $B'A''$, $A''B'''$ &c. & $B'A'$, $A'B''$, $B''A'''$ &c. égaux à la longueur de la corde AB , & décrire sur chacun de ces intervalles les deux courbes données ASB & AVB alternativement au dessus & au dessous de l'axe, comme l'ordre des lettres A & B le marque plus clairement qu'on ne le fauroit expliquer par une longue description. Voilà donc nos deux courbes continuées à l'infini, & cela conformément à la Théorie du mouvement.

*Détermination de l'état de la corde
pour chaque tems proposé.*

XL. Pour déterminer l'état de la corde à un tems quelconque de t secondes (fig. 5.) depuis le commencement, tout revient à déterminer le lieu où se trouvera alors chaque point de la corde, c'est-à-dire sa distance de l'axe ou de l'état naturel de la corde AB . Considérons donc un point quelconque de la corde X , qui au commencement a été en S , & soit y la distance à laquelle il se trouvera à présent au dessus de l'axe selon la figure. Pour cet effet qu'on prenne sur l'axe de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$, & puisque l'appliquée dans ces deux points ont une situation contraire à celle que nous avons supposées ci-dessus, nous aurons en vertu du §. XXXI.

$$y = -\frac{1}{2} (TN + tn) - \frac{1}{2c} \cdot \text{aire } tTUu$$

en tant que cette aire tombe au dessous de l'axe.

XLI. Or pour avoir cette aire de l'échelle des vitesses AVB continuée, qui est comprise entre les appliquées

tu & TU , on voit qu'elle est composée de l'aire AVB au dessous de l'axe, & des deux aires Atu & BTU au dessus de l'axe : d'où nous aurons

$$y = -\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2}(AVB - Atu - BTU)$$

pour l'éloignement du point X au dessus de l'axe, d'où l'on comprend que si la valeur de cette expression est négative, le point X se trouve alors au dessous ou de l'autre côté de l'axe. Comme ces deux courbes se trouvent alternativement au dessus & au dessous de l'axe, il est clair qu'avec le tems le point X passera tantôt au dessus & tantôt au dessous de l'axe, d'où résultera un mouvement d'oscillation semblable à celui d'un pendule que je m'en vais examiner plus soigneusement, puisque c'est à cet article auquel presque tous ceux qui ont traité cette matière, se sont attaché principalement.

*Considérations sur le mouvement de vibration
des cordes également épaisses.*

XLII. Cherchons d'abord l'état de la corde après le tems t , qui donne $XT = Xt = AB = a$, de sorte que ce tems soit $t = \frac{a}{c} = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ exprimé en secondes. Donc puisque $XT = AB$ & $Xt = AB$, nous aurons $BT = AX$ & $At = BX$. Prenons sur la corde AB le point ξ en sorte que $B\xi = AX$, pour avoir $BT = B\xi$ & $At = A\xi$, & par la loi de continuation nous aurons les appliquées $TN = \xi\sigma$, $TU = \xi\sigma$, & $tn = \xi\sigma$, $tu = \xi\sigma$, & de là les aires $BTU = B\xi\sigma$ & $Atu = A\xi\sigma$; de sorte que $AVB - Atu - BTU = \sigma$. Par conséquent le point X de la corde se trouvera alors à la distance de l'axe $y = -\frac{1}{2}(TN + tn) = -\xi\sigma$

ou bien au dessous de l'axe en y de sorte que $Xy = \xi \tau$,
 d'où l'on voit qu'après le tems $t = a \sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \sqrt{\frac{Pa}{2Tg}}$,
 toute la corde aura la figure $Ay\zeta B$ semblable à la fi-
 gure initiale, mais doublement renversée, savoir de haut
 en bas, & de droite à gauche. Il y aura donc aussi $\xi \zeta$
 $= XS$.

XLIII. De là on comprend déjà qu'après le tems dou-
 ble $t = 2a \sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde doit reprendre la première
 figure ASB , qui lui a été imprimé au commencement.
 Car supposant $t = \frac{2a}{c}$ les points T , t parviendront en X' &
 X'' , de sorte que $XX' = XX'' = 2AB$, & les ap-
 pliquées en X' & X'' les mêmes qu'en X , aussi l'aire
 de l'échelle des vitesses comprise entre les appliquées $X'V'$
 & $X''V''$ devient $= 0$. Alors donc l'éloignement du point
 X à l'axe AB en haut sera $y = \frac{1}{2} (X'S' + X''S'')$
 $= XS$, ou bien la corde se trouvera parfaitement réta-
 blie dans sa première situation ASB , & aura aussi par
 conséquent le même mouvement, qui lui a été imprimé
 au commencement. Il n'est pas besoin d'avertir ici, que
 je fais abstraction de tous les empêchemens & autres cau-
 ses, qui affoiblissent peu à peu le mouvement de la corde,
 & l'éteignent enfin tout-à-fait. Cette circonstance ne touche
 pas plus la solution générale que je donne ici, que toutes
 les solutions particulières qui ont été publiées par d'autres.

XLIV. Puisque nous venons de voir qu'après le tems t
 $= 2a \sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde parvient dans son premier état,
 & qu'au milieu de ce tems elle s'est trouvée dans une si-
 tuation renversée, en comparant ce mouvement avec celui
 d'un pendule, on a raison de dire, que pendant le tems

$t = 2a \sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde a achevé deux oscillations ou deux vibrations, de sorte que le tems de chaque vibration est censé d'être $= a \sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ secondes, & partant le nombre des vibrations, que la corde achevera pendant une seconde sera $= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2Tga}{P}} = \sqrt{\frac{2Tg}{Pa}}$. C'est ce nombre qu'on regarde comme la mesure du son que la corde rend par son mouvement de vibration. Pour mieux comprendre cette mesure absolüe, supposons la tension T équivalente au poids qu'auroit une corde de la même grosseur dont la longueur seroit $= k$, de sorte qu'on ait $T : P = k : a$, & alors nous aurons pour la mesure du son ce nombre $\frac{\sqrt{2gk}}{a}$, d'où l'on voit que le son est réciproquement proportionel à la longueur de la corde, la tension k demeurant la même.

XLV. Quoiqu'il soit certain que la corde revient toujours après le tems $t = 2a \sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \frac{2a}{\sqrt{2gk}}$ dans le même état; il ne s'ensuit pas nécessairement que la corde n'acheve dans ce tems que deux vibrations, & il seroit bien possible qu'elle en fit cependant ou quatre, ou 6, ou 8, ou plusieurs selon un nombre pair quelconque, & alors le nombre des vibrations rendues dans une seconde deviendroit deux, ou 3, ou 4, ou plusieurs fois plus grand que je l'ai supposé. Cela dépend d'une certaine disposition de l'état initial, comme je l'ai remarqué autres fois, & d'où M. Bernoulli sur tout a dérivé l'explication de tous les sons qu'une corde peut rendre tant séparément qu'à la fois. Je remarque ici seulement que toutes les belles propriétés que ce profond Géomètre a déduites de la nature des lignes courbes comprises dans les équations des *sinus* raportées ci-dessus §. XIX. conviennent

nent également à toutes les autres courbes qui ont à peu près la même figure, quand même leur nature ne pourroit pas être exprimée par aucune équation analitique; ou bien les mêmes phénomènes résulteroient, si les plusieurs ventres, que M. Bernoulli considère dans les cordes, étoient des arcs circulaires, ou des portions de toute autre courbe, égales entr'elles.

XLVI. Ainsi si les deux courbes ASB & AVB qui déterminent l'état initial de la corde, étoient semblables à nos deux courbes représentées dans notre figure sur l'espace ou double AA' ou triple AB'' &c. de la longueur de la corde AB , de sorte que ces courbes fussent réduites dans l'espace AB , alors la corde rendroit ou deux ou trois fois plus de vibrations, que je viens de marquer, tout comme si ces courbes étoient des lignes de *sinus*. Je remarque encore, que si les deux courbes ASB & AVB avoient deux moitiés semblables entr'elles, ou que la ligne droite tirée perpendiculairement par le milieu de la corde AB , fût un diamètre de ces deux courbes, alors toute la corde parviendroit au même instant dans l'état naturel AB , de sorte que ce n'est pas non plus une propriété, qui ne convienne qu'aux seules lignes des *sinus*.

*Du mouvement d'une corde qui n'est ébranlée
que dans une partie.*

XLVII. De là il est clair, que tant s'en faut que ma solution soit contraire à celles que M.^{rs} Bernoulli & D'Alembert ont données de cette question, qu'elle les comprend plutôt parfaitement avec cette seule circonstance, qu'elle me paroît beaucoup plus générale. Si l'on me vouloit objecter, que l'équation générale pour les lignes des *sinus* donnée ci-dessus §. XIX. renferme en soi toutes les cour-

bes possibles, je crois que le cas que je m'en vais développer détruira ce sentiment. Qu'on n'ébranle d'abord que la partie AD de la corde AB , en la réduisant à la figure AnD , & qu'on la relâche subitement sans lui imprimer du mouvement, de sorte que l'échelle des vitesses se confonde par tout avec l'axe pendant que l'autre ligne est composée de la courbe AnD , & de la droite DB , dont la continuation formera au delà de A la courbe Ad , & de part & d'autre du point A les courbes $A'D'$, & $A'd'$ égales à AnD , & ainsi de suite.

XLVIII. Dans ce cas il ne s'agit point proprement d'un mouvement de vibration, mais on demande comment cette agitation initiale, est successivement répandue par toute la corde. Soit comme auparavant la longueur $AB = a$, le poids $= P$, la tension $= T$, & pour abréger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$: considérons un point quelconque de la corde X , qui depuis l'ébranlement restera en repos pendant le tems $= \frac{XD}{c}$ & alors il commencera à être agité pendant un tems $= \frac{2AD}{c}$ après quoi il sera encore en repos jusqu'à ce que le tems t multiplié par c atteigne la courbe $d'A'D'$, & ainsi de suite; de sorte que chaque partie de la corde sera mise alternativement en mouvement & en repos. Dès le commencement on verra avancer l'agitation AnD jusqu'à B , d'où elle retournera jusqu'en A , & ainsi de suite, en faisant chaque tour en même tems, que la corde acheveroit une oscillation. Maintenant on m'accordera aisément que ce mouvement ne sauroit en aucune manière être représenté par les lignes des *sinus*.

RECHERCHES

27

*Sur le mouvement des cordes inégalement
grosses.*

PAR M. EULER.

I. **A** IANT examiné dans le Mémoire précédent le mouvement des cordes également grosses; j'y ai donné l'équation générale pour le mouvement des cordes, dont la grosseur est variable selon une loi quelconque, où il faut toujours sous-entendre que les agitations de la corde sont quasi infiniment petites. Soit donc IK (*fig. 1.*) une telle corde quelconque tendue par la force $= T$, & prenant d'un point fixe I une portion indéfinie $IX = x$, posons l'épaisseur en $X = qq$, en sorte que $qq dx$ exprime la masse & le poids de l'élément $Xx = dx$, & partant $\int qq dx$ la masse & le poids de la portion $IX = x$, que j'avois nommé $= p$. Cela posé si à un tems quelconque de t secondes depuis une époque fixe le point de la corde X se trouve en Y , nommant l'intervalle $XY = y$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$\frac{2Tg}{qq} \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dt^2} \right),$$

où g marque la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une seconde.

II. Puisque la tension T est mesurée par un poids, en le prenant de la même matière dont est faite la corde, nous pouvons substituer sa masse, ou son volume à sa place, de sorte que T sera une grandeur de trois dimensions, & partant $\frac{2Tg}{qq}$ une de deux, que je nommerai $\frac{2Tg}{qq} = rr$,

d'où l'on voit que r sera une certaine fonction de x don-

née par la grosseur & la tension de la corde. Tout revient donc à résoudre cette équation $rr \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dr^2} \right)$, ou à trouver quelle fonction sera l'appliquée y des deux variables x & r . Il faut donc chercher l'intégrale, & même l'intégrale complète de cette équation, qui exigeant une double intégration, l'intégrale ne sauroit être complète à moins qu'elle ne renferme deux fonctions arbitraires.

III. Or sur ce sujet je dois d'abord cette fâcheuse remarque, que tous mes efforts ont été jusqu'ici inutiles pour trouver en général l'intégrale complète de notre équation, quelque fonction que soit la quantité rr de x , cependant j'ai trouvé une infinité de cas, où l'intégration réussit, & partant où l'on peut déterminer le mouvement de la corde. Il faut donc absolument borner nos recherches à de certaines espèces de cordes, dont la grosseur $qq = \frac{2Tg}{rr}$ est exprimée par de certaines fonctions de x . Car il arrive à notre équation $rr \left(\frac{ddy}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dr^2} \right)$ à peu près la même chose qu'à l'équation $dy + y y dx = X dx$ proposée autrefois par le Comte Riccati, qu'elle n'est intégrable qu'en de certains cas, & ces cas suivent dans l'une & l'autre presque la même loi. Il est donc bien important de chercher ces cas ou les loix de la grosseur variable, où l'on est en état de déterminer le mouvement de la corde.

IV. Comme dans le cas des cordes également grosses, où rr étoit une quantité constante $= cc$, l'intégrale complète a été trouvée $y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$; On comprend qu'en général toutes les fois que l'intégration réussit, la forme de l'intégrale doit être semblable, & après quelques essais j'ai trouvé que dans ces cas l'intégrale peut être représentée sous cette forme; $y =$

$P\Gamma: (s u d x + t) + Q\Gamma': (s u d x + t) + R\Gamma'' (s u d x + t) + \&c.$
 où $P, Q, R \&c.$ de même que u sont de certaines fonctions de la seule variable x . Ensuite puisque la quantité t se peut prendre aussi bien négativement que positivement, pour compléter l'intégrale on y doit ensuite ajouter encore ces termes :

$P\Delta: (s u d x - t) + Q\Delta': (s u d x - t) + R\Delta'' (s u d x - t) + \&c.$
 qui n'exigent donc point une recherche particulière. De là il est clair que pour trouver des cas intégrables, on n'a qu'à pousser successivement plus loin les termes de cette expression générale, ce qui me fournit le sujet des problèmes suivans.

P R O B L E M E I.

V. Trouver les conditions de la fonction rr , pour que l'intégrale de notre équation $rr \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \left(\frac{ddy}{dt^2} \right)$ ait cette forme $y = P\Gamma: (s u d x + t)$.

S O L U T I O N.

Puisque P & u sont des fonctions de la seule variable x , prenons de cette forme les différentiels du premier degré

$$\left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dP}{dx} \Gamma: (s u d x + t) + P u \Gamma': (s u d x + t) \&$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right) = P \Gamma': (s u d x + t), \& \text{ de là passons aux dif-}$$

$$\text{férentiels du second degré: } \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^2P}{dx^2} \Gamma: (s u d x + t)$$

$$+ \frac{2u dP + P du}{dx} \Gamma': (s u d x + t) + P u u \Gamma'': (s u d x + t)$$

$$\& \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right) = P \Gamma'': (s u d x + t). \text{ Maintenant faisons}$$

30

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{rr} \left(\frac{ddy}{dr^2}\right)$, enforte que chaque espace de fonctions soit séparément réduite à zero, & nous aurons ces trois égalités

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0, \quad \frac{2u dP + P du}{dx} = 0, \quad \& \quad P_{uu} = \frac{P}{rr},$$

dont la première donne $P = \alpha x + \beta$, la seconde $PP_u = A$

ou $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}$, & la troisième $uu = \frac{1}{rr}$ ou $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$. Ainsi notre équation est intégrable dans le cas

$$rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA} \text{ où la grosseur de la corde devient } qq \\ = \frac{2Tg \cdot AA}{(\alpha x + \beta)^2}, \quad \& \text{ alors on aura } P = \alpha x + \beta \quad \& \\ u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}.$$

C O R O L L. 1.

VI. Posant $\alpha = 0$ & $\beta = 1$ nous aurons le cas des cordes également grosses ou $qq = 2Tg \cdot AA$, donc posant la grosseur $= ff$, à cause de $AA = \frac{ff}{2Tg}$, il en

résulte $rr = \frac{2Tg}{ff}$, $P = 1$, & $u = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$; de sorte que

l'intégrale complète de cette équation $\frac{2Tg}{ff} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) =$

$$\left(\frac{ddy}{dr^2}\right) \text{ fera } y = \Gamma: \left(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} + t\right) + \Delta: \left(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} - t\right).$$

C O R O L L. 2.

VII. Si α n'est pas zero il est permis de poser $\beta = 0$ & $\alpha = 1$, puisqu'on peut prendre le point I où l'on

veut indépendamment des points A & B , où l'on veut ensuite fixer la corde. Soit donc la grosseur de la corde en $X = \frac{c^2}{x^2} = qq$, & nous aurons $2Tg \cdot AA = c^2$,

donc $A = \frac{c^2}{\sqrt{2Tg}}$, $P = x$, & $u = \frac{c^2}{xx\sqrt{2Tg}}$, par

conséquent $\int u dx = \frac{-c^2}{x\sqrt{2Tg}}$.

C O R O L L. 3.

VIII. Donc si l'épaisseur de la corde en X est $qq = \frac{c^2}{x^2}$, la tension étant $= T$, le mouvement de la corde sera contenu dans cette équation:

$$y = x\Gamma: \left(\frac{c^2}{x\sqrt{2Tg}} - t\right) + x\Delta: \left(\frac{c^2}{x\sqrt{2Tg}} + t\right),$$

& on peut maintenant fixer la corde en tels deux points A & B que l'on veut.

S C H O L I E.

IX. Voilà donc déjà une certaine espèce de cordes, dont on peut déterminer le mouvement; une telle corde est formée par la révolution d'une hyperbole Fab (fig. 2.) autour de son asymptote IB , la nature de cette hyperbole étant exprimée par cette équation $XQ = \frac{b^2}{gX^2} = \frac{b^2}{xx}$

car alors la section de la corde au point X devient $= \frac{\pi b^2}{x^2}$ qui étant égale à $qq = \frac{c^2}{x^2}$, on aura $c^2 = \pi h^2$

& $c^2 = h^2\sqrt{\pi}$. Donc si nous exprimons la tension T par le poids d'un cylindre fait de la même matière, dont le demi diamètre de la base est $= h$ & la hauteur $= k$,

on aura $T = \pi h h k$, & partant $\frac{c^2}{x\sqrt{2Tg}} = \frac{bb}{x\sqrt{2gk}}$. Puisque l'épaisseur de cette corde au point I devient infiniment grande, on comprend aisément, que la partie de la corde qu'on veut ébranler, AB , doit être assez éloignée du point I , afin que la corde ne soit pas trop grosse.

P R O B L E M E 2.

X. Trouver les conditions de la fonction rr , ou bien de la grosseur qq , pour que l'intégrale de notre équation $(\frac{ddy}{dx^2}) = \frac{qq}{2Tg} (\frac{ddy}{dr^2})$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma: (s u d x + t) + Q\Gamma': (s u d x + t).$$

S O L U T I O N.

Puisque P, Q & u sont des fonctions de la seule variable x , en prenant les différentiels du second degré comme dans le Problème précédent, & en omettant pour abrégér la quantité $s u d x + t$ après les signes de fonctions $\Gamma, \Gamma', \Gamma'',$ &c. nous aurons:

$$\begin{aligned} (\frac{ddy}{dx^2}) &= \frac{ddP}{dx^2} \Gamma: + \frac{2u dP + P du}{dx} \Gamma': + P u u \Gamma'': \\ &+ \frac{ddQ}{dx^2} \Gamma': + \frac{2udQ + Q du}{dx} \Gamma'': + Q u u \Gamma''': \end{aligned}$$

qu'il faut égaler à

$$\frac{qq}{2Tg} (\frac{ddy}{dr^2}) = \frac{qqP}{2Tg} \Gamma'': + \frac{qqQ}{2Tg} \Gamma''':$$

d'où nous tirons d'abord $\frac{qq}{2Tg} = u u$, & ensuite

$$\frac{2udQ + Q du}{dx} = 0; \quad \frac{2u dP + P du}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0, \quad \& \quad \frac{ddP}{dx^2} = 0$$

dont l'intégration fournit:

QQu

$$QQu = A; PPu + \int \frac{PddQ}{dx} = B \text{ \& } P = \alpha x + \beta.$$

$$\text{Or } \int \frac{PddQ}{dx} = \frac{P dQ}{dx} - \int \frac{dP}{dx} dQ, \text{ \& } \text{puisque } \frac{dP}{dx} = \alpha,$$

$$\text{nous aurons } \int \frac{PddQ}{dx} = \frac{(\alpha x + \beta)dQ}{dx} - \alpha Q, \text{ de sorte}$$

$$\text{que notre seconde équation sera: } (\alpha x + \beta)^2 u + \frac{(\alpha x + \beta)dQ}{dx} - \alpha Q = B, \text{ ou bien à cause de } u = \frac{A}{QQ}$$

par la première:

$$\frac{A(\alpha x + \beta)^2 dx}{QQ} + (\alpha x + \beta)dQ - \alpha Q dx = B dx.$$

Posons maintenant $Q = (\alpha x + \beta) \zeta$, pour avoir

$$\frac{A dx}{z z} + (\alpha x + \beta)^2 d\zeta = B dx,$$

d'où nous tirons

$$\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{z z d\zeta}{B z z - A}, \text{ \& } C - \frac{x}{\alpha(\alpha x + \beta)} = \int \frac{z z d\zeta}{B z z - A}$$

\& de là nous aurons ζ déterminé par x ; ensuite aiant

$$Q = (\alpha x + \beta) \zeta, u = \frac{A}{QQ}, P = \alpha x + \beta, \text{ \&}$$

$qq = 2 T g u u$, on verra sous quelle loi de la grosseur notre équation admet l'intégration.

C O R O L L. I.

XI. Afin que ζ puisse aisément se déterminer par x , li-

mitons les cas en sorte que $B = 0$, \& $\int \frac{z z dz}{B z z - A} =$

$\frac{-z^3}{3A}$. Or alors il convient de distinguer deux cas selon

que $\alpha = 0$ ou non. Soit premièrement $\alpha = 0$ \& $\beta = 1$,

pour avoir $x = e - \frac{z^3}{3A}$, donc $\zeta = \sqrt[3]{3A(e - x)}$

$$= Q, u = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9(c-x)^2}}, P = 1, \& qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AA}}{\sqrt[3]{81(c-x)^2}}$$

COROLL. 2.

XII. Posons pour ce cas $e = 0$, & soit la grosseur $qq = cc\sqrt[3]{\frac{c^2}{x^2}}$; nous aurons donc $\sqrt[3]{AA} = \frac{c\sqrt[3]{81c^2}}{2Tg}$, & $\sqrt[3]{A} = \frac{c\sqrt[3]{9cc}}{\sqrt{2Tg}}$; donc $u = \frac{c}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{cc}{xx}}$, & $\int u dx = \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $Q = -\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, de sorte que pour ce cas l'équation intégrale fera

$$y = \Gamma: \left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t \right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} \Gamma': \left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t \right) \\ + \Delta: \left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t \right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} \Delta': \left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t \right).$$

COROLL. 3.

XIII. Pour l'autre cas posons $\beta = 0$ & $\alpha = 1$ pour avoir $\frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{z^2}{3A} = \frac{c+x}{cx}$, donc $z = \sqrt[3]{\frac{3A(c+x)}{cx}}$, & ensuite $Q = \sqrt[3]{\frac{3A}{c}xx(c+x)}$, $u = \frac{\sqrt[3]{Acc}}{\sqrt[3]{9x^2(c+x)^2}}$, $P = x$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AAc^2}}{\sqrt[3]{81x^2(c+x)^2}}$. Soit donc la grosseur $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^2c^2}{x^2(c+x)^2}}$ pour avoir $\sqrt[3]{A} = \frac{f\sqrt[3]{9f^2}}{\sqrt{2Tg}}$, donc $Q = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{fxx(c+x)}{c}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{ccf}{x^2(c+x)^2}}$.

COROLL. 4.

XIV. Dans ce même cas posons $c = \infty$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff \sqrt[3]{\frac{f^3}{x^3}}$, & puisque

$$P = x, Q = \frac{3ff \sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}, \text{ \& } u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x^3}}, \text{ donc}$$

$$f u d x = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}}, \text{ \& l'équation intégrale sera}$$

$$= x \Gamma: \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t \right) + \frac{3ff \sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}} \Gamma': \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t \right) \\ + x \Delta: \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t \right) + \frac{3ff \sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}} \Delta': \left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t \right).$$

SCHOLIE.

XV. Prenant pour la grosseur de la corde cette forme $qq = \frac{f^{2+n}}{x^n}$ nous avons déjà decouvert quatre cas, qui admettent la résolution, qui sont $n = 0$, $n = 4$, $n = \frac{4}{3}$, $n = \frac{8}{3}$, & c'est aussi dans ces mêmes cas

que l'équation Riccatienne $dy + yy dx = \frac{A dx}{x^n}$ est intégrable: d'où l'on peut conclure, que les cas suivans

$$n = \frac{8}{5}, n = \frac{12}{5}, n = \frac{12}{7}, n = \frac{16}{7} \text{ \&c. auront aussi}$$

la même propriété, que le mouvement de la corde pourra alors être déterminé. Mais le cas du Coroll. 3. n'est pas moins remarquable, où la grosseur de la corde est $qq = ff \sqrt[3]{\frac{f^3 c^3}{x^3(c+x)^3}}$; pour la résolution duquel j'observe que

$$f u d x = \frac{-3ff \sqrt[3]{f}}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{c+x}{cx}} = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f(c+x)}{cx}} \text{ d'où}$$

e ij

l'on formera aisément l'équation intégrale complète. Mais notre résolution s'étend beaucoup plus loin; d'abord aiant trouvé le raport entre x & ζ par cette équation $\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2}$

$$= \frac{z z dz}{B z z - A}, \text{ on aura } P = \alpha x + \beta, Q = (\alpha x + \beta) \zeta$$

& $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2 \zeta \zeta}$, d'où nous tirons

$$\int u dx = \int \frac{A dx}{(\alpha x + \beta)^2 \zeta \zeta} = \int \frac{A dz}{B \zeta \zeta - A},$$

de sorte que toutes nos quantités peuvent être déterminées

aisés simplement par la nouvelle variable ζ , aiant $\frac{1}{\alpha x + \beta}$

$$= -\alpha \int \frac{z z dz}{B z z - A}. \text{ Ainsi ce Probleme nous fournit une}$$

infinité d'espèces de cordes dont le mouvement peut être déterminé.

P R O B L E M E 3.

XVI. Trouver les conditions de la grosseur de la corde $q q$, pour que l'intégrale de notre équation $(\frac{ddy}{dx^2})$

$$= \frac{q q}{2 T g} (\frac{ddy}{dx^2}) \text{ ait cette forme:}$$

$$y = P \Gamma: (fudx + t) + Q \Gamma': (fudx + t) + R \Gamma'': (fudx + t).$$

S O L U T I O N.

Faisant le calcul comme dans le Probleme précédent; on trouve d'abord $q q = 2 T g u u$, & ensuite il faut satisfaire à ces équations;

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0, \quad 2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0, \quad \& \quad 2udR + Rdu = 0,$$

dont la première & dernière donnent

$$P = \alpha x + \beta, \quad \& \quad R R u = A, \quad \text{ou} \quad u = \frac{A}{RR},$$

la seconde donne

$$P P u + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B, \quad \text{ou bien} \quad \frac{APP}{RR} + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B,$$

& la troisième

$$Q Q u + \frac{QdR}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dR = C.$$

Je m'arrêterai ici uniquement aux cas, où l'épaisseur $q q$, & partant aussi u devient égale à une certaine puissance de x , & où les lettres Q & R peuvent aussi être exprimées par des puissances de x . Ici il faut considérer deux cas, l'un où $P = 1$, & l'autre où $P = x$.

1° Soit donc $P = 1$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+1}$, & $R = \gamma x^{2n+2}$, pour obtenir le même nombre de dimensions dans nos égalités, & puisque la première est remplie d'elle même, les autres donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$n\alpha + (n+1)n\beta = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+1)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+2)(2n+1)\gamma = 0,$$

$$2udR + Rdu = 0,$$

$$4(n+1)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

donc $5n + 4 = 0$, & $n = -\frac{4}{5}$; or de la première

re nous tirons $\beta = -\frac{\alpha}{n+1} = -\gamma\alpha$, & de la secon-
de $(3n+2)\alpha\beta + 2(n+1)(2n+1)\gamma = 0$
il résulte $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$. Donc si $u = \alpha x^{-\frac{4}{5}}$ ou bien
la grosseur de la corde $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{8}{5}}$ à cause de
 $\int u dx = \gamma\alpha x^{\frac{1}{5}}$, le mouvement de la corde sera ex-
primé par cette équation

$$y = \Gamma: (\gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) - \gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} \Gamma': (\gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) \\ + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{1}{5}} \Gamma'': (\gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) + \Delta: (\gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} - t) \\ - \gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} \Delta': (\gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} - t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{1}{5}} \Delta'': (\gamma\alpha x^{\frac{1}{5}} - t),$$

où posant $qq = ff \left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{n}{5}}$ il faut prendre $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{4}{5}}$.

2° Soit $P = x$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+2}$,
& $R = \gamma x^{2n+3}$, & nos égalités donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0, \\ 2\alpha + n\alpha + (n+2)(n+1)\beta = 0 \\ 2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0, \\ 2(n+2)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+3)(2n+2)\gamma = 0, \\ 2udR + Rdu = 0, \\ 2(2n+3)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

d'où nous tirons

$$\beta = -\frac{(n+2)\alpha}{(n+1)(n+2)} = -\frac{\alpha}{n+1}, \gamma = -\frac{(3n+4)\alpha\beta}{(2n+3)(2n+2)},$$

& $5n + \beta = 0$; donc puisque $n = -\frac{6}{5}$, nous aurons

$$\beta = 5\alpha, \text{ \& } \gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha, \text{ \& ensuite } u = \alpha x^{-\frac{4}{5}},$$

$\int u dx = -\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}}$, & $qq = 2Tg \alpha \alpha x^{-\frac{11}{2}}$, de

forte que posant $qq = ff \left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{11}{2}}$ nous aions $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{6}{2}}$,

& pour le mouvement

$$\begin{aligned}
 y &= x\Gamma: (\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}} - t) + \gamma \alpha x^{\frac{4}{2}} \Gamma': (\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}} - t) \\
 &+ \frac{2\gamma}{3} \alpha \alpha x^{\frac{3}{2}} \Gamma'': (\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}} - t) + x\Delta: (\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}} + t) \\
 &+ \gamma \alpha x^{\frac{4}{2}} \Delta': (\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}} + t) + \frac{2\gamma}{3} \alpha \alpha x^{\frac{3}{2}} \Delta'': (\gamma \alpha x^{-\frac{1}{2}} + t).
 \end{aligned}$$

P R O B L E M E 4.

XVII. La grosseur de la corde qui répond à l'intervalle $IX = x$ étant exprimée ainsi $qq = ff \left(\frac{f}{x}\right)^{2-2n}$, trouver l'équation générale, qui en détermine le mouvement.

S O L U T I O N.

Prenons $u = \alpha x^{n-1}$, & il faut qu'il soit $\alpha = \frac{f^{2-n}}{\sqrt{2Tg}}$;

d'où nous tirons $\int u dx = \frac{\alpha}{n} x^n$. Posons maintenant pour notre équation intégrale cherchée

$$\begin{aligned}
 y &= P\Gamma: \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + Q\Gamma': \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) \\
 &+ R\Gamma'': \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + S\Gamma''': \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + \&c. \\
 &+ P\Delta: \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + Q\Delta': \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) \\
 &+ R\Delta'': \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + S\Delta''': \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + \&c.
 \end{aligned}$$

& soit $P = x^m$, $Q = Bx^{m+n}$, $R = Cx^{m+2n}$, $S = Dx^{m+3n}$ &c.
 où il faut remarquer que l'exposant m doit être ou $= 0$,
 ou $= 1$, afin que $\frac{ddP}{dx^2} = 0$. Cela posé nos égalités don-
 neront comme il suit:

$$2 u d P + P d u + \frac{d d Q}{d x} = 0$$

$$2 m \alpha + (n - 1) \alpha + (m + n) (m + n - 1) B = 0$$

$$2 u d Q + Q d u + \frac{d d R}{d x} = 0$$

$$2 (m + n) \alpha B + (n - 1) \alpha B + (m + 2n) (m + 2n - 1) C = 0$$

$$2 u d R + R d u + \frac{d d S}{d x} = 0$$

$$2 (m + 2n) \alpha C + (n - 1) \alpha C + (m + 3n) (m + 3n - 1) D = 0$$

$$2 u d S + S d u + \frac{d d T}{d x} = 0$$

$$2 (m + 3n) \alpha D + (n - 1) \alpha D + (m + 4n) (m + 4n - 1) E = 0;$$

d' où nous tirons

donc si $m = 0$

& si $m = 1$

$$\begin{array}{l}
 B = -\frac{\alpha (2m + n - 1)}{(m + n)(m + n - 1)}; \\
 C = -\frac{\alpha B (2m + 3n - 1)}{(m + 2n)(m + 2n - 1)}; \\
 D = -\frac{\alpha C (2m + 5n - 1)}{(m + 3n)(m + 3n - 1)}; \\
 E = -\frac{\alpha D (2m + 7n - 1)}{(m + 4n)(m + 4n - 1)};
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 B = -\frac{\alpha (n - 1)}{n(n - 1)}; \\
 C = -\frac{\alpha B (3n - 1)}{2n(2n - 1)}; \\
 D = -\frac{\alpha C (5n - 1)}{3n(3n - 1)}; \\
 E = -\frac{\alpha D (7n - 1)}{4n(4n - 1)};
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{l}
 B = -\frac{\alpha (n + 1)}{n(n + 1)}; \\
 C = -\frac{\alpha B (3n + 1)}{2n(n + 1)}; \\
 D = -\frac{\alpha C (5n + 1)}{3n(3n + 1)}; \\
 E = -\frac{\alpha D (7n + 1)}{4n(4n + 1)};
 \end{array}$$

Considérons séparément les deux cas où $m = 0$ & $m = 1$.

1^{er} CAS OÙ $m = 0$, ET $P = 1$.

Dans ce cas nous voyons que notre expression devient fi-
 nie toutes les fois que n est une telle fraction $\frac{1}{\lambda}$ où λ est

un nombre impair, Posons donc $n = \frac{1}{\gamma}$ pour avoir

$B =$

$$B = - \frac{\alpha \lambda (\lambda - 1)}{1 (\lambda - 1)} = - \lambda \alpha$$

$$C = - \frac{\lambda \alpha B (\lambda - 3)}{2 (\lambda - 2)} = + \frac{\lambda^2 (\lambda - 1) (\lambda - 3)}{1 \cdot 2 (\lambda - 1) (\lambda - 2)} \alpha^2$$

$$D = - \frac{\lambda \alpha C (\lambda - 5)^2}{3 (\lambda - 3)} = - \frac{\lambda^3 (\lambda - 1) (\lambda - 3) (\lambda - 5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 (\lambda - 1) (\lambda - 2) (\lambda - 3)} \alpha^3$$

$$E = - \frac{\lambda \alpha D (\lambda - 7)}{4 (\lambda - 4)} = + \frac{\lambda^4 (\lambda - 1) (\lambda - 3) (\lambda - 5) (\lambda - 7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (\lambda - 1) (\lambda - 2) (\lambda - 3) (\lambda - 4)} \alpha^4$$

&c.

&c.

Je n'ai pas ici effacé les facteurs qui se détruisent dans les numérateurs & dénominateurs, puisque toutes les fois qu'un numérateur évanouit, non seulement le coefficient qui lui répond, mais aussi tous les suivans peuvent être négligés. Voici donc les cas qui en résultent.

$$1^\circ \text{ Si } \lambda = 1, n = 1; qq = ff, \alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}}, fudx = \alpha x;$$

$$P = 1, Q = 0, R = 0 \text{ \&c.}$$

$$2^\circ \text{ Si } \lambda = 3, n = \frac{1}{3}; qq = ff \left(\frac{f}{x} \right)^{\frac{4}{3}}, \alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}} f^{\frac{2}{3}},$$

$$fudx = 3 \alpha x^{\frac{1}{3}}; P = 1, Q = - \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \alpha x^{\frac{1}{3}}, R = 0,$$

$$S = 0 \text{ \&c.}$$

$$3^\circ \text{ Si } \lambda = 5, n = \frac{1}{5}; qq = ff \left(\frac{f}{x} \right)^{\frac{8}{5}}, \alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}} \cdot \frac{4}{5},$$

$$fudx = 5 \alpha x^{\frac{1}{5}}; P = 1, Q = - \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{4} \alpha x^{\frac{1}{5}}, R = + \frac{5 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} \alpha^2 x^{\frac{2}{5}}, S = 0 \text{ \&c.}$$

$$4^\circ \text{ Si } \lambda = 7, n = \frac{1}{7}; qq = ff \left(\frac{f}{x} \right)^{\frac{12}{7}}, \alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}} \cdot f^{\frac{6}{7}},$$

$$fudx = 7 \alpha x^{\frac{1}{7}}; P = 1, Q = - \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{6} \alpha x^{\frac{1}{7}}, R = + \frac{7 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 5} \alpha^2 x^{\frac{2}{7}}, S = - \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} \alpha^3 x^{\frac{1}{7}}, T = 0 \text{ \&c.}$$

f

$$5^{\circ} \text{ Si } \lambda = 9, n = \frac{1}{9}; qq = ff \left(\frac{f}{x} \right)^{\frac{16}{9}}, a = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{9}};$$

$$\text{fudx} = 9ax^{\frac{1}{9}}; P = 1, Q = -\frac{9}{1} \cdot \frac{8}{8} ax^{\frac{1}{9}}, R = +\frac{9 \cdot 9}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{8 \cdot 6}{8 \cdot 7} a^2 x^{\frac{2}{9}}, S = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6} a^3 x^{\frac{3}{9}}, T = +\frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} a^4 x^{\frac{4}{9}}, V = 0 \text{ \&c.}$$

Pofons donc en général $\lambda = 2\mu + 1$, & foit $\lambda a = \beta$;

de forte que la groffeur de la corde $qq = ff \left(\frac{f}{x} \right)^{\frac{4\mu}{2\mu+1}}$; on

$$\text{prendra } \beta = \frac{(2\mu+1)f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{2\mu+1}}$$

& $\text{fudx} = \frac{a}{n} x^n = \beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coefficients $P, Q,$

R &c. feront déterminés ainfi;

$$P = 1$$

$$Q = -\frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}}{1}$$

$$R = +\frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta \beta x^{\frac{2}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2}$$

$$S = -\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3 x^{\frac{3}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$T = +\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-6)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4 x^{\frac{4}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ \&c.}$$

2^d CAS OU $m = 1$ ET $P = x$.

Dans ce cas notre expression devient finie toutes les fois que n est une telle fraction $-\frac{1}{\lambda}$ prenant pour λ un nombre

impair quelconque. Posons donc $n = -\frac{1}{\lambda}$, de sorte que la grosseur de la corde soit $qq = ff \left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{2\lambda+2}{\lambda}}$. Soit

ensuite $\alpha = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$ ou $\lambda\alpha = \beta = \frac{\lambda ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$, & nous

aurons $\int u dx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{\lambda}}$, d'où les autres coefficients seront

$$B = \frac{\lambda-1}{\lambda-1} \beta$$

$$C = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(\lambda-1)(\lambda-2)} \cdot \frac{\beta^2}{1 \cdot 2}$$

$$D = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)} \cdot \frac{\beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$E = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)} \cdot \frac{\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ \&c.}$$

Soit maintenant $\lambda = 2\mu + 1$, ou bien la grosseur de

la corde $qq = ff \left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu+4}{2\mu+1}}$. Qu'on prenne $\beta = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}}$

$f^{\frac{1}{2\mu+1}}$, & nous aurons $\int u dx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{2\mu+1}}$.

Or les coefficients P, Q, R, S &c. se trouveront déterminés de cette manière

44

$$P = x$$

$$Q = \frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta}{1} \cdot x^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

$$R = \frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta^2}{1 \cdot 2} \cdot x^{\frac{2\mu-1}{2\mu+1}}$$

$$S = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^{\frac{2\mu-2}{2\mu+1}}$$

$$T = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-6)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^{\frac{2\mu-3}{2\mu+1}} \quad \&c.$$

C O R O L L. I.

XVIII. Voions quelles valeurs obtiendront les coefficients B, C, D &c. dans l'un & l'autre de nos deux cas, & d'abord au premier ou $m = 0$ & $n = \frac{1}{\lambda}$, nous aurons

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	1	1	1	1	1	1	1
$B =$	0	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
$C =$	0	0	$+\frac{1}{3}\beta^2$	$+\frac{2}{5}\beta^2$	$+\frac{3}{7}\beta^2$	$+\frac{4}{9}\beta^2$	$+\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$-\frac{1}{15}\beta^3$	$-\frac{2}{21}\beta^3$	$-\frac{3}{27}\beta^3$	$-\frac{4}{33}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$+\frac{1}{105}\beta^4$	$+\frac{1}{63}\beta^4$	$+\frac{2}{99}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{945}\beta^5$	$-\frac{1}{495}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$+\frac{1}{10395}\beta^6$

XIX. Or pour l'autre cas où $m = 1$ & $n = -\frac{1}{\lambda} =$

$-\frac{1}{2\mu+1}$ ces coefficients auront les valeurs suivantes ;

	$\lambda=1$	$\lambda=3$	$\lambda=5$	$\lambda=7$	$\lambda=9$	$\lambda=11$	$\lambda=13$
$P =$	x	x	x	x	x	x	x
$B =$	0	β	β	β	β	β	β
$C =$	0	0	$\frac{1}{3}\beta^2$	$\frac{2}{5}\beta^2$	$\frac{3}{7}\beta^2$	$\frac{4}{9}\beta^2$	$\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5}\beta^3$	$\frac{2}{3\cdot7}\beta^3$	$\frac{3}{3\cdot9}\beta^3$	$\frac{4}{3\cdot11}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\beta^4$	$\frac{3}{3\cdot7\cdot9}\beta^4$	$\frac{6}{3\cdot9\cdot11}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\beta^5$	$\frac{3}{3\cdot5\cdot9\cdot11}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\beta^6$

qui sont les mêmes que les précédentes.

PROBLEME 5.

XX. La grosseur de la corde étant exprimée par cette formule $q q = \frac{f^6}{x^4}$, où x est l'intervalle IX (fig. 1.), & $q q$ la grosseur au point X : déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B , de sorte que $IA = a$, & $IB = b$, la tension étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde appartient au second cas du Probleme précédent, en posant $\mu = 0$, d'où l'on doit prendre

$\beta = \frac{f'}{\sqrt{2Tg}}$, & puisque $\int u dx = -\frac{\beta}{x}$, l'équation pour le mouvement sera

$$y = x\Gamma: \left(\frac{\beta}{x} - t\right) + x\Delta: \left(\frac{\beta}{x} + t\right) = XY$$

d'où l'on tire la vitesse du point Y dans le sens YX ,

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = x\Gamma': \left(\frac{\beta}{x} - t\right) - x\Delta': \left(\frac{\beta}{x} + t\right).$$

Pour représenter ces fonctions qu'on tire un autre axe ki (fig. 3.) sur lequel on prenne $kx = \frac{\beta}{x}$, $ka = \frac{\beta}{a}$, &

$kb = \frac{\beta}{b}$, de sorte qu'ici les points a & b répondent aux deux termes A & B où la corde est fixée. Qu'on décrive sur l'espace ab les deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma v$, de sorte que l'appliquée de celle-là $x\Delta$ représente la fonction $\Delta: \frac{\beta}{x}$, & l'appliquée de celle-ci $x\Gamma$ négativement

la fonction $\Gamma: \frac{\beta}{x}$, pour l'abscisse $kx = \frac{\beta}{x}$. Ces deux courbes sont arbitraires, pourvû qu'elles aient certaines propriétés exigées par la condition, que les deux points de la corde A & B demeurent immobiles. Pour connoître ces propriétés considérons l'état initial de la corde, où le tems $t = 0$, & alors aiant

$$XY = y = x(\Delta - x\Gamma), \text{ \& } \left(\frac{dy}{dt}\right) = x\left(\Delta': \frac{\beta}{x} + \Gamma': \frac{\beta}{x}\right)$$

on voit que transportant le point X en A ou B , ou bien x en a & b , il faut qu'il soit $am = an$ & $bv = bn$. Outre cela pour que les vitesses en A & B évanouissent aussi, il est nécessaire que les tangentes de ces deux courbes tant en m & μ , qu'en n & v soient parallèles entr'elles. En observant ces conditions la figure de ces deux courbes $m\Delta n$ & $n\Gamma v$ est arbitraire, & on les peut toujours

décrire en sorte, qu'il en résulte l'état initial, qui aura été imprimé à la corde au commencement. Ensuite pour connoître l'état de la corde après le tems écoulé $= t$, on n'a qu'à prendre du point x les intervalles xT & $xt = t$, pour avoir $kT = \frac{\beta}{x} + t$ & $kt = \frac{\beta}{x} - t$,

& partant les appliquées $TU = \Delta : (\frac{\beta}{x} + t)$ & $tu = -\Gamma : (\frac{\beta}{x} - t)$, d'où l'on aura l'écart du point X de

l'axe dans cet instant $XY = y = x(TU - tu) = IX(TU - tu)$ [figg. 1. & 3.]. Mais quand les points T & t tombent au delà des termes a & b , il faut continuer la courbe $n\Delta m$ au delà de a , & la courbe $\mu\Gamma\nu$ au delà de b , en sorte que prenant le point x ou en a , ou en b , il y ait toujours $TU = tu$, d'où l'on entend que la partie continuée mn' doit être semblable à la courbe $\mu\nu$, & la partie $\nu\mu'$ à la courbe nm . Donc prenant de part & d'autre les intervalles ab' , $b'a''$ &c. ba' , $a'b''$ &c. égaux à l'espace ab , les parties vers la droite nm , mn' , $n'm''$ &c. seront alternativement semblables à nm & $\mu\nu$; & de la même manière les parties vers la gauche $\mu\nu$, $\nu\mu'$, $\mu'\nu''$ &c. alternativement semblables à $\mu\nu$ & nm ; comme on le verra aisément par la figure.

Maintenant quelque grand que soit le tems écoulé t , on pourra assigner l'intervalle XY , auquel le point de la corde X sera alors éloigné de son état naturel, d'où l'on voit qu'après le tems $t = 2ab$, où les points T & t tombent en x' & x'' analogues à x , on aura $XY = x(x'\delta' = x''\gamma'') = x(x\Delta - x\Gamma)$ tout comme au commencement, de sorte que la corde est parvenue au même état, après avoir achevé dans ce tems deux vibrations, ou selon les circonstances peut être 4 ou 6, ou même plusieurs selon un nombre pair quelconque. Le tems

d'une vibration fera donc $t = ab = \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{b} = \frac{\beta(b-a)}{ab}$
 $= \frac{(b-a)f^2}{ab\sqrt{2Tg}}$, ou bien le nombre des vibrations rendues
 dans une seconde fera $= \frac{ab\sqrt{2Tg}}{(b-a)f^2}$, ou selon les circon-
 stances 2, 3, 4 &c. fois plus grand.

C O R O L L. 1.

XXI. Une telle corde fera donc des vibrations régulières, de quelque manière qu'elle aura été ébranlée au commencement, & partant les sons qu'elle rend, seront aussi justes que ceux d'une corde partout également épaisse.

C O R O L L. 2.

XXII. Puisque l'épaisseur de la corde en X est qq
 $= \frac{f^6}{x^2}$, la masse ou bien le poids de la portion AX fera
 $= \frac{1}{3} f^6 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} \right)$, & partant le poids de la corde entière
 $AB = \frac{1}{3} f^6 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$. Soit ce poids $= P$ pour
 avoir $f^3 = \frac{ab\sqrt{3Pab}}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$, & le nombre des vibrations rendues
 par seconde fera $= \sqrt{\frac{2Tg(aa+ab+bb)}{3Pab(b-a)}}$.

C O R O L L. 3.

XXIII. Posant le poids de la corde $AB = P$ pour
 avoir $\frac{1}{3} f^6 = \frac{P a^2 b^2}{b^2 - a^2}$, le poids de la partie AX , en nom-
 mant

mant $IX = x$, fera $= \frac{Pb}{b^2 - a^2} (1 - \frac{a^2}{x^2})$. Mais il est plus convenable, pour se former une juste idée de cette corde, de remarquer que la grosseur en X est réciproquement proportionnelle au carré-carré de l'intervalle $IX = x$.

S C O L I E.

XXIV. Pour connoître les circonstances, sous lesquelles cette même corde fera deux ou trois &c. fois plus de vibrations qu'à l'ordinaire, étant ébranlé d'une manière quelconque; on comprend de ce que j'ai dit des cordes de la même épaisseur, que cela arrive, lorsque la courbe nm est semblable à la courbe nn' , ou nm' &c., & en même tems la courbe μv semblable à $\mu\mu'$ ou $\mu v'$ &c., ou bien si l'on applique à chaque point x dans l'espace ab une appliquée $= x\Delta - x\Gamma$, il faut que cette nouvelle courbe ait deux ou plusieurs parties semblables entr'elles, & alternativement situées à l'égard de l'axe ab (fig. 4.). Ainsi pour le cas de deux fois plus d'oscillations, cette nouvelle courbe doit avoir la figure $aycy'b$, de sorte que la partie cya soit égale & semblable à la partie $cy'b$, ou bien en prenant les intervalles $cx = cx'$, qu'il soit $x'y' = xy$. Donc puisque $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, nous

aurons $kc = \frac{\beta(a+b)}{2ab}$; de là nous formerons ainsi la figure de la corde même au commencement. Aiant $IA = a$ & $IB = b$ (fig. 5.), le nœud tombera au point C , en sorte que $IC = \frac{2ab}{a+b}$, c'est-à-dire que IC sera la moyenne harmonique entre IA & IB ; & prenant IX

$= \frac{\beta}{kx}$, l'appliquée XY sera $IX \times xy$. Pour rendre cela plus clair, posons $kc = c$; & $cx = cx' = u$; & puisque $IC = \frac{\beta}{c}$, prenons $IX = \frac{\beta}{c+u}$ & $IX' = \frac{\beta}{c-u}$, de sorte que $CX = \frac{\beta u}{c(c+u)}$, & $CX' = \frac{\beta u}{c(c-u)}$, & partant $CX : CX' = IX : IX'$. Maintenant, parceque $XY = IX \times xy$, & $X'Y' = IX' \times xy$, il est évident que $CX : XY = CX' : X'Y'$, & que la droite YY' passe par le nœud C . D'où nous tirons la construction suivante de la courbure de la corde, qui ne dépend plus de la fig. 4.

Ayant partagé la corde AB en C , de manière que IC soit la moyenne harmonique entre IA & IB , qu'on décrive sur AC une courbe quelconque AYC , & pour chaque point X qu'on prenne le point X' , en sorte que les trois lignes IX , IC , IX' soient en proportion harmonique, alors la droite tirée de Y par le point C marquera sur l'appliquée $X'Y'$ le point Y' dans la courbe $CY'B$. Si l'on vouloit que la corde rendît trois fois plus de vibrations, il faudroit entre A & B établir deux nœuds C & D , de sorte que les distances IA , IC , ID , IB fissent une proportion harmonique, & aiant pris à volonté la figure d'une partie AYC on formeroit de la même manière la figure au delà du nœud C , & ensuite aussi au delà du nœud D . Cette même construction aura aussi lieu, lorsqu'on voudra établir un plus grand nombre de nœuds.

S C O L I E.

XXV. Voilà donc une espèce de cordes fort remarquable, puisqu'elle a cela de commun avec les cordes uniformément épaisses, que de quelque manière qu'on les ébran-

le, elles produisent toujours des vibrations régulières; or nous verrons bientôt que cette propriété ne sauroit avoir lieu dans aucune autre espèce. Le fondement de cette propriété est, qu'en quelque état que la corde soit mise au commencement, elle y doit nécessairement revenir après un certain tems; or dans les autres espèces de cordes ce rétablissement dans le premier état n'arrive peut-être jamais, & quand il arrive, ce n'est que sous de certaines circonstances, sans lesquelles le son ne sauroit être régulier ou formé par des vibrations isochrones. D'abord les espèces suivantes, que nous sommes en état de développer mettent cette différence dans tout son jour, & de là on pourra juger avec d'autant plus de raison, des autres espèces de cordes, qu'il ne nous est pas encore permis de soumettre au calcul.

PROBLEME 6.

XXVI. La grosseur de la corde étant exprimée par cette formule $qq \text{ ff} \left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, où x est l'intervalle IX (*fig. 1.*) & qq la grosseur au point X : déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B , de sorte que $IA = a$ & $IB = b$, la tension étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde appartient au premier cas du Probl. 4, en prenant $\mu = 1$, d'où l'on a $\beta = \frac{3 \text{ ff}}{\sqrt{2} T g} \cdot f^{-\frac{1}{3}}$, & $\int u dx = \beta x^{\frac{1}{3}}$ & ensuite $P = 1$, & $Q = -\beta x^{\frac{1}{3}}$; tous les mouvemens de cette corde seront donc exprimés par cette équation;

$$y = \Gamma: (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) + \Delta: (\beta x^{\frac{1}{2}} - t)$$

$$- \beta x^{\frac{1}{2}} \Gamma': (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) - \beta x^{\frac{1}{2}} \Delta': (\beta x^{\frac{1}{2}} - t)$$

où y exprime l'intervalle XY , dont le point X est éloigné de l'axe après le tems $= t$ secondes, d'où la vitesse de ce point Y dans le sens YX sera

$$- \left(\frac{dy}{dt} \right) = - \Gamma': (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) + \Delta': (\beta x^{\frac{1}{2}} - t)$$

$$+ \beta x^{\frac{1}{2}} \Gamma'': (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) - \beta x^{\frac{1}{2}} \Delta'': (\beta x^{\frac{1}{2}} - t).$$

Qu'on tire maintenant un nouvel axe ik (fig. 6.), sur lequel on prenne $ia = \beta a^{\frac{1}{2}}$, $ib = \beta b^{\frac{1}{2}}$ & $ix = \beta x^{\frac{1}{2}}$;

or posons $ix = \beta x^{\frac{1}{2}} = v$, & sur l'espace ab tirons les deux courbes $m\Gamma n$ & $\mu \Delta v$ pour représenter nos deux fonctions arbitraires, de manière qu'il soit $x\Gamma = \Gamma': v$ & $x\Delta = \Delta': v$, d'où nous aurons $\Gamma: v = a m x \Gamma$, & $\Delta: v = a \mu x \Delta$, en remarquant que puisque nous représentons ici la fonction Δ sous l'axe, il faut changer le signe des fonctions Δ , Δ' , Δ'' dans nos formules précédentes. Donc pour l'état initial de la corde où $t = 0$, nous aurons

$$y = a m x \Gamma - a \mu x \Delta - v . x \Delta,$$

$$- \left(\frac{dy}{dt} \right) = - x \Gamma - x \Delta + \frac{v dx \Gamma}{dv} + \frac{v dx \Delta}{dv}.$$

Or puisque aux points A & B , l'une & l'autre de ces deux valeurs doit évanouïr, nous aurons ces conditions à remplir;

$$1^\circ a m = a \mu; \quad 2^\circ a m + a \mu = i a \times \frac{d . a m + d . a \mu}{dv};$$

$$3^\circ a m b n - a \mu b v = i b (b n - b v); \quad 4^\circ b n + b v$$

$$= i b \times \frac{d . b n + d . b v}{dv}, \quad \& \text{ pourvû que ces quatre propriétés aient lieu dans les deux courbes } m n \text{ \& } \mu v, \text{ leur dé-}$$

scription est arbitraire, & on les peut toujours tracer en sorte qu'elles représentent un état initial quelconque donné de la corde.

Or maintenant il faut continuer la courbe $\nu\mu$ à gauche & la mn à droite; la première opération est déterminée par cette condition, que le point A ou a demeure immobile, & l'autre par l'immobilité du point b .

Pour la continuation de la courbe $\nu\mu$ prenons $ax' = ax = t$, & soit $x'\delta'$ l'appliquée cherchée au point x' ; donc puisque pour ce cas;

$$\Gamma: (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = amx\Gamma \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}} \Gamma': (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = ia.x\Gamma$$

$$\Delta: (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = -a\mu x\delta' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}} \Delta': (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = ia.x\delta'$$

il faut qu'il soit

$$0 = amx\Gamma + a\mu x'\delta' - ia.x\Gamma + ia.x'\delta'.$$

Pour la continuation de la courbe mn prenons $bx'' = bx = t$, & soit $x''\gamma''$ l'appliquée cherchée au point x'' on aura donc

$$\Gamma: (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = amx''\gamma'' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}} \Gamma': (\beta x^{\frac{1}{2}} + t) = ib.x''\gamma''$$

$$\Delta: (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = a\mu x\Delta \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{2}} \Delta': (\beta x^{\frac{1}{2}} - t) = ib.x\Delta$$

& partant il faut qu'il soit

$$0 = amx''\gamma'' - a\mu x\Delta - ib.x''\gamma'' + ib.x\Delta$$

Or $amx''\gamma'' = amb\dot{n} + bn x''\gamma'' = a\mu b\nu + ib.bn - ib.b\nu + bn x''\gamma''$, d'où notre équation se change en cette forme:

$$0 = bnx''\gamma'' + b\nu x\Delta + ib (bn - x''\gamma'') - ib (b\nu - x\Delta).$$

Aiant continué ainsi nos deux courbes, pour trouver l'espace $XY = y$ (fig. 1.) après un tems quelconque de t secondes, qu'on prenne $xT = tu = t$, & on aura

$$y = amTU - a\mu tu - \beta x^{\frac{1}{2}} (TU - tu);$$

c' est donc de cette formule qu'il faut déterminer l'état de la corde à un tems quelconque t depuis son état initial.

C O R O L L. 1.

XXVII. Par cette construction on voit qu'on ne sauroit assigner aucun tems, auquel la corde revienne nécessairement à son état initial, & partant les ébranlemens dont une telle corde est susceptible, ne sauroient être réduits à un mouvement régulier de vibrations isochrones, comme dans le cas précédent.

C O R O L L. 2.

XXVIII. Aussi la continuation des deux courbes mn & $\mu\nu$ demande une construction transcendente. Car posant $ax = ax' = t$, $x\Gamma = p$ & $x'\delta' = z$, la continuation de la courbe $\mu\nu$ doit être tirée de cette équation : $\int p dt + \int z dt - ia(p - z) = 0$, ou posant $ia = a$ de celle-ci $\alpha d\tilde{z} + \tilde{z} dt = \alpha dp - p dt$, qui donne

$$\alpha e^{\frac{t}{\alpha}} \tilde{z} = \int e^{\frac{t}{\alpha}} (\alpha dp - p dt) = \alpha e^{\frac{t}{\alpha}} p - \int e^{\frac{t}{\alpha}} p dt,$$

$$\text{ou } \tilde{z} = p - \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} \int e^{\frac{t}{\alpha}} p dt.$$

C O R O L L. 3.

XXIX. De la même manière pour la continuation de la courbe mn posant $bx'' = bx = t$, $x\Delta = q$, $x''\gamma'' = z$ & $ib = \beta$, on aura $2m'x''\gamma'' = ambn + \int z dt$, $a\mu x\Delta = a\mu bv - \int q dt$, donc $ambn - a\mu bv + \int z dt + \int q dt - \beta z + \beta q = 0$, ou $\beta d\tilde{z} - \tilde{z} dt = \beta dq + q dt$, &

$$\text{partant } \beta e^{-\frac{t}{\beta}} \zeta = \int e^{-\frac{t}{\beta}} (\beta dq + q dt), \text{ ou } \zeta = q + \frac{2}{\beta} e^{\frac{t}{\beta}} \int e^{-\frac{t}{\beta}} q dt.$$

S C O L I E.

XXX. Or il n'est pas absolument impossible qu'une telle corde produise des vibrations régulières ou isochrones; cela dépend de l'état initial, auquel la corde a été réduite, qui peut bien être tel, que les vibrations deviennent régulières. Pour trouver de tels cas, soit pour abréger

$\beta x^{\frac{1}{2}} = v$, & posons

$$\Gamma: (v + t) = C \sin. (nv + nt + \zeta), \text{ \&}$$

$$\Delta: (v - t) = C \sin. (nv + \zeta - nt)$$

d'où nous aurons

$$\Gamma': (v + t) = nC \cos. (nv + \zeta + nt), \text{ \&}$$

$$\Delta': (v - t) = nC \cos. (nv + \zeta - nt),$$

& partant

$$y = 2C \sin. (nv + \zeta) \cos. nt - 2nCv \cos. (nv + \zeta) \cos. nt.$$

Maintenant, cette quantité devant évanouïr, soit qu'on pose

$$x = a \text{ ou } x = b, \text{ soit pour abréger } \beta a^{\frac{1}{2}} = h \text{ \& } \beta b^{\frac{1}{2}} = k,$$

& il faudra remplir ces deux conditions;

$$1^{\circ} \sin. (nh + \zeta) - nh \cos. (nh + \zeta) = 0, \text{ \&}$$

$$2^{\circ} \sin. (nk + \zeta) - nk \cos. (nk + \zeta) = 0,$$

d'où nous tirons

$$\text{tang. } (nh + \zeta) = nh, \text{ \& } \text{tang. } (nk + \zeta) = nk,$$

Il s'agit donc de déterminer de ces deux égalités le nombre n avec l'angle ζ . Or éliminant l'angle ζ , nous aurons

$$\text{tang. } n(k - h) = \frac{n(k - h)}{1 + nnbk},$$

où il faut remarquer que $h = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$, & $k = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$. Tout revient donc à déduire de l'équation trouvée le nombre n , ce qui se peut toujours exécuter d'une infinité de manières, attendu que cette équation renferme une infinité de racines, dont aiant trouvé une quelconque pour n , on voit qu'après le tems $t = \frac{2\pi}{n}$, la corde revient au même état, & le tems d'une vibration est par conséquent $= \frac{\pi}{n}$, de sorte que le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \frac{n}{\pi}$. Or pour trou-

ver un tel nombre n on ne sauroit opérer qu'en tatonnant, en prenant successivement plusieurs valeurs pour en conclure enfin la véritable. Pour cet effet aiant pris pour n un nombre quelconque, qu'on cherche les angles ϕ & ψ , de sorte que $nh = \text{tang. } \phi$, & $nk = \text{tang. } \psi$, & alors il faut qu'il provienne $n(k - h) = \psi - \phi + i\pi$, où l'on peut prendre pour i ou zero ou un nombre entier quelconque, & quand cela arrivera on aura l'angle $\zeta = \phi - nh$ ou $\zeta = \psi + i\pi - nk$.

S C O L I E 2.

XXXI. Cette question devient plus aisée à résoudre, si l'on regarde les points A & B où l'on doit fixer la corde, comme inconnus, & le nombre n comme connu, car alors, posant $nh = p$, & $nk = q$, pour avoir $\text{tang. } (p + \zeta) = p$ & $\text{tang. } (q + \zeta) = q$, ou $\text{tang. } (q - p) = \frac{q - p}{1 + pq}$, soit q

- p

— $p = r \& 1 + pq = s$, & on aura $s = \frac{r}{\text{tang. } r}$. Qu'on prenne pour r un angle quelconque, & qu'on en cherche la valeur de s , de là on trouvera $q + p = \sqrt{(rr + 4s - 4)}$, & ensuite on aura $h = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} - r}{2n}$ & $k = \frac{\sqrt{(rr + 4s - 4)} + r}{2n}$, d'où l'on voit que s doit être

plus grand que 1, & partant l'angle r plus grand que 180° , afin qu'on obtienne $r > \text{tang. } r$. Maintenant pour connoître tous les mouvemens réguliers dont la même corde est susceptible, on n'a qu'à prendre l'angle r en sorte, qu'il en résulte le même rapport entre h & k ; soit pour cet effet $k = mh$, & on aura $(m + 1)r = (m - 1)\sqrt{(rr + 4s - 4)}$ ou $mrr = (m - 1)^2(s - 1)$, donc $s = 1 + \frac{mrr}{(m - 1)^2} = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire

$h = \frac{r}{n(m - 1)}$, & $k = \frac{mr}{r(m - 1)}$, & pour chaque nombre m on peut trouver une infinité de valeurs pour l'angle r .

E X E M P L E.

XXXII. Prenons $m = 2$, de sorte que $k = 2h$ & $b = 8a$, & l'équation à résoudre sera $1 + rr = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où

l'on tire $h = \frac{r}{n}$ & $k = \frac{2r}{n}$. Or il faut remarquer que pour réduire un angle exprimé en secondes à des parties du rayon, il faut ajouter 4, 6 8 5 5 7 4 9 au logarithme du nombre des *secondes*, mais puisque nous savons que $r > \pi$, & que posant $r = \pi + \phi$, l'angle ϕ doit être plus grand que 10° , nous aurons à très-peu près $\text{tang. } r = \text{tang. } \phi = \phi$

$$+ \frac{1}{3} \varphi^3, \text{ donc } \varphi (1 + 2 r r) = \frac{r}{1 + \frac{1}{3} \varphi^2} = r$$

$$(1 - \frac{1}{3} \varphi \varphi) \text{ ou bien}$$

$$6 \pi \pi \varphi + 13 \pi \varphi \varphi + 7 \varphi^3 = 3 \pi,$$

$$\text{d'où l'on tire à-peu près } \varphi = \frac{7 + 18 \pi \pi + 12 \pi^2}{\pi (21 + 52 \pi \pi + 24 \pi^2)}, \text{ ou } \varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} - \frac{13}{24 \pi^2} + \frac{37}{36 \pi} \text{ \&c. Pour les autres valeurs on}$$

n'a qu'à poser successivement $2\pi, 3\pi, 4\pi$ &c. au lieu de π . Or pour ces derniers cas on a aisés exactement $\varphi =$

$$\frac{1}{2i\pi}, \text{ donc } r = i\pi + \frac{1}{2i\pi}, \text{ \& de là le nombre } n = \frac{r}{b}$$

\& le nombre des vibrations rendues par seconde $= \frac{i}{b}$

$$+ \frac{1}{2i\pi\pi h}.$$

Faisons donc le calcul pour trouver les valeurs du nombre r .

	si $i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$\frac{1}{2i\pi} =$	0, 159153	0, 079576	0, 053051	0, 039788
$\frac{13}{24 i^2 \pi^2} =$	0, 017469	0, 002185	0, 000647	0, 000273
$\frac{37}{36 i^3 \pi^3} =$	0, 003359	0, 000105	0, 000014	0, 000003
$\varphi =$	0, 145043	0, 077496	0, 052418	0, 039518
$\pi =$	3, 141593	6, 283185	9, 424778	12, 566371
$r =$	3, 286636	6, 360681	9, 477196	12, 605889
$\zeta =$	65° 4'	76° 38'	80° 59'	83° 12'

d'où l'on voit que cette même corde peut rendre plusieurs sons réguliers qui sont entr'eux, comme ces valeurs

de r , dont les plus bas s'écarterent sensiblement de la suite des nombres naturels, mais les aigus s'y conforment de plus en plus. Aiant ainsi trouvé r , puisque $nh = p = r$, on aura aussi l'angle $\zeta = A: \text{tang. } r - r = A: \text{tang. } 2r - 2r$ dont j'ai aussi marqué les valeurs ci-dessus.

C O N C L U S I O N .

XXX. De la même manière on déterminera les ébranlemens des autres espèces de cordes, que nous sommes en état de soumettre au calcul, & eu général on verra, que tous ces ébranlemens ne sont pas réductibles à des vibrations régulières. Mais on peut toujours assigner des conditions, sous lesquelles ces cordes peuvent recevoir un mouvement régulier, & cela même d'une infinité de manière différentes. Or il est bon de remarquer ici, que tous les sons, dont une même corde de ces espèces est susceptible, sont incommensurables entr'eux; pendant que ceux des deux premières espèces suivent entr'eux la progression des nombres naturels. C'est donc à cause de cette incommensurabilité que les sons des autres espèces sont si irréguliers & contraires à l'harmonie, puisqu'on les peut regarder comme un mélange de plusieurs sons simples, que la même corde pourroit rendre sous de certaines conditions.



RECHERCHES

Sur l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx} z$$

PAR M. EULER.

I. CETTE équation est d'un genre tout-à-fait différent de celui, auquel le calcul intégral a été appliqué jusqu'ici, puisqu'elle renferme trois variables t , x , & z , & qu'il s'agit de déterminer la quantité z par les deux autres t & x , c'est-à-dire qu'on demande quelle fonction de t & x doit être prise pour z , afin que la condition prescrite soit remplie. Mais on cherche principalement une solution complète qui nous découvre à la fois toutes les fonctions possibles, qui étant substituées à la place de z , satisfassent à l'équation proposée; comme cette équation contient des différentiels du second degré, son intégrale complète doit nécessairement renfermer deux fonctions absolument indéfinies & arbitraires, comme je l'ai prouvé autresfois.

II. Ce n'est pas une pure spéculation, qui a fourni cette équation, mais elle renferme la solution de plusieurs questions physico-mathématiques de la dernière importance. Le cas, où les quantités b & c sont zero, n'est que trop connu par les recherches sur les vibrations des cordes, dont le mouvement en général est toujours déterminé par cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, pourvu que la corde ait par tout la même grosseur, & que les excursions soient quasi infiniment petites. Ensuite la question sur la propaga-

tion du son m'ayant conduit à cette équation $(\frac{ddz}{dt^2}) =$

$aa (\frac{ddz}{dx^2}) + \frac{4a^2}{x} (\frac{dz}{dx})$ il est assés clair, que l'équation proposée étant plus générale est de la dernière importance.

III. Comme cette équation appartient à un genre de calcul tout particulier, dont les premiers élémens ne sont pas encore assés bien développés, je me propose d'établir ici quelques méthodes, qui peuvent être d'un grand usage dans ce nouveau calcul. Car quoique j'aie donné les intégrales complétés des deux cas mentionnés, c'est plutôt par une heureuse induction, que j'y ai été conduit, que par une méthode certaine, & lorsque M^{rs} Bernoulli & D'Alembert ont traité le probleme des cordes vibrantes, ils se sont contentés des solution particulières, sans se foucher trop de toute l'étendue, que la question renferme par sa nature. Or avant que d'entreprendre l'intégration de l'équation générale mise dans le titre, il sera bon de traiter plus en détail l'équation $(\frac{ddz}{dt^2}) = aa (\frac{ddz}{dx^2})$, & d'exposer quelques méthodes, qui nous conduisent à son intégrale complète.

De l'équation $(\frac{ddz}{dt^2}) = aa (\frac{ddz}{dx^2})$.

IV. Si l'on veut se contenter de solutions particulières, il seroit fort facile d'en trouver une multitude infinie, toutes les valeurs suivantes satisfont également à cette équation ;

$z = A(x \pm at)^n$, $z = Ae^n(x \pm at)$, $z = A \sin. n(x \pm at)$, & l'on peut encore joindre ensemble autant qu'on voudra de telles valeurs, de sorte que par ce moyen on pourroit donner une solution qui renfermât une infinité de quantité

de quantités constantes, & absolument arbitraires. Cependant une telle solution ne seroit pas encore complète, & ne comprendroit point toutes les solutions possibles. Mais quand j'ai trouvé $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, où $\Gamma : (x + at)$ marque une fonction quelconque de $x + at$, & $\Delta : (x - at)$ de $x - at$, on voit bien que cette forme est infiniment plus générale, aussi est-elle l'intégrale complète de notre équation.

V. Il est aisé de s'assurer, que cette formule convient à l'équation proposée; car en marquant le différentiel de $\Gamma : u$ par $du \Gamma' : u$, & celui de $\Gamma' : u$ par $du \Gamma'' : u$, on en tire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + at) + \Delta' : (x - at) \text{ \&}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a \Gamma' : (x + at) - a \Delta' : (x - at)$$

& par la différentiation réitérée

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + at) + \Delta'' : (x - at) \text{ \&}$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a^2 \Gamma'' : (x + at) + a^2 \Delta'' : (x - at)$$

d'où l'on a évidemment $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Mais il s'agit ici d'une méthode, qui partant de l'équation différentio-différentielle nous conduit immédiatement à la formule $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, & par laquelle nous puissions être assurés, que cette formule est en effet l'intégrale complète de l'équation différentio-différentielle. Je m'en vais proposer deux méthodes qui conduisent à ce but.

VI. *Première méthode.* Je transforme l'équation par cette substitution $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, d'où je tire:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + a \left(\frac{ddz}{dt dx}\right) \text{ \& } \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt dx}\right) +$$

$a \left(\frac{dz}{dx} \right)$, & partant $\left(\frac{du}{dt} \right) - a \left(\frac{du}{dx} \right) = \left(\frac{dz}{dt} \right) - a a$
 $\left(\frac{dz}{dx} \right) = 0$. Nous voilà donc parvenus à une équation
différentielle du premier degré $\left(\frac{du}{dt} \right) = a \left(\frac{du}{dx} \right)$, dont il
s'agit de trouver la fonction u . Or, puisque $du = dt$
 $\left(\frac{du}{dt} \right) + dx \left(\frac{du}{dx} \right)$, nous aurons $du = \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot (a dt + dx)$;
laquelle formule devant être intégrable, il faut que $\left(\frac{du}{dx} \right)$
soit une fonction de la quantité $x + at$. Posons donc
 $\left(\frac{du}{dx} \right) = \Gamma'' : (x + at)$, & l'équation $du = (dx + a dt)$,
 $\Gamma'' : (x + at)$ donne $u = \Gamma' : (x + at)$. Maintenant nous
avons à résoudre cette équation $\left(\frac{dz}{dt} \right) + a \left(\frac{dz}{dx} \right) = \Gamma' :$
 $(x + at)$ dont je cherche l'intégrale de la manière
suivante.

VII. Posant $d\zeta = p dx + q dt$, pour avoir $p = \left(\frac{dz}{dx} \right)$ &
 $q = \left(\frac{dz}{dt} \right)$, à cause de $q = -ap + \Gamma' : (x + at)$,
nous aurons :

$$d\zeta = p(dx - a dt) + dt \Gamma' : (x + at)$$

Posons $p = r + a \Gamma' : (x + at)$, pour avoir :

$$d\zeta = r(dx - a dt) + [a dx + (1 - aa) dt] \Gamma' : (x + at)$$

& soit $\frac{1 - aa}{a} = a$ ou $a = \frac{1}{2a}$, donc

$$d\zeta = r(dx - a dt) + \frac{1}{2a} (dx + a dt) \Gamma' : (x + at),$$

& puisque le dernier nombre est intégrable, l'intégrale
étant $\frac{1}{2a} \Gamma : (x + at)$ ou bien simplement $\Gamma : (x + at)$

pour rendre le premier membre également intégrable, il faut qu'il soit $r = \Delta' : (x - at)$, d'où nous tirons

$$z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$$

& il est évident en même tems, que cette forme est l'intégrale complète de l'équation proposée.

VIII. *Autre méthode.* Changeons les variables t & x , dont z doit être une fonction, & posons $x + at = p$, & $x - at = q$, de sorte qu'il faille à présent trouver, quelle fonction de p & q doit être z . Il s'agit donc d'éliminer t & x , & de trouver une équation différentielle entre p , q , & z , ce qui se fera de la manière

$$\text{suivante. Puisque } dz = dt \left(\frac{dz}{dt} \right) + dx \left(\frac{dz}{dx} \right) \text{ \& } dz =$$

$$dp \left(\frac{dz}{dp} \right) + dq \left(\frac{dz}{dq} \right), \text{ à cause de } dp = dx + a dt,$$

$$\text{\& } dq = dx - a dt, \text{ nous aurons}$$

$$dt \left(\frac{dz}{dt} \right) + dx \left(\frac{dz}{dx} \right) =$$

$$(dx + a dt) \left(\frac{dz}{dp} \right) + (dx - a dt) \left(\frac{dz}{dq} \right).$$

Maintenant parceque t & x ne dépendent point l'une de l'autre, les membres affectés de dx & dt doivent être égaux séparément, ce qui donne

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \left(\frac{dz}{dp} \right) + \left(\frac{dz}{dq} \right) \text{ \& } \left(\frac{dz}{dt} \right) = a \left(\frac{dz}{dp} \right) - a \left(\frac{dz}{dq} \right)$$

& de là nous tirons

$$\left(\frac{ddz}{dpdx} \right) = \left(\frac{ddz}{dp^2} \right) + \left(\frac{ddz}{dpdq} \right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dpdt} \right) = a \left(\frac{ddz}{dp^2} \right) - a \left(\frac{ddz}{dpdq} \right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dqdx} \right) = \left(\frac{ddz}{dpdq} \right) + \left(\frac{ddz}{dq^2} \right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dqdt} \right) = a \left(\frac{ddz}{dpdq} \right) - a \left(\frac{ddz}{dq^2} \right)$$

IX. Pour achever la substitution, aiant

$$\left(\frac{ddz}{dx} \right) = \left(\frac{ddz}{dpdx} \right) + \left(\frac{ddz}{dqdx} \right) \text{ \& } \left(\frac{ddz}{dt} \right) = a \left(\frac{ddz}{dpdt} \right) - a \left(\frac{ddz}{dqdt} \right)$$

on n'a qu'à substituer ici les valeurs, que nous venons de trouver, & nous obtiendrons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \&$$

$$\left(\frac{ddz}{d^2t}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - 2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + aa\left(\frac{ddz}{dq^2}\right).$$

Donc notre équation $\left(\frac{ddz}{d^2t}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ se change en celle-ci :

$$2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = -2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right), \text{ ou bien } \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$$

qui est beaucoup plus simple que la proposée, ne contenant qu'un seul membre, qu'il faut évaluer à zéro, d'où l'on comprend de quelle importance peuvent souvent être de telles transformations, dans ce nouveau genre du calcul intégral.

X. Tout se réduit donc à trouver, quelle fonction des deux variables p & q doit être la quantité z , afin que l'on ait $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$. Or cette équation est fort aisée à résoudre; qu'on pose, pour mettre l'opération dans tout son jour, $\left(\frac{dz}{dq}\right) = u$, & puisque $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = \left(\frac{du}{dp}\right)$, il faut qu'il soit $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, d'où il est clair que la quantité u ne fauroit renfermer la variable p , & partant elle sera fonction de la seule variable q , & une fonction quelconque de q mise pour u satisfera à la condition $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$. Posons donc $u = \Delta : q$, ce qui est l'intégrale complète de l'équation $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, & maintenant nous aurons

$\left(\frac{dz}{dq}\right) = \Delta' : q$. Considérons ici l'autre quantité p constante, pour avoir $d\zeta = dq \Delta' : q$, & partant son intégrale $\zeta = \Delta : q + \text{const.}$; mais cette constante renferme

une fonction quelconque de p , au lieu de laquelle écrivant $\Gamma : p$ nous trouvons comme ci-dessus $z = \Gamma : p + \Delta : g$ ou bien $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$.

XI. Pour mettre devant les yeux toute l'étendue de cette solution, on peut décrire à volonté deux courbes quelconques EMS & FNT (fig. * plan. 1.) rapportées à leur axes & BD , & alors pour avoir la valeur de z , qui répond à des valeurs quelconques des deux variables x & t , qu'on prenne dans la première courbe l'abscisse $AP = x + at$, & dans l'autre l'abscisse $BQ = x - at$, & la somme des deux appliquées $PM + QN$ ou bien aussi leur différence représentera en général la nature de la fonction cherchée z qui convient à l'équation $(\frac{ddz}{dt^2}) = aa$

$(\frac{ddz}{dx^2})$. Cette construction est si générale, que des traits tirés librement sur le papier sans aucune loi peuvent être employés pour les deux lignes EMS & FNT .

XII. C'est aussi en quoi consiste le caractère essentiel de ce genre de calcul intégral, & qui le distingue des intégrations ordinaires, où aucune ligne courbe destituée de la loi de continuité, ne sauroit jamais avoir lieu. Mais ici les lignes EMS & FNT peuvent être tirées d'une manière quelconque, sans qu'elles soient comprises dans quelque équation que ce soit; on les peut terminer brusquement où l'on veut, & les composer d'arcs de courbes tout-à-fait différentes. De quelque manière qu'on ait commencé à tirer ces lignes, on est toujours le maître de les continuer de part & d'autre comme on veut, sans qu'on soit astreint à aucune loi; toutes ces irrégularités n'empêchent pas que la construction donnée ne satisfasse aussi bien à l'équation proposée, que si ces deux lignes courbes étoient tout-à-fait régulières.

De l'équation $\frac{1}{aa} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{dz}{dx^2} \right) + \frac{\alpha}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right) + \frac{\beta}{xx} z$.

XIII. D'abord je remarque qu'on peut transformer cette équation en d'autres semblables, en supposant $z = x^\lambda u$, d'où l'on a

$$\left(\frac{dz}{dt} \right) = x^\lambda \left(\frac{du}{dt} \right), \left(\frac{dz}{dx} \right) = \lambda x^{\lambda-1} u + x^\lambda \left(\frac{du}{dx} \right), \text{ \& de là}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2} \right) = x^\lambda \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right), \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}u + 2\lambda x^{\lambda-1} \left(\frac{du}{dx} \right) + x^\lambda \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right); \text{ \& partant cette substitution, en divisant par } x^\lambda, \text{ nous fournit l'équation :}$$

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + \frac{\alpha}{x} \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{\beta + \alpha\lambda + \lambda(\lambda-1)}{xx} u.$$

Donc si nous prenons $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha$, de sorte que $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha} u$, l'équation proposée se transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + \frac{4\beta - \alpha^2 + 2\alpha}{4xx} u$$

qui aiant un terme de moins, doit être regardée comme plus simple.

XIV. Par la même substitution on peut faire évanouir le dernier terme, en posant $\beta + \alpha\lambda + \lambda\lambda - \lambda = 0$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{1-\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{4} - \beta \right)} \text{ \& } \alpha + 2\lambda = 1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}$$

donc la substitution $z = x^\lambda u$ nous conduit à cette équation:

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + \frac{1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}}{x} \left(\frac{du}{dx} \right).$$

Donc sans restreindre la forme proposée nous pouvons d'abord supposer $\beta = 0$, de sorte que nous aions à résoudre cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) + \frac{a}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right),$$

où il est remarquable que posant $z = x^2 - a$, elle se transforme dans celle-ci, qui lui est semblable.

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dx^2} \right) + \frac{2-a}{x} \left(\frac{du}{dx} \right),$$

& partant si la résolution de l'équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) + \frac{a}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right),$$

réussit dans le cas de $a = n$, elle réussira aussi dans le cas de $a = 2 - n$.

XV. Mais puisque la destruction du dernier terme pourroit conduire à des valeurs imaginaires, qu'il faudroit donner à l'exposant λ , il vaudra mieux chasser l'avant dernier terme, ce qui se peut toujours faire sans tomber dans cet inconvénient, & partant nos recherches rouleront sur la résolution de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) + \frac{\beta}{xx} z,$$

sur laquelle je remarque, qu'on la peut réduire à une forme où le dernier terme manque d'une double manière,

en posant $z = x^{\frac{1 \pm \sqrt{1-4\beta}}{2}} u$, d'où l'on parvient à cette forme;

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dx^2} \right) + \frac{1 + \sqrt{1-4\beta}}{x} \left(\frac{du}{dx} \right).$$

Or si β est un nombre positif plus grand que $\frac{1}{4}$, cette forme devient imaginaire.

XVI. Or par rapport à cette équation,

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) + \frac{\beta}{xx} z$$

je dois avertir d'avance, que je ne la saurois résoudre en général, quelque nombre qu'on prenne pour β , il n'y a

que certaines valeurs de cette lettre, où l'intégration réussisse, en quoi la résolution est semblable à la fameuse équation de Riccati, qui n'est résoluble qu'en certains cas. Mais aussi dans ces cas je dois avouer, que je ne pas suis assés content de la méthode, qui m'a conduit à l'intégration de ces cas, puisqu'elle m'a été fournie par la considération d'une solution particulière, comme on peut le voir dans mes Recherches sur la propagation du son. Cependant j'expliquerai cette méthode, toute imparfaite qu'elle puisse paroître encore, peut être qu'elle donnera à d'autres occasion de mieux approfondir les mystères, que ce nouveau genre de calcul intégral renferme.

XVII. Après plusieurs essais j'ai trouvé que l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) + \frac{\beta}{xx} z$ peut être représentée par une telle suite indéfinie :

$$z = Ax^n \Gamma : (x \pm at) + Bx^{n+1} \Gamma' : (x \pm at) \\ + Cx^{n+2} \Gamma'' : (x \pm at) + Dx^{n+3} \Gamma''' : (x \pm at) + \&c.$$

d'où nous tirons d'abord

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = Ax^n \Gamma'' : (x \pm at) + Bx^{n+1} \Gamma''' : (x \pm at) \\ + Cx^{n+2} \Gamma^{IV} : (x \pm at) + Dx^{n+3} \Gamma^V : (x \pm at) + \&c.$$

pour la première partie de l'équation; or pour l'autre nous trouvons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2} \right) = n(n-1)Ax^{n-2} \Gamma : (x \pm at) + 2nAx^{n-1} \Gamma' : (x \pm at) + Ax^n \Gamma'' : (x \pm at) \\ + (n+1)nB \quad + 2(n+1)B \\ + (n+2)(n+1)C$$

$$\frac{\beta}{xx} z = \beta A \quad + \beta B \quad + \beta C$$

qui devant être égalée à celle-là, nous en tirons les déterminations suivantes

$$n(n-1) + \beta = 0, \text{ ou } \beta = -n(n-1)$$

$$2nA + 2nB = 0, \text{ ou } B = -A$$

$2(n+1)B + 2(2n+1)C = 0$, ou $(n+1)B + 2(n+\frac{1}{2})C = 0$
 $2(n+2)C + 2(3n+3)D = 0$, ou $(n+2)C + 3(n+\frac{1}{2})D = 0$
 $2(n+3)D + 2(4n+6)E = 0$, ou $(n+3)D + 4(n+\frac{1}{2})E = 0$
 $2(n+4)E + 2(5n+10)F = 0$, ou $(n+4)E + 5(n+\frac{1}{2})F = 0$.

XVIII. Voici donc les déterminations de tous nos coefficients, en supposant $\beta = -n(n-1)$.

$$B = -A$$

$$C = -\frac{(n+1)B}{2(n+\frac{1}{2})} = +\frac{(n+1)}{2(n+\frac{1}{2})} A$$

$$D = -\frac{(n+2)C}{3(n+1)} = -\frac{(n+2)}{2 \cdot 3(n+\frac{1}{2})} A$$

$$E = -\frac{(n+3)D}{4(n+\frac{1}{2})} = +\frac{(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})} A$$

$$F = -\frac{(n+4)E}{5(n+2)} = -\frac{(n+3)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})} A$$

$$G = -\frac{(n+5)F}{6(n+\frac{1}{2})} = +\frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})} A$$

$$H = -\frac{(n+6)G}{7(n+3)} = -\frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})} A$$

&c.

&c.

XIX. De là nous voyons que toutes les fois que n est un nombre entier négatif, la série supposée devient finie, & partant c'est dans ces cas, que nous pouvons assigner l'intégrale de notre équation. Posons donc $n = -i$, marquant par i un nombre entier quelconque, & l'équation, dont nous sommes en état de trouver l'intégrale, sera

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{di^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{i(i+1)}{xx} z$$

de laquelle il est bon de remarquer, que posant $z = x^i + u$, elle se change dans cette forme:

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dx^2} \right) + \frac{2(i+1)}{x} \left(\frac{du}{dx} \right)$$

Or posant $z = x^{-i}u$ elle se transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dx^2} \right) - \frac{2i}{x} \left(\frac{du}{dx} \right)$$

d'où nous voyons que cette forme

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) + \frac{\alpha}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right)$$

est intégrable toutes les fois, que α est un nombre pair, soit positif, soit négatif.

1^r CAS $n = -1$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{2}{xx} z$$

XX. Puisque $n = -1$, nous aurons $B = -A$, & les coefficients suivans s'évanouïront tous, donc l'intégrale de cette équation sera, en prenant $A = 1$, & partant $B = -1$,

$$z = \frac{1}{x} \Gamma : (x \pm at) - \Gamma' : (x \pm at)$$

& tenant compte du signe ambigu de la quantité a , l'intégrale complète sera exprimée ainsi

$$z = \frac{1}{x} \Gamma : (x - at) - \Gamma' : (x - at)$$

$$+ \frac{1}{x} \Delta : (x + at) - \Delta' : (x + at)$$

& de la même manière on pourra aisément trouver les intégrales complètes pour tous les autres cas intégrables. Aiant trouvé les coefficients de la forme supposée, on n'a

qu'à résoudre chaque terme en deux, en employant pour l'un la forme $x + at$, & pour l'autre la forme $x - at$.

$$2^{\text{d}} \text{ CAS } n = -2$$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{6}{xx} z.$$

XXI. Aiant toujours $B = -A$ à cause de $n = -2$, nous aurons $C = \frac{1}{3} A$; prenant $A = 3$, & partant $B = -3$, & $C = 1$, l'intégrale complète de notre équation sera

$$z = \frac{3}{x^3} \Gamma : (x + at) - \frac{3}{x} \Gamma' : (x + at) + \Gamma'' : (x + at) \\ + \frac{3}{x^3} \Delta : (x - at) - \frac{3}{x} \Delta' : (x - at) + \Delta'' : (x - at)$$

où Γ & Δ signifient des fonctions quelconques, exprimées par des appliquées de lignes courbes quelconques, tant régulières qu'irrégulières, & puisque ces deux fonctions sont absolument indépendantes l'une de l'autre, c'est en quoi consiste le caractère de la solution complète.

$$3^{\text{e}} \text{ CAS } n = -3$$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{12}{xx} z.$$

XXII. Ici le quatrième coefficient D entre aussi dans l'intégral avec les trois précédens, dont voici les valeurs

$$B = -A, C = -\frac{2}{5} B = \frac{2}{5} A, D = -\frac{1}{6} C = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6} A.$$

Posons

Pofons donc pour éviter les fractions

$A = 3 \cdot 5$, $B = -3 \cdot 5$, $C = 2 \cdot 3$, $D = -1$
& l'intégrale complète fera

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Gamma' : (x + at) \\ &+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Gamma'' : (x + at) - \Gamma''' : (x + at) \\ &+ \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Delta' : (x - at) \\ &+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Delta'' : (x - at) - \Delta''' : (x - at) \end{aligned}$$

4^e CAS $n = -4$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{20}{xx} \zeta$$

XXIII. Ici les coefficients sont déterminés ainsi ;

$$B = -A; C = -\frac{3}{7} B = \frac{3}{7} A,$$

$$D = -\frac{2}{9} C = -\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 9} A, E = -\frac{1}{10} D = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 9 \cdot 10} A$$

de sorte qu'en entiers nous aurons

$A = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $B = -3 \cdot 5 \cdot 7$, $C = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $D = -2 \cdot 5$, $E = 1$

& l'intégrale complète fera

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^2} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^2} \Gamma' : (x + at) \\ &+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Gamma'' : (x + at) - \frac{2 \cdot 5}{x} \Gamma''' : (x + at) + \Gamma^{IV} : (x + at) \\ &+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^2} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^2} \Delta' : (x - at) \\ &+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Delta'' : (x - at) - \frac{2 \cdot 5}{x} \Delta''' : (x - at) + \Delta^{IV} : (x - at) \end{aligned}$$

5^e CAS $n = -5$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{a.a} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{30}{xx} \zeta.$$

XXIV. Les coefficients sont déterminés de la manière suivante

$$B = -A, C = -\frac{4}{9} B, D = -\frac{3}{12} C;$$

$$E = -\frac{2}{14} D, F = -\frac{1}{15} E$$

& prenant $A = 3.5.7.9$, nous aurons

$$A = 3.5.7.9, B = -3.5.7.9, C = 4.3.5.7,$$

$$D = -3.5.7, E = 3.5, F = -1$$

& après avoir trouvé ces coefficients, on n'a qu'à observer que l'intégrale complète sera

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{A}{x^2} \Gamma : (x + at) + \frac{B}{x^2} \Gamma' : (x + at) \\ & + \frac{C}{x^2} \Gamma'' : (x + at) + \frac{D}{x^2} \Gamma''' : (x + at) + \&c. \\ & + \frac{A}{x^2} \Delta : (x - at) + \frac{B}{x^2} \Delta' : (x - at) \\ & + \frac{C}{x^2} \Delta'' : (x - at) + \frac{D}{x^2} \Delta''' : (x - at) + \&c. \end{aligned}$$

6^e CAS $n = -6$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{a.a} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{42}{xx} \zeta.$$

XXV. Pour les valeurs des coefficients on aura

$$B = -A, C = -\frac{5}{11} B, D = -\frac{4}{15} C,$$

$$E = -\frac{3}{18} D, F = -\frac{2}{20} E, G = -\frac{1}{21} F$$

& prenant $A = 3.5.7.9.11$ les autres feront

$$B = -3.6.7.9.11, \quad C = +5.3.5.7.9, \quad D = -4.5.7.9,$$

$$E = +2.3.5.7, \quad F = -3.7, \quad G = 1$$

d'où l'intégrale complète devient

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{A}{x^6} \Gamma : (x + at) + \frac{B}{x^5} \Gamma' : (x + at) \\ &+ \frac{C}{x^4} \Gamma'' : (x - at) + \frac{D}{x^3} \Gamma''' : (x + at) + \&c. \\ &+ \frac{A}{x^6} \Delta : (x + at) + \frac{B}{x^5} \Delta' : (x - at) \\ &+ \frac{C}{x^4} \Delta'' : (x - at) + \frac{D}{x^3} \Delta''' : (x - at) + \&c. \end{aligned}$$

XXVI. En général pour cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{i(i+1)}{xx} \tilde{z}$$

l'intégrale complète fera

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{A}{x^i} \Gamma : (x - at) + \frac{B}{x^{i-1}} \Gamma' : (x + at) \\ &+ \frac{C}{x^{i-2}} \Gamma'' : (x + at) + \frac{D}{x^{i-3}} \Gamma''' : (x + at) + \&c. \\ &+ \frac{A}{x^i} \Delta : (x - at) + \frac{B}{x^{i-1}} \Delta' : (x - at) \\ &+ \frac{C}{x^{i-2}} \Delta'' : (x - at) + \frac{D}{x^{i-3}} \Delta''' : (x - at) + \&c. \end{aligned}$$

où les coefficients doivent être déterminés de la manière suivante

$$B = -A$$

$$C = -\frac{(i-1)B}{2i-1} = +\frac{(i-1)A}{2i-1}$$

$$D = -\frac{(i-2)C}{3i-3} = -\frac{(2i-4)A}{2.3(2i-1)}$$

$$E = -\frac{(i-3)D}{4i-6} = +\frac{(2i-4)(2i-6)A}{2.3.4(2i-1)(2i-3)}$$

k ij

$$F = -\frac{(i-4)E}{5i-10} = -\frac{(2i-6)(2i-8)A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(2i-1)(2i-3)}$$

$$G = -\frac{(i-5)F}{6i-15} = +\frac{(2i-6)(2i-8)(2i-10)A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(2i-1)(2i-3)(2i-5)}$$

&c. &c.

XXVII. Pour comprendre mieux la loi de ces coefficients j'observe, qu'on trouve les mêmes coefficients, en intégrant cette équation différentio-différentielle :

$$\frac{xxddy}{dx^2} + \frac{2xxdy}{dx} - i(i+1)y = 0$$

si l'on suppose l'intégrale exprimée par cette série

$$y = \frac{A}{x^i} + \frac{B}{x^{i-1}} + \frac{C}{x^{i-2}} + \frac{D}{x^{i-3}} + \&c.$$

Or si i est un nombre entier, cette même équation nous fournit les coefficients en ordre retrograde, car si nous supposons

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \frac{F}{x^5} + \&c.$$

nous trouvons

$$B = -\frac{i(i+1)}{2} A$$

$$C = -\frac{(i-1)(i+2)}{4} B = +\frac{i(ii-1)(i+2)}{2 \cdot 4} A$$

$$D = -\frac{(i-2)(i+3)}{6} C = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1 \cdot 4 \cdot 6} A$$

$$E = -\frac{(i-3)(i+4)}{8} D = +\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(i+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} A$$

$$F = -\frac{(i-4)(i+5)}{10} E = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(ii-16)(i+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} A$$

&c. &c.

XXVIII. Donc si nous marquons les fonctions en ascendant par intégration, de cette manière :

$${}^1\Gamma : s = f ds \Gamma : s, {}^2\Gamma : s = f ds {}^1\Gamma : s, {}^3\Gamma : s = f ds {}^2\Gamma : s \quad \&c.$$

l'intégrale de notre équation $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) -$

$\frac{i(i+1)}{xx} z$ sera:

$$\begin{aligned} z = & A \Gamma : (x + at) + \frac{B}{x} \Gamma : (x + at) \\ & + \frac{C}{xx} \Gamma : (x + at) + \frac{D}{x^3} \Gamma : (x + at) + \&c. \\ & + A \Delta : (x - at) + \frac{B}{x} \Delta : (x - at) \\ & + \frac{C}{xx} \Delta : (x - at) + \frac{D}{x^3} \Delta : (x - at) + \&c. \end{aligned}$$

& pour les diverses valeurs de i ces coefficients seront

i	A	B	+ C	- D	+ E	- F
1	1	1.2				
		2				
2	1	2.3	2.3.4			
		2	2.4			
3	1	3.4	3.8.5	3.8.5.6		
		2	2.4	2.4.6		
4	1	4.5	4.15.6	4.15.12.7	4.15.12.7.8	
		2	2.4	2.4.6	2.4.6.8	
5	1	5.6	5.24.7	5.24.21.8	5.24.21.16.9	5.24.21.16.9.10
		2	2.4	2.4.6	2.4.6.8	2.4.6.8.10
6	1	6.7	6.35.8	6.35.32.9	6.35.32.27.10	6.35.32.27.20.11
		2	2.4	2.4.6	2.4.6.8	2.4.6.8.10
7	1	7.8	7.48.9	7.48.45.10	7.48.45.40.11	7.48.45.40.33.12
		2	2.4	2.4.6	2.4.6.8	2.4.6.8.10

&c.

&c.

XXIX. J'observe encore, que l'intégrale de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{n(n+1)}{xx} z$$

se peut exprimer d'une double manière, l'une finie, & l'autre infinie, puisque on peut mettre tant $i = n$ que $i = -n - 1$. Pour rendre l'une & l'autre plus évidente, posons $x + at = p$, & $x - at = q$, & que P marque une fonction quelconque de p , & Q de q ; cela posé la première forme sera

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & \frac{A}{x^n} (P + Q) + \frac{B}{x^{n-1}} \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq} \right) \\ & + \frac{C}{x^{n-2}} \left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2} \right) + \&c. \end{aligned}$$

les coefficients étant déterminés ainsi :

$$B = -A, C = -\frac{2(n-1)}{2(2n-1)} B, D = -\frac{2(n-2)}{3(2n-2)} C,$$

$$E = -\frac{2(n-3)}{4(2n-3)} D, F = -\frac{2(n-4)}{5(2n-4)} E \ \&c.$$

Or l'autre forme est

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & Ax^{n+1} (P + Q) + Bx^{n+2} \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq} \right) \\ & + Cx^{n+3} \left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2} \right) + \&c. \end{aligned}$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes

$$B = -A, C = -\frac{2(n+2)}{2(2n+3)} B, D = -\frac{2(n+3)}{3(2n+5)} C,$$

$$E = -\frac{2(n+4)}{4(2n+5)} D, F = -\frac{2(n+6)}{5(2n+6)} E \ \&c.$$

Il est bien remarquable que ces deux expressions sont équivalentes, & que dans les cas $n = 0$, & $n = -1$, l'une & l'autre devient infinie, & se réduit à $\tilde{z} = P + Q$.

XXX. Puisque cette réduction ne paroît pas d'abord, il est bon de la démontrer. Soit donc $n = 0$, & pour la première forme on aura

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{2}, D = -\frac{2^2}{2.3}, E =$$

$$+ \frac{2^1}{2.3.4}, F = - \frac{2^4}{2.3.4.5} \&c.$$

d' où nous tirons

$$\begin{aligned} \zeta = & 1(P + Q) - \frac{x}{1} \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq} \right) + \frac{2x^2}{1.2} \left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2} \right) \\ & - \frac{2^2 x^3}{1.2.3} \left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3} \right) + \&c. \end{aligned}$$

Puisque chaque membre contient deux termes, soit M la série qui contient les termes dépendans de P & N celle qui contient Q , de sorte que $\zeta = M + N$; maintenant puisque $P = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, à cause de $p = x + at$, si nous posons $p = 2x$ au lieu de x , on aura par la nature des différentiels

$$\begin{aligned} \Gamma : (p - 2x) = & P - \frac{2x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2 x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2} \\ & - \frac{2^3 x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^4 x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4P}{dp^4} - \&c. \end{aligned}$$

donc, puisque $M = P - \frac{x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2} - \frac{2^2 x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \&c.$, il est évident, que $2M - \Gamma : (p - 2x)$

$$= P = \Gamma : p, \& \text{ partant } M = \frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) =$$

$\frac{1}{2} \Gamma : (x + at) + \frac{1}{2} \Gamma : (at - x)$. De la même manière on verra que

$$N = \frac{1}{2} \Delta : q + \frac{1}{2} \Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2} \Delta : (x - at)$$

+ $\frac{1}{2} \Delta : (-at - x)$, & par conséquent $\zeta = M + N$

se trouve égale à la somme de deux fonctions, l'une de $x + at$, & l'autre de $x - at$.

XXXI. L'autre forme posant $n = 0$ donne

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{3}, D = -\frac{2^2}{3 \cdot 4},$$

$$E = +\frac{2^3}{3 \cdot 4 \cdot 5}, F = -\frac{2^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \text{ \&c.}$$

d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} \zeta &= x(P + Q) - \frac{2x^2}{2 \cdot 3} \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq} \right) + \\ &\frac{2^2 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2} \right) - \frac{2^3 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3} \right) + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Posons $\zeta = M + N$, de sorte que M contienne les termes renfermans P , & N les Q . Considérons à présent la forme $\int P dp = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, & posons $p - 2x$ au lieu de p , pour avoir

$$\begin{aligned} \Gamma : (p - 2x) &= \Gamma : p - \frac{2x}{1} \times P + \frac{2^2 x^2}{1 \cdot 2} \times \frac{dP}{dp} \\ &\quad - \frac{2^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \text{\&c.} \end{aligned}$$

$$\text{Or } M = \frac{x}{1} P - \frac{2x^2}{1 \cdot 2} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \text{\&c.}$$

donc $2M + \Gamma : (p - 2x) = \Gamma : p$ & partant

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \Gamma : p - \frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) = \frac{1}{2} \Gamma : (x + at) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma : (at - x) \end{aligned}$$

& de la même manière on trouve

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2} \Delta : q - \frac{1}{2} \Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2} \Delta : (x - at) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta : (-at - x) \end{aligned}$$

d'où il est clair que $\zeta = M + N$ devient comme ci-devant la somme des deux fonctions, l'une de $x + at$, & l'autre de $x - at$. Cette réduction pour le cas le plus simple est très remarquable.

XXXII. Par les mêmes principes on peut prouver l'identité des deux expressions pour les autres cas. Soit $n = 1$, & la première forme donnant $A = 1$ & $B = -1$,

l'intégrale est $\zeta = \frac{1}{x} (P + Q) - 1 \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq} \right)$.

Or l'autre forme donne ces coefficients $B = -A$, $C = +\frac{3}{5}A$, $D = -\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 6}A$, $E = +\frac{2^2 \cdot 5}{5 \cdot 6 \cdot 7}A$, $F = -\frac{2^3 \cdot 6}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}A$ &c.

Posons $A = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, pour avoir la forme suivante de l'intégrale, dans laquelle je ne mets que les termes renfermant $P = \Gamma : (x + at)$, puisque la réduction pour les Q est la même :

$$\zeta = \frac{2^3 x^3}{1 \dots 4} P - \frac{2^3 x^3}{1 \dots 4} \cdot \frac{dP}{dp} + \frac{2^3 \cdot 3 x^3}{1 \dots 5} \cdot \frac{d^2 P}{dp^2} - \frac{2^4 \cdot 4 x^3}{1 \dots 6} \cdot \frac{d^3 P}{dp^3} + \frac{2^5 \cdot 5 x^6}{1 \dots 7} \cdot \frac{d^4 P}{dp^4} \text{ \&c.}$$

que je décompose en deux parties, savoir

$$\zeta = \frac{2 x^3}{1 \cdot 2} P - \frac{2^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{dP}{dp} + \frac{2^3 x^3}{1 \dots 4} \cdot \frac{d^2 P}{dp^2} - \frac{2^4 x^3}{1 \dots 5} \cdot \frac{d^3 P}{dp^3} + \frac{2^5 x^6}{1 \dots 6} \cdot \frac{d^4 P}{dp^4} - \text{\&c.}$$

$$- \frac{2^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} P + \frac{2^3 x^3}{1 \dots 4} \cdot \frac{dP}{dp} - \frac{2^4 x^3}{1 \dots 5} \cdot \frac{d^2 P}{dp^2} + \frac{2^5 x^6}{1 \dots 6} \cdot \frac{d^3 P}{dp^3} - \frac{2^6 x^6}{1 \dots 7} \cdot \frac{d^4 P}{dp^4} + \text{\&c.}$$

pour avoir une telle forme $\zeta = M - N$, où M & N marquent les séries trouvées, qui étant assés régulières, la valeur de l'une & de l'autre se découvrira ainsi.

XXXIII. Pour la première série M , je pose $P = \frac{dR}{dp}$, où R est aussi une fonction de $x + at$, & j'aurai

$$M = \frac{2x}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2} - \frac{2^2x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2R}{dp^3} + \frac{2^3x^3}{1 \dots 4} \cdot \frac{d^3R}{dp^4} - \&c.$$

Mais posant $R = \Gamma : p$, il me vient

$$\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2} \\ - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2R}{dp^3} + \&c.$$

& partant $\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + 2M$,
d'où l'on tire la valeur de M , favoir

$$M = \frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) - \frac{1}{2} \Gamma : p + x \Gamma' : p.$$

Pour l'autre série je fais $P = \frac{d^2S}{dp^2}$ pour avoir

$$N = \frac{2^2x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2S}{dp^3} - \frac{2^3x^3}{1 \dots 4} \cdot \frac{d^3S}{dp^4} + \frac{2^4x^4}{1 \dots 5} \cdot \frac{d^4S}{dp^5} - \&c.$$

Mais puisque $\frac{d^2S}{dp^2} = \frac{ddR}{dp^2}$, il suit que $\frac{dS}{dp} = R = \Gamma : p$,

donc $S = \Upsilon : p$ & $\Upsilon : (p - 2x) = S - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dS}{dp}$

$$+ \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddS}{dp^2} - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2S}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1 \dots 4} \cdot \frac{d^2S}{dp^4} - \&c.$$

& partant $\Upsilon : (p - 2x) = \Upsilon : p - 2x \Gamma : p + 2xx \Gamma' : p$
 $- 2xN$, de sorte que $N = -\frac{1}{2x} \Upsilon : (p - 2x) +$

$\frac{1}{2x} \Upsilon : p - \Gamma : p + x \Gamma' : p$, par conséquent $M - N =$

$$\frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2x} \Upsilon : (p - 2x) + \frac{1}{2} \Gamma : p -$$

$\frac{1}{2x} \Upsilon : p$, ce qui est la valeur de ζ .

XXXIV. Puisque $p = x + at$, en doublant les termes, & posant Γ au lieu de Υ , la partie de l'intégrale, qui renferme la lettre P , se réduit à cette forme

$$\zeta = \Gamma' : (x + at) - \frac{1}{x} \Gamma : (x + at) \\ + \Gamma' : (-x + at) + \frac{1}{x} \Gamma : (-x + at)$$

or la même méthode nous fournit pour les termes Q

$$\zeta = \Delta' : (x - at) - \frac{1}{x} \Delta : (x - at) \\ + \Delta' : (-x - at) + \frac{1}{x} \Delta : (-x - at)$$

& ces deux expressions combinées ensemble donnent l'intégrale trouvée par la première forme.

Soit pour cela $\Delta : (-x - at) - \Gamma : (x + at) = P = \text{funct. } (x + at = p)$, & la différenciation donnera $-\Delta' : (-x - at) - \Gamma' : (x + at) = \frac{dP}{dp}$; posant de même $\Gamma : (-x + at) - \Delta : (x - at) = Q = \text{funct. } (x - at = q)$, on aura par la différenciation: $-\Gamma' : (-x + at) - \Delta' : (x - at) = \frac{dQ}{dq}$, & de là il est clair qu'on aura, comme ci-dessus:

$$\zeta = \frac{1}{x} (P + Q) - 1 \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq} \right).$$

XXXV. Ces réductions que je viens de faire pour les cas $n = 0$ & $n = 1$, peuvent être appliquées avec le même succès à des plus grands nombres pris pour n , mais il est aisé de prévoir, qu'elles deviendront de plus en plus embarrassantes. Cependant il suffit d'avoir fait voir la possibilité de réduire la forme infinie de l'intégrale à la finie, dans les cas, où n est un nombre entier. Mais pour les cas, où n est une fraction, les deux formes trouvées pour l'intégrale dans le §. XXIX. deviennent infinies, & il ne paroît aucun moyen de réduire

l'une ou l'autre à une forme finie. On y rencontre les mêmes difficultés que dans les cas irrésolubles de l'équation de Riccati, & quoique j'aie trouvé moyen de construire ces cas par une méthode tout-à-fait particulière, il ne semble point, que cette méthode puisse être appliquée aux cas dont il s'agit ici. Mais non obstant le nombre infini des termes, dont les intégrales de ces cas sont composées, elles ne sont pas moins complètes, puisqu'elles renferment deux fonctions absolument indéterminées & arbitraires.

XXXVI. Or pour trouver plus facilement les intégrales complètes de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{n(n+1)}{xx} z$$

qu'on pose $x + at = p$ & $x - at = q$, ensuite soit P une fonction quelconque de p , & Q une fonction quelconque de q , qu'on fasse outre cela pour abréger :

$P' = fPdp$, $P'' = fP'dp$, $P''' = fP''dp$, $P^{iv} = fP'''dp$ &c.

$Q' = fQdq$, $Q'' = fQ'dq$, $Q''' = fQ''dq$, $Q^{iv} = fQ'''dq$ &c.

toutes ces valeurs pouvant aisément être représentées par des quadratures de lignes courbes, enfin qu'on forme les coefficients suivans

$$A = + 1$$

$$B = + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C = + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}$$

$$D = + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$E = + \frac{(n-3)(n-2) \dots (n+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$F = + \frac{(n-4)(n-3) \dots (n+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$$

&c.

& l'intégrale cherchée fera

$$\zeta = A(P + Q) - \frac{B}{x}(P' + Q') + \frac{C}{xx}(P'' + Q'') \\ - \frac{D}{x^3}(P''' + Q''') + \&c.$$

XXXVII. Aiant trouvé cette intégrale ou valeur de ζ , on aura aussi les intégrales de toutes les équations qui en sont transformées, comme posant $\zeta = x^{-m}u$, à cause

$$\text{de } \left(\frac{dz}{dt^2}\right) = x^{-m} \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) \quad \&$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x^{-m} \left(\frac{du}{dx}\right) - mx^{-m-1}u$$

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = x^{-m} \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - 2mx^{-m-1} \left(\frac{du}{dx}\right) + m(m+1)x^{-m-2}u$$

l'équation transformée fera:

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-n)(m+n+1)}{xx} u$$

& partant son intégrale fera :

$$u = Ax^m(P + Q) - Bx^{m-1}(P' + Q') \\ + Cx^{m-2}(P'' + Q'') - Dx^{m-3}(P''' + Q'''). \&c.$$

XXXVIII. Développons les cas les plus simples de cette équation généralisée, en conservant les mêmes significations $p = x + at$ & $q = x - at$, & des fonctions qui en sont formées P, P', P'', P''' &c. Q, Q', Q'', Q''' &c.

$$1^\circ \frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{m(m+1)}{xx} u$$

l'intégrale est : $u = x^m(P + Q)$

$$2^\circ \frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-1)(m+2)}{xx} u$$

l'intégrale : $u = x^m(P + Q) - \frac{1.2}{2} x^{m-1}(P' + Q')$

$$3^\circ \frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-2)(m+3)}{xx} u$$

dont l'intégrale est

$$u = x^m (P + Q) - \frac{2 \cdot 3}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 4} x^{m-2} (P'' + Q'').$$

4° $\frac{1}{a a} \left(\frac{d d u}{d r^2} \right) = \left(\frac{d d u}{d x^2} \right) - \frac{2 m}{x} \left(\frac{d u}{d x} \right) + \frac{(m-3)(m+4)}{x x} u$
 dont l'intégrale est

$$u = x^m (P + Q) - \frac{3 \cdot 4}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

5° $\frac{1}{a a} \left(\frac{d d u}{d r^2} \right) = \left(\frac{d d u}{d x^2} \right) - \frac{2 m}{x} \left(\frac{d u}{d x} \right) + \frac{(m-4)(m+5)}{x x} u$
 dont l'intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{4 \cdot 5}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{m-4} (P^{IV} + Q^{IV}).$$

6° $\frac{1}{a a} \left(\frac{d d u}{d r^2} \right) = \left(\frac{d d u}{d x^2} \right) - \frac{2 m}{x} \left(\frac{d u}{d x} \right) + \frac{(m-5)(m+6)}{x x} u$
 dont l'intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{5 \cdot 6}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{m-4} (P^{IV} + Q^{IV}) - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^{m-5}$$

$$(P^V + Q^V).$$

XXXIX. Jusqu'ici je n'ai donné que les intégrales pour les cas de l'équation proposée qui en sont susceptibles, sans y avoir été conduit par une méthode certaine, &

directe, car toute l'analyse dont je me suis servi est uniquement fondée sur une heureuse conjecture, qui regarde la forme de ces intégrales, & que le pur hazard m'a quasi fournie. Il est donc d'autant plus important de découvrir une méthode directe, qui nous puisse mener au même but, qu'il n'y a aucun doute, qu'une telle méthode n'apporte de très-grands éclaircissements dans cette nouvelle carrière; or la considération de ces intégrales nous porte aisément à penser, qu'il doit y avoir une méthode, qui, moyennant une certaine transformation conduite des cas plus simples aux plus compliqués, de la même manière que dans le développement de la fameuse équation de Riccati on a réussi à déduire les cas plus difficiles des plus simples, en y employant une certaine substitution. C'est donc par une semblable méthode, que je m'en vais enseigner la résolution de l'équation, que j'ai traitée jusqu'ici.

XL. L'équation proposée étant donc :

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx} \right) - \frac{k}{xx} z$$

je la transforme par le moyen de cette substitution :

$$u = \left(\frac{dz}{dx} \right) + \frac{m}{x} z$$

en cherchant une équation, qui détermine la fonction u par t & x ; or il est aisé de prévoir, que l'équation transformée aura une telle forme

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dx^2} \right) - \frac{k'}{xx} u$$

semblable à la proposée, avec cette seule différence que le nombre k' sera différent du nombre k ; ou bien sans supposer une telle prévoyance, on peut regarder cette dernière équation comme la proposée, & introduire z à la place de u par la substitution indiquée.

XLI. Supposant donc $u = \left(\frac{dz}{dx} \right) + \frac{m}{x} z$, on en tire

d'abord

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dt^2 dx}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Or la première équation donnant

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{aak}{xx} \zeta$$

si nous différencions par la seule variabilité de x , nous aurons :

$$\left(\frac{d^3z}{dt^2 dx}\right) = aa \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) - \frac{aak}{xx} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2aak}{x^2} \zeta$$

d'où nous tirons :

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx} \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(m-2)k}{x^2} \zeta.$$

Maintenant la même substitution donne :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{m}{xx} \zeta$$

& de là

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{xx} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2m}{x^2} \zeta ;$$

$$\text{or } -\frac{k'}{xx} u = -\frac{k'}{xx} \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{mk'}{x^2} \zeta$$

& partant ces deux dernières expressions ensemble doivent être égales à celle, qui vient d'être trouvée pour

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right).$$

XLII. Puisque les termes $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$ & $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ se détruisent d'eux mêmes ; il ne reste qu'à égaler séparément ceux qui sont affectés par $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & par ζ , d'où nous tirons ces deux égalités $-k = -2m - k'$ & $-(m-2)k = 2m - mk'$, ou $m = \frac{k-k'}{2}$, & $2k = m(k-k'+2)$ donc $(k-k')^2 - 2k - 2k' = 0$, & partant

$$k' =$$

$$k' = k + 1 \pm \sqrt{(1 + 4k)}; \text{ \& } m = \frac{-1 \mp \sqrt{(1 + 4k)}}{2}$$

Par conséquent si nous avons réussi à trouver l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{k}{xx} z$, nous aurons

$$\text{aussi l'intégrale de celle-ci: } \frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dx^2} \right) - \frac{k'}{xx} u$$

posant $k' = k + 1 \pm \sqrt{(1 + 4k)}$, puisque $u = \left(\frac{dz}{dx} \right)$

$$+ \frac{k - k'}{2x} z.$$

XLIII. Or aiant assigné ci-dessus, indépendamment de ces recherches, l'intégrale de notre équation pour le cas $k = 0$, cette nouvelle méthode nous fournit l'intégrale pour le cas $k' = 2$, & supposant ensuite $k = 2$, nous en tirons le troisième cas $k' = 3 + \sqrt{9} = 6$, & celui-ci, posant $k = 6$, nous conduit au quatrième $k' = 7 + \sqrt{25} = 12$, lequel, en faisant $k = 12$, nous mène au cinquième $k' = 13 + \sqrt{49} = 20$, & ainsi de suite selon cette progression:

$$k \mid 0 \mid 2 \mid 6 \mid 12 \mid 20 \mid 30 \mid 42 \mid \&c.$$

$$k' \mid 2 \mid 6 \mid 12 \mid 20 \mid 30 \mid 42 \mid 56 \mid \&c.$$

d'où l'on voit que toutes les valeurs de k sont comprises dans cette formule générale $k = i(i + 1)$, & ce cas considéré en général nous conduit au suivant

$$k' = i(i + 1) + 1 + \sqrt{[1 + 4i(i + 1)]} = ii + 3i + 2 = (i + 1)(i + 2), \text{ d'où nous tirons tous les cas dont j'ai assigné ci-dessus les intégrales.}$$

XLIV. Donc si nous connoissons, pour le cas $k = n(n + 1)$ l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right)$

$$- \frac{n(n+1)}{xx} z, \text{ qui soit } z = V, \text{ nous en tirerons, pour le cas } k' = (n + 1)(n + 2) \text{ l'intégrale de celle-ci:}$$

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{(n+1)(n+2)}{xx} z, \text{ qui fera } z = \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{(n+1)}{x} V, \text{ ou bien, puisqu'on peut multiplier la valeur}$$

de z par une constante quelconque, cette dernière intégrale peut être exprimée ainsi: $z = \frac{1}{x} V - \frac{1}{n+1} \left(\frac{dV}{dx} \right)$.

Par conséquent, puisque pour le cas, $k = 0$, l'intégrale est $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, en écrivant S pour cette double fonction, nous aurons pour l'équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddz}{dx^2} \right) - \frac{k}{xx} z$$

les intégrales suivantes:

si		
$k = 0$		$z = S$
$k = 1.2$		$z = \frac{1}{x} S - \left(\frac{dS}{dx} \right)$
$k = 2.3$		$z = \frac{3}{2x^2} S - \frac{3}{2x} \left(\frac{dS}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{ddS}{dx^2} \right)$
$k = 3.4$		$z = \frac{5}{2x^3} S - \frac{5}{2x^2} \left(\frac{dS}{dx} \right) + \frac{1}{x} \left(\frac{ddS}{dx^2} \right) - \frac{1}{2.3} \left(\frac{d^3S}{dx^3} \right)$
&c.		&c.

XLV. Soit, pour le cas $k = n(n+1)$, l'intégrale:

$$z = \frac{A}{x^n} S - \frac{B}{x^{n-1}} \left(\frac{dS}{dx} \right) + \frac{C}{x^{n-2}} \left(\frac{ddS}{dx^2} \right) - \frac{D}{x^{n-3}} \left(\frac{d^3S}{dx^3} \right) + \frac{E}{x^{n-4}} \left(\frac{d^4S}{dx^4} \right) - \&c.$$

& pour le cas $k = n(n+1)(n+2)$, à cause de

$$z = \left(\frac{dV}{dx} \right) - \frac{(n+1)}{x} V, \text{ nous aurons :}$$

$$\left(\frac{dV}{dx} \right) = - \frac{nA}{x^{n+1}} S + \frac{A}{x^n} \left(\frac{dS}{dx} \right) - \frac{B}{x^{n-1}} \left(\frac{ddS}{dx^2} \right) + \frac{(n-1)B}{x^n} - \frac{(n-2)C}{x^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3} \right) - \&c. \\
& + \frac{(n-3)D}{x^{n-2}} - \&c. \\
- \frac{(n+1)}{x} V = & - \frac{(n+1)A}{x^{n+1}} S + \frac{(n+1)B}{x^n} \left(\frac{dS}{dx} \right) \\
& - \frac{(n+1)C}{x^{n-1}} \left(\frac{d^2 S}{dx^2} \right) + \frac{(n+1)D}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3} \right) - \&c.
\end{aligned}$$

& partant l'intégrale pour le cas $k = (n+1)(n+2)$ en changeant les signes sera :

$$\begin{aligned}
\tilde{z} = & \frac{(2n+1)A}{x^{n+1}} S - \frac{(A+2nB)}{x^n} \left(\frac{dS}{dx} \right) + \frac{(B+(2n-1)C)}{x^{n-1}} \\
& \left(\frac{d^2 S}{dx^2} \right) - \frac{(C+(2n-2)D)}{x^{n-2}} \left(\frac{d^3 S}{dx^3} \right) + \&c.
\end{aligned}$$

& il est évident que cette méthode nous fournit les mêmes intégrales que la précédente; quoique les valeurs pour chaque nombre n ne paroissent point si ouvertement, cependant une légère attention nous découvrira bientôt la même loi de progression entre les coefficients A, B, C, D &c. qui a été trouvée ci-dessus.



R E C H E R C H E S

*Sur la construction des nouvelles Lunettes
à 5 & 6 verres & leur perfection
ultérieure*

P A R M. E U L E R.

I. **D**EPUIS quelque tems cette espèce de Lunettes est devenue fort commune, & l'emporte beaucoup sur les Lunettes à 4 verres, dont on s'étoit servi jusqu'ici pour représenter les objets debout. L'invention de ces nouvelles Lunettes est apparemment dûe au célèbre M. Dollond, qui semble avoir porté l'art de polir les verres presque au plus haut degré de perfection, dont il est susceptible. Aussi les avantages de ces nouvelles Lunettes sur les ordinaires à 4 verres sont ils très-considérables: elles présentent les objets plus nettement, elles découvrent un plus grand champ, & pour le même grossissement elles ne sont pas si longues que les ordinaires.

II. D'abord je me suis imaginé que ces Lunettes étoient construites sur le même principe que les ordinaires, qu'on peut regarder comme deux Lunettes astronomiques jointes ensemble, & que l'artiste y avoit adroitement ajouté un cinquième & même un fixième verre, tant pour augmenter le champ apparent, que pour déliyrer des couleurs d'iris la représentation des objets. Mais aiant examiné quelques unes de ces Lunettes, j'ai remarqué que l'arrangement des verres est fondé sur un principe tour-à-fait différent, & en particulier on y trouve une lentille, dont l'ouverture est beaucoup plus petite que dans les ordinaires, sans que le champ apparent en souffre la moindre diminution. Cette petite lentille constitue quasi l'essence de

ces nouvelles Lunettes, en les distinguant de toutes les autres dont on s'est servi jusqu'ici.

III. Le principe sur lequel ces Lunettes sont fondées ; consiste dans une disposition toute particulière des deux verres du milieu, qu'il faut bien distinguer tant de l'objectif que des oculaires. L'objectif étant placé en A (fig. 1. pl. 3.), on met le second verre QQ à peu près dans le foyer de l'objectif (je supposerai ici qu'il s'y trouve exactement, puisque cette situation ne cause aucune confusion) ; ensuite considérant l'objectif PAP comme un vrai objet qu'on marque le lieu C ou son image tomberoit par le second verre QQ , & c'est précisément ici qu'il faut placer le troisième verre RR ; d'où l'on voit que son ouverture est déterminée uniquement par celle de l'objectif, de sorte que $RR = \frac{BC}{AB} \cdot PP$, & puisque la distance

BC est ordinairement très-petite à l'égard de AB , c'est la raison pourquoi l'ouverture de ce troisième verre est si petite, en quoi consiste le caractère de ces Lunettes.

IV. Après ces trois verres en A , B , & C , on peut employer un ou deux, ou plusieurs oculaires pour gagner un champ apparent d'autant plus grand ; car si l'on ne se seroit que d'un seul oculaire SDS le champ seroit au dessous des Lunettes ordinaires, & cependant comme ce cas renferme le fondement des suivans, il sera bon de le développer.

Soit donc p la distance de foyer de l'objectif, & x le demi-diamètre de son ouverture, & que pour les autres verres les distances de foyer soient exprimées par les lettres q , r , s , & les demi-diamètre de leurs ouvertures par πq , $\pi' r$, $\pi'' s$, entant que le champ apparent en dépend. Ensuite pour les nombres B , C , D de mes formules générales expliquées dans le XIII. Volume des Mém. de l'Acad. de Berlin, puisque le verre B est placé au foyer de l'obje-

étif, nous aurons $B = -1$ & $B = \infty$, pour le troisième verre posons $C = \frac{c}{1-c}$, & partant $C = c$, or le quatrième verre étant l'oculaire, donne $D = \infty$, & $D = 1$.

V. Maintenant, puisque les objets doivent être présentés debout, soit $m:1$ le rapport du grossissement selon le diamètre, & posant le demi-diamètre du champ apparent $= \phi$ nous aurons d'abord $\phi = -\frac{\pi + \pi' - \pi''}{m-1}$, où je remarque que si l'on fait l'oculaire également convexe des deux côtés, on peut prendre $\pi'' = -\frac{1}{4}$, de sorte que le diamètre de son ouverture soit égal à la moitié de sa distance de foyer. Or pour rendre les déterminations plus générales, au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, qui répond à la plus grande ouverture, j'écrirai ω , & je poserai $\pi'' = -\omega$. Pour la lettre π' , puisque l'ouverture du troisième verre n'influe point sur le champ, j'aurai $\pi' = 0$, & la lettre π ne pouvant être prise négative, je mettrai $\pi = \beta\omega$, où il faut prendre β aussi petite que les circonstances le permettent. De là nous aurons $\phi = \frac{1-\beta}{m-1}\omega$, & posant pour abréger $\frac{1-\beta}{m-1} = M$, cette expression $\phi = M\omega$.

VI. Aiant établi ces élémens, je tire de mes formules générales, à cause de $B\pi - \phi = \infty\pi$, $C\pi' - \pi\phi = -(\beta - M)\omega$, & $\pi'' - \pi' + \pi - \phi = -(1 - \beta + M)\omega$, tant pour les distances de foyer de nos verres, que pour leurs intervalles les valeurs suivantes :

$$q = \frac{B \varphi}{B \pi - \varphi} p = \frac{M}{\beta} p$$

$$r = \frac{B' C \varphi}{-(\beta - M) \omega} p = \frac{c M}{\beta - M} p$$

$$s = \frac{B C \varphi}{-(1 - \beta + M) \omega} p = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{1 - \beta + M} p,$$

$$A B = \frac{B \pi}{B \pi - \varphi} p = p$$

$$B C = \frac{\varphi B \pi}{B \pi (\beta - M) \omega} p = \frac{M}{\beta - M} p$$

$$C D = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{(\beta - M)(1 - \beta + M)} p$$

& pour le lieu de l'œil, la distance $DO = \frac{s}{1 - \beta + M}$.

Or la formule, qui sert à détruire les couleurs d'iris, ne sauroit être remplie, puisqu'il faudroit qu'il fût $\frac{1}{1 - \beta + M} = 0$, & partant ce sera un grand défaut de cette première espèce de Lunettes.

VII. Or l'autre défaut, par rapport au champ apparent; est encore plus considérable, son demi-diamètre $\varphi = \frac{1 - \beta}{m - 1} \omega$ étant encore plus petit que dans les Lunettes astronomiques ordinaires; car non seulement le nombre β ne sauroit évanouir, mais il faut qu'il soit plus grand que M . Posons donc $\beta = (1 + n) M$, & puisque $1 - \beta = (m - 1) M$, nous aurons $M = \frac{1}{m + n}$, & partant

$\varphi = M \omega = \frac{\omega}{m + n}$, & ensuite les autres déterminations:

$$q = \frac{1}{1 + n} p, \quad AB = p$$

$$r = \frac{c}{n} p, \quad BC = \frac{1}{n} p$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{M}{1-nM} P, \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{n(1-nM)} P,$$

$$\text{ou } t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{m} P, \quad \text{ou } CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{m+n}{nm} P$$

$$\& \text{ pour le lieu de l'œil } DO = \frac{s}{1-nM} = \frac{m+n}{m} s.$$

VIII. Si nous considérons les distances de foyer des trois premiers verres p, q, r , avec le grossissement m , comme données, nous en aurons $n = \frac{p-q}{q}$ & $c = \frac{(p-q)r}{pq}$, d'où le demi-diamètre du champ apparent fera $\varphi =$

$$\frac{q\omega}{mq+p-q}, \text{ qui ne dépend donc point du troisième verre en } C. \text{ Mais pour l'oculaire en } D \text{ la distance de foyer doit être } s = \frac{(p-q)r}{pq-(p-q)r} \cdot \frac{p}{m}, \text{ \& les intervalles entre les verres, } AB = p, BC = \frac{rq}{p-q}, CD =$$

$$\frac{r(mq+p-q)}{m(pq-(p-q)r)} P = s \left(\frac{mq}{p-q} + 1 \right). \text{ Cet arrangement des verres nous fournit donc la commodité que, quand même on pourroit donner à } p \text{ une valeur très-petite, on pourroit se servir d'un oculaire, dont la distance de foyer fût aussi grande qu'on voudra.}$$

IX. Pour rendre cet avantage plus sensible, soit la distance de foyer de l'oculaire donnée, $s = k$, & puisque $\frac{c}{1-c} = \frac{mk}{p}$, nous aurons $c = \frac{mk}{mk+p}$, d'où les déterminations de la Lunette seront les suivantes :

Dist. de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{1}{1+n} P$	$BC = \frac{1}{n} P$

Dist de foyer
du verre

$$\text{en } C = r = \frac{mkp}{n(mk+p)}$$

$$\text{en } D = s = k$$

Intervalles entre
les verres

$$CD = \frac{m+n}{n} k$$

$$DO = \frac{m+n}{m} k$$

où le nombre n est encore indéterminé ; mais puisque nous avons pour le champ apparent $\varphi = \frac{\omega}{m+n}$, il est bon de prendre n aussi petit qu'il est possible ; or on voit qu'en diminuant trop le nombre n , la longueur de la Lunette deviendrait excessive, défaut qu'on a encore plus de raisons d'éviter, que la petitesse du champ apparent.

X. Considérons aussi l'ouverture de chaque verre, & pour l'objectif le demi-diamètre de son ouverture x se détermine par le grossissement, en prenant $x = \frac{m}{60}$ pouces

ou bien $x = \frac{m}{50}$ pouces, si l'on craint que la pluralité des verres ne nuise à la clarté. Pour le second verre $Q B Q$, le demi-diamètre de son ouverture doit être $B Q = \beta \omega q = M \omega p = \frac{\omega}{m+n} p$. Pour le troisième verre

$R C R$, il faut avoir uniquement égard à l'ouverture de l'objectif, dont le demi-diamètre étant $A P = x$, nous aurons $CR = \frac{BC}{AB} x = \frac{x}{n}$, d'où l'on comprend la raison, pourquoi ce verre souffre une si petite ouverture. Mais au verre oculaire il faut donner la plus grande ouverture dont il est susceptible, son demi-diamètre étant $D S = \omega k$ ou bien $\frac{1}{4} k$.

XI. Il est aussi important de déterminer conformément, à mes expressions générales la confusion qui résulte de tous

nos quatre verres, où leur figure indiquée par les nombres λ , λ' , λ'' , λ''' entre principalement en considération. Puisque donc $B = -1$, $C = \frac{c}{1-c}$, $C\pi' - \pi + \phi = -(\beta - M)\omega \doteq -n\phi$, on voit que le second verre ne cause aucune confusion; or de tous les autres ensemble résulte cette expression :

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c (1-c)}{n c^2} + \frac{\lambda''' (1-c)^2}{m c^3} \right)$$

qui ne doit pas excéder la valeur de $\frac{\mu}{4 x^3}$, prenant x entre 40 & 50. Il faut donc qu'il soit

$$\frac{m x^3}{4 p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c (1-c)}{n c^2} + \frac{\lambda''' (1-c)^2}{m c^3} \right) < \frac{1}{x^3}$$

ou, puisque $\frac{c}{1-c} = \frac{m k}{p}$, & $c = \frac{m k}{m k + p}$, nous aurons:

$$\frac{m x^3}{p^3} \left(\lambda + \frac{\lambda'' (m k + p)^2}{n m^2 k^2} + \frac{\nu p (m k + p)}{n m m k k} + \frac{\lambda''' p^3}{m^2 k^3} \right) < \frac{1}{x^3}$$

XII. De là nous voyons que plus on prend petit le nombre n plus la confusion sera augmentée, ce qui est un nouveau motif de prendre toujours $n > 1$. Ensuite comme le second verre n'affecte point la confusion, on le fera également convexe des deux côtés, pourqu'il admette l'ouverture que je viens de lui assigner, sur tout quand j'emploierai plusieurs oculaires. Or pour le troisième verre, comme il ne demande presque point d'ouverture, il sera bon de prendre $\lambda'' = 1$, & puisque sa distance de foyer est $= r$, & $C = c$, il faudra faire les rayons

$$\text{de la face d'avant} = \frac{r}{\rho c + \sigma (1-c)}$$

$$\text{de la face de derrière} = \frac{r}{\sigma c + \rho (1-c)}$$

où les nombres ρ & σ de même que le nombre ν dépendent de la raison de réfraction, comme je l'ai expliqué ailleurs. Mais

pour l'oculaire *SDS*, on voit qu'en augmentant k audelà de $\frac{p}{m}$, la confusion qui en résulte, ne sera d'aucune conséquence.

XIII. Je ne m'arrêterai pas à développer cette espèce de telescopes, puisqu'elle est assujettie à ces deux très-grands défauts, que premièrement le champ apparent est très-peu considérable, étant moindre que dans les Lunettes ordinaires composées des deux convexes, & en second lieu parcequ'elle n'est pas délivrée de l'apparition des couleurs d'iris. Aussi M. Dollond n'en a point fait, autant que je sache, & si l'on veut des Lunettes qui n'aient pas plus de verres que quatre, on fera mieux de suivre la construction ordinaire. Cependant cette première espèce me servira de base, pour en déduire les espèces suivantes, qui ne diffèrent de celle-ci que par le nombre des verres oculaires. C'est de cette source qu'on peut non seulement amplifier le champ apparent, mais aussi détruire les couleurs d'iris, & par là procurer à ces Lunettes les avantages, qui les ont rendues si recommandables; je tâcherai sur tout de porter ces avantages au plus haut degré de perfection, dont ils sont susceptibles.

XIV. Mais auparavant il est nécessaire de donner un bon conseil pour faire mieux réussir l'exécution de ces Lunettes. C'est au sujet du troisième verre *RCR* dont la confusion est si grande, qu'elle pourroit bien surpasser celle de l'objectif même, & partant obliger d'étendre la distance de foyer de l'objectif bien audelà des bornes, que la construction des Lunettes ordinaires prescrit, ce qui allongeroit très-considérablement cette espèce de Lunettes; & puisqu'alors la quantité p devrait surpasser mk , la confusion qui en résulte deviendroit encore plus considérable, sans qu'il fût à propos d'y remédier par l'augmentation du nombre n , ce qui retreciroit trop le champ apparent. Il

faut donc penser à remédier à cet inconvénient d'une autre manière, qui puisse même contribuer à rendre ces Lunettes plus commodes.

XV. Pour cet effet je ne crois pas qu'il y ait un meilleur moyen que de doubler ce verre $R C R$, ou de le composer de deux verres immédiatement joints ensemble, ce qui se pourra exécuter d'autant plus aisément, puisque ce verre est très-petit, & que son épaisseur ne s'oppose pas à une telle jonction. Aiant donc déterminé la distance de foyer r que ce verre doit avoir, les deux verres dont il fera bon de le composer, doivent être formés selon les mesures suivantes.

Du premier verre qui regarde l'objectif

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'avant} = 0,7481r \\ \text{de derrière} = 1,0225r \end{array} \right.$

De l'autre verre qui regarde l'œil

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'avant} = -0,5088r \\ \text{de derrière} = +0,6657r \end{array} \right.$

Ces deux verres étant joints ensemble laisseront un petit vuide entr'eux (*fig. 2.*), & on les pourra regarder comme un seul verre, dont la confusion sera insensible.

XVI. Aiant détruit de cette manière, ou au moins rendu insensible la confusion, qui seroit à craindre de la part de ce troisième verre, on pourra avec d'autant plus de succès remédier à toute la confusion causée par l'objectif, & tous les autres verres ensemble. On n'a qu'à composer l'objectif aussi de deux verres, dont voici la construction, la distance de foyer devant être $= p$

Du premier verre

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'avant} = 0,51467p \\ \text{de derrière} = 4,05851p \end{array} \right.$

De l'autre verre

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = -0,59340p \\ \text{de derrière} = +0,74127p \end{array} \right.$

On mettra entre ces deux verres une telle distance, à déterminer par l'expérience, que l'on s'aperçoive le moins de toute confusion. Quand cette construction réussit bien, on pourra, peut être, prendre $p = \frac{m}{4}$ pouces ou encore plus petite, ce qui racourceroit très-considérablement ces Lunettes.

De Lunettes de cette espèce à 5 verres.

XVII. Ces Lunettes ne diffèrent des précédentes, que parceque j'emploie ici deux verres oculaires, tant pour augmenter le champ apparent, que pour faire évanouir les couleurs d'iris, dont la représentation des objets pourroit être troublée. Ensuite je nomme ces Lunettes à cinq verres, quand même on auroit doublé tant l'objectif que le troisième petit verre RCR , puisque cette duplication n'empêche pas qu'on ne puisse regarder dans le calcul ces verres comme simples. Mais quand il s'agit de fixer la distance de foyer l'objectif, que je nomme $= p$, & à laquelle l'intervalle des verres AB est toujours égale, il y faut faire attention à cause de la confusion, qui pourroit résulter de tous les verres. Car plus on réussit à diminuer cette confusion, plus peut-on prendre petite la distance de foyer de l'objectif, laquelle doit pourtant être toujours au moins plus de quatre fois plus grande que le diamètre de son ouverture qui se détermine par le grossissement exprimé par la lettre m .

XVIII. Posant donc les lettres p, q, r, s & t pour les distances de foyer de nos 5 verres, soient les demidiames de leurs ouvertures :

$AP = x, BQ = \pi q, CR = \pi' r, DS = \pi'' s$ & $ET = \pi''' t$,
& le demi-diamètre du champ apparent $= \phi$. Cela posé, puisque le grossissement est $= m$, & que les objets doi-

vent être représentés debout, mes formules générales me fournissent cette équation $\varphi = -\frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$, où comme j'ai remarqué cy-dessus, la lettre π doit avoir une valeur positive $< \omega$, & $\pi = 0$. Donc pour rendre le champ aussi grand qu'il est possible, je poserai $\pi = \beta \omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, & $\pi''' = \omega$, pour avoir $\varphi = \frac{2 - \beta}{m - 1} \omega$, ou $\varphi = M \omega$, en posant $M = \frac{2 - \beta}{m - 1}$.

XIX. Soient ensuite les nombres, qui déterminent dans mes formules tant les distances de foyer, que les intervalles des verres :

$$B = -1, C = \frac{c}{1 - c}, D = -\frac{d}{1 + d}, E = \infty$$

$$B = \infty, C = c, D = -d, E = 1$$

d'où nous tirons d'abord les valeurs suivantes :

$$B \pi - \varphi = \infty \beta \omega$$

$$C \pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M) \omega$$

$$D \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M) \omega$$

$$\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(2 - \beta + M) \omega$$

& de là les distances de foyer avec les intervalles des verres :

$$q = \frac{M}{\beta} P$$

$$r = \frac{M}{\beta - M} P$$

$$s = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{d M}{d + \beta - M} P$$

$$t = \frac{c d}{(1 - c)(1 + d)} \cdot \frac{M}{2 - \beta + M} P$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{M}{\beta - M} P$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{dM}{(\beta - M)(d + \beta - M)} P$$

$$DE = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{(d+2)M}{(d+\beta-M)(2-\beta+M)} P$$

& pour le lieu de l'œil la distance $EO = \frac{c}{2-\beta+M}$.

XX. Pour abréger ces expressions, posons $\beta = (n+1)M$, puisqu'il faut nécessairement qu'il soit $\beta > M$, ce qui four-

$M = \frac{2}{m+n}$, & partant le demi-diamètre du champ ϕ

$= \frac{2}{m+n} \omega$, qui est le double du cas précédent, en don-

nant au nombre n la même valeur. Or nos formules deviendront :

$$q = \frac{1}{n+1} P$$

$$r = \frac{c}{n} P$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{dM}{d+nM} P$$

$$t = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{M}{2-nM} P$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{1}{n} p$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{n(d+nM)} P$$

$$DE = \frac{cd}{(1-c)(1+d)} \cdot \frac{(d+2)}{(d+nM)(2-nM)} P$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{c}{2-nM} = \frac{c}{mM}$,

où les trois quantités c , d & n feroient arbitraires.

XXI. Mais il faut à cette heure tenir compte des couleurs d'iris, qui évanouïront en satisfaisant à cette équation:

$$\frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} + \frac{\pi'''}{E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi} = 0$$

qui pour le cas présent se réduit à celle-ci :

$$-\frac{1}{d + nM} + \frac{1}{2 - nM} = 0$$

d'où nous trouvons $d = 2 - 2nM$ & $d + 2 = 2(2 - nM)$, & en substituant pour M sa valeur $\frac{2}{m+n}$,

nous aurons $2 - nM = d + nM = \frac{2m}{m+n}$, $d = \frac{2(m-n)}{m+n}$ & $d + 2 = \frac{4m}{m+n}$, & partant:

$$q = \frac{1}{n+1} p$$

$$AB = p$$

$$r = \frac{c}{n} p$$

$$BC = \frac{1}{n} p$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(m-n)}{m+n} \cdot \frac{p}{m}, \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{m-n}{n} \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}, \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{m+n}{2m} t$

XXII. On peut rendre ces formules encore plus simples en posant $n = \frac{m}{i}$, de sorte que le demi-diamètre du

champ apparent devienne $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)} \omega$, & les autres déterminations seront :

$$q = \frac{i}{m+i} p$$

$$AB = p$$

$$r = ci \cdot \frac{p}{m}$$

$$BC = i \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m}$$

$$CD = \frac{c}{1-c} \cdot (i-1) \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$$

$$DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil la distance $EO = \frac{i+1}{2i} t$, où

le champ apparent demande de grandes valeurs pour le nombre i , mais la longueur de la Lunette aussi bien que la distinction en demande de petites, puisque (§. XI.)

la quantité $\frac{\lambda''}{nc'} = \frac{\lambda'' i}{m c'}$ doit être fort petite par rapport à l'unité à moins qu'on ne remédie à la confusion, en doublant le troisième verre.

XXIII. Posons outre cela $\frac{c}{1-c} \times \frac{p}{m} = \zeta$, pour mieux soumettre les verres oculaires à notre volonté, de sorte, que $\frac{c}{1-c} = \frac{mz}{p}$, & $c = \frac{mz}{mz+p}$, d'où la fraction $\frac{i}{m} (1 + \frac{p}{mz})$ devrait être assez petite, pour n'être pas obligé de doubler le troisième verre. Donc les déterminations générales pour ces Lunettes seront :

$$q = \frac{i}{m+i} p$$

$$AB = p$$

$$r = \frac{i p z}{mz+p}$$

$$BC = \frac{i}{m} p$$

$$s = \frac{2(i-1)}{i+1} \zeta$$

$$CD = (i-1) \zeta$$

$$t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \zeta$$

$$DE = \frac{4(i-1)}{3i-1} \zeta$$

pour le lieu de l'œil $EO = \frac{i+1}{2i} t$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)} \omega$; où il est remarquable que les deux quantités i & ζ sont indépendantes du grossissement m , & de la distance de foyer de l'objectif p , & partant tant les deux verres D & E , que les distances CD , DE , & EO n'en dépendent pas non plus.

XXIV. Pour les ouvertures des verres, celles de l'objectif & du troisième sont déterminées par le degré de clarté, & celles des autres par le champ apparent, de la manière suivante :

Demi-diamètres de l'ouverture des verres

$$AP = x = \frac{m}{60} \text{ ou } \frac{m}{50} \text{ pouces}$$

$$BQ = \frac{2i}{m(i+1)} \omega p$$

$$CR = \frac{i}{m} x = \frac{i}{60} \text{ ou } \frac{i}{50} \text{ pouces}$$

$$DS = \omega s = \frac{2(i-1)}{i+1} \omega \zeta$$

$$ET = \omega t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \omega \zeta$$

où l'on peut prendre $\omega = \frac{1}{4}$, si l'on fait les verres B , D & E également convexes des deux côtés.

XXV. Si l'on vouloit se servir tant d'un objectif ordinaire, que du troisième verre simple, il seroit bon pour diminuer la confusion, de prendre ζ beaucoup plus grand que $\frac{p}{m}$; mais puisque alors la distance de foyer des verres D & E deviendroit assés considérable pour les grandes multiplications, ces verres devroient être trop grands. Il conviendra donc de prendre un milieu, en posant $\zeta =$

$\frac{p}{m}$, & de donner plutôt au verre objectif une plus grande distance de foyer p pour rendre la confusion insensible.

Alors aiant $c = \frac{1}{2}$, on n'aura qu'à déterminer la distance

de foyer de l'objectif par cette formule $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m+8i)}$

pouces, & lui donner une ouverture dont le demidiamètre

$x = \frac{m}{60}$ pouces. Dans ce cas, le troisième verre C devien-

dra aussi également convexe des deux côtés. Or en suppo-

sant la raison de réfraction de l'air dans le verre, comme 1, 54 à 1, il sera bon de former l'objectif en sorte,

que le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 0,60849 p \\ \text{de derrière} = 4,79820 p \end{array} \right.$

Pour les autres verres également convexes des deux côtés,

la distance de foyer étant $= q$, on prendra le rayon de

chaque face $= 1,08q$.

XXVI. Cela posé nous aurons les déterminations suivantes

pour la construction de ces Lunettes, en prenant ω

$= \frac{1}{4}$.

Distance de foyer du verre	Demi-diamètre de l'ouverture	Intervalles entre les verres
$A \dots p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m+8i)}$	$AP = x = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
$B \dots q = \frac{i}{m+i} p$	$BQ = \frac{i}{2(i+1)} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = i \cdot \frac{p}{m}$
$C \dots r = \frac{1}{2} i \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{i}{60}$ pouces	$CD = (i-1) \frac{p}{m}$
$D \dots s = \frac{2(i-1)}{i-1} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{i-1}{2(i+1)} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$
$E \dots t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{i-1}{2(3i-1)} \cdot \frac{p}{m}$	$EO = \frac{ii-1}{i(3i-1)} \cdot \frac{p}{m}$

la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{6i^2 - 3i - 1}{i(3i - 1)} \cdot \frac{p}{m}$

& le demi-diamètre du champ apparent $\phi = \frac{i}{2m(i+1)}$,

qui étant réduit en minutes, donne $\phi = \frac{1718i}{m(i+1)}$ minu-

tes. Or pour que le second verre admette l'ouverture marquée, il faut qu'il soit $m > \frac{2i}{i-1}$.

XXVII. Le nombre i étant encore permis à notre choix à l'égard du champ apparent, il seroit bon de le prendre fort grand, cependant si on l'augmentoît à l'infini, on n'en tireroit que $\phi = \frac{1}{2m}$, & la Lunette deviendrait

à deux égards infiniment longue, puisque la distance de foyer de l'objectif devrait aussi être prise infinie. Mais

prenant $i = 2$, à cause de $\phi = \frac{1}{3m}$, on perd bien dans

le champ la sixième partie, mais la Lunette devient aussi plus courte à un double égard, ce qui est sans doute bien préférable. Si l'on vouloit mettre $i = 3$, on gagneroit tant soit peu sur le champ, mais la Lunette deviendrait assés considérablement plus longue. D'où je conclus qu'il est avantageux de ne pas supposer i plus grand que 2, attendu que si l'on souhaite un plus grand champ, on n'a qu'à ajouter encore un verre, qui l'augmentera de la moitié, pendant qu'en donnant ici au nombre i de plus grandes valeurs, les accroissemens du champ seroient infensibles.

XXVIII. Posons donc $i = 2$, & prenant la distance de foyer de l'objectif $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m + 24)}$ pouces, nous aurons les déterminations suivantes :

Dist. de foyer du verre	Demi-diam. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{3m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30}$ pouc.	$CD = \frac{1}{m} p$
en $D = \frac{2}{3m} p$	$DS = \frac{1}{6m} p$	$DE = \frac{4}{5m} p$
en $E = \frac{2}{5m} p$	$ET = \frac{1}{10m} p$	$EO = \frac{3}{10m} p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{41}{10m} p$,

& le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1}{3m}$ ou de

$\frac{1146}{m}$ minutes, d'où il est aisé de tirer pour chaque multiplication proposée les mesures exprimées en pouces, & d'y régler la construction des Lunettes.

1° *Devis d'une telle Lunette qui grossit 10 fois.*

XXIX. A cause de $m = 10$, nous aurons $p = \frac{15}{2} \sqrt[3]{34} = 24,3$ pouces, prenons donc $p = 25$ pouces, puisqu'il vaut mieux de la prendre plus grande que plus petite, & nous obtiendrons les mesures suivantes en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 25,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 15,21 \\ 119,95 \end{array} \right.$	$AP = 0,17$	$AB = 25,00$
en $B = 4,17$	$4,50$	$BQ = 0,83$	$BC = 5,00$
en $C = 2,50$	$2,70$	$CR = 0,03$	$CD = 2,50$
en $D = 1,67$	$1,80$	$DS = 0,42$	$DE = 2,00$
en $E = 1,00$	$1,00$	$ET = 0,25$	$EO = 9,75$

la longueur de toute la Lunette $AO = 35, 25$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 114' = 1^{\circ}, 54'$.

2° *Devis d'une telle Lunette que grossit 20 fois.*

XXX. La valeur $m = 20$ donne $p = 15 \sqrt[3]{44} = 53$, prenons donc $p = 55$ pouces, & nos mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55, 00$	$\left\{ \begin{array}{l} 33, 47 \\ 263, 90 \end{array} \right.$	$AP = 0, 33$	$AB = 25, 00$
en $B = 5, 00$	$\left\{ \begin{array}{l} 5, 40 \\ 2, 97 \end{array} \right.$	$BQ = 0, 92$	$BC = 5, 50$
en $C = 2, 75$	$\left\{ \begin{array}{l} 2, 97 \\ 1, 98 \end{array} \right.$	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 75$
en $D = 1, 83$	$\left\{ \begin{array}{l} 1, 98 \\ 1, 19 \end{array} \right.$	$DS = 0, 46$	$DE = 2, 20$
en $E = 1, 10$	$\left\{ \begin{array}{l} 1, 19 \\ \end{array} \right.$	$ET = 0, 27\frac{1}{2}$	$EO = 0, 82$
la longueur de toute la Lunette $AO = 66, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 57'$.			

3° *Devis d'une telle Lunette qui grossit 30 fois.*

XXXI. La valeur $m = 30$ donne $p = \frac{45}{2} \sqrt[3]{54} = 85$;
donc

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 88$	$\left\{ \begin{array}{l} 53, 55 \\ 422, 24 \end{array} \right.$	$AP = 0, 50$	$AB = 88, 00$
en $B = 6, 50$	$\left\{ \begin{array}{l} 5, 94 \\ 3, 16 \end{array} \right.$	$BQ = 0, 98$	$BC = 5, 86$
en $C = 2, 93$	$\left\{ \begin{array}{l} 3, 16 \\ 2, 11 \end{array} \right.$	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 93$
en $D = 1, 95$	$\left\{ \begin{array}{l} 2, 11 \\ 1, 26 \end{array} \right.$	$DS = 0, 49$	$DE = 2, 34$
en $E = 1, 17$	$\left\{ \begin{array}{l} 1, 26 \\ \end{array} \right.$	$ET = 0, 29$	$EO = 0, 88$
la longueur de toute la Lunette $AO = 100, 01$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 38'$.			

XXXII. Si les verres objectifs quoique simples étoient si excellens, qu'ils admissent une plus grande ouverture, & qu'ils pûssent être employés à des plus grands grossifsemens, alors on pourroit prendre pour les cas que je viens de développer, des objectifs d'une moindre distance de foyer que je n'ai marqué, & dans ces cas on n'aura qu'à diminuer toutes les mesures dans la même proportion, excepté les ouvertures de l'objectif, & du troisième verre. Or si l'on doubloit le troisième verre de la manière que j'ai indiquée dans le §. XV., pour diminuer la confusion, on pourroit bien donner à l'objectif une moindre distance de foyer, & ensuite conformément diminuer les autres mesures. Je dois encore remarquer que dans l'application à la pratique j'ai pris $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m + 24)}$ au lieu

de $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m + 16)}$, que la position $i = 2$ donne, pour tenir compte de la confusion qui naît des deux verres oculaires, qui fournit à peu-près cet excès, mais on ne sauroit ici rien prescrire de précis, puisque tout dépend de l'adresse de l'Artiste.

XXXIII. Mais si l'Artiste est assez habile pour exécuter les objectifs composés, dont j'ai donné ci-dessus la description (§. XVI.), de sorte que toute confusion puisse être réduite à rien, alors la distance de foyer de l'objectif p se déterminera uniquement par son ouverture, dont le diamètre étant $x = \frac{m}{60}$ pouces, ou même $x = \frac{m}{50}$ pouces, on pourra bien se contenter de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$. Alors pour que le verre oculaire ne devienne pas trop petit, il sera bon de prendre

$c = \frac{3}{4}$, ou $\frac{c}{1-c} = 3$, & alors la confusion du troisième verre contenue dans la formule $\frac{\lambda^2 i}{m c^3}$ ne fera pas trop à craindre, quand même on prendroit ce verre simple, & également convexe des deux côtés, sur tout en supposant comme auparavant $i = 2$, la construction de l'objectif étant telle, qu'en approchant ou éloignant d'avantage les deux verres dont il est composé, cette confusion avec celle des autres puisse être anéantie.

XXXIV. Posant donc $p = \frac{m}{2}$ pouces, $c = \frac{2}{4}$ & $i = 2$, nous aurons les mesures suivantes pour la construction de ces Lunettes :

Dist. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{6}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{3}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = \frac{3}{2}$
en $D = s = 1$	$DS = \frac{1}{4}$	$DE = \frac{6}{5}$
en $E = t = \frac{3}{5}$	$ET = \frac{3}{20}$	$EO = \frac{9}{20}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 4 \frac{3}{20}$ pouces, le demi-diamètre du champ apparent étant $= \frac{1146}{m}$ minutes.

XXXV. De là il est clair que nous pouvons bien donner à $\frac{c}{1-c}$ une valeur plus grande, & poser $c = \frac{6}{7}$,
&

& alors rien n'empêche qu'on ne prenne $i = 3$ pour augmenter un peu le champ apparent. Or ces positions nous fournissent les mesures suivantes :

Dist. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$
en $C = r = \frac{9}{7}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 6$
en $D = s = 3$	$DS = \frac{3}{4}$	$DE = 3$
en $E = t = \frac{3}{2}$	$ET = \frac{3}{8}$	$EO = 1$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 11 \frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1289}{m}$ minutes.

Cette hypothèse paroît de beaucoup préférable à la précédente, parceque tous les verres ont ici plus d'un pouce de foyer, & causent par conséquent une d'autant plus petite confusion, & celle du troisième pouvant être détruite par la construction de l'objectif enseignée dans le §. XVI.

XXXVI. Au reste je ne dois pas oublier de faire observer un très-grand avantage, que le troisième verre procure à cette espèce de Lunettes par la très-petite ouverture, que ce verre admet sans que le champ apparent en soit diminué. Car cette petite ouverture est le moyen le plus propre d'exclure les rayons étrangers, & il est sans doute beaucoup plus efficace que les diaphragmes, dont on se sert ordinairement dans cette vue; car on est obligé de les placer dans les lieux où les images sont représentées, &

partant leurs trous ne fauroient être plus petits que les images mêmes. Or comme le second verre QBQ se trouve précisément dans le lieu de la première image, il tient lieu d'un tel diaphragme, mais son ouverture qui répond au trou du diaphragme, est beaucoup plus grande que celle du troisième verre. Par cette raison il est bon de ne donner à ce verre que la petite ouverture, que je lui viens d'assigner, quoiqu'à d'autres égards une plus grande ne causeroit aucun inconvénient.

Des Lunettes de cette espèce à 6 verres.

XXXVII. Je marquerai les distances de foyer de nos six verres par les lettres p, q, r, s, t & u , & les demi-diamètres de leurs ouvertures :

$$AP=x, BQ=\pi q, CR=\pi' r, DS=\pi'' s, ET=\pi''' t, FU=\pi'''' u;$$

puisque le diamètre du champ est $\phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi''''}{m-1}$

le grossissement étant $= m$, posons :

$$\pi = \beta \omega, \pi' = 0, \pi'' = -\omega, \pi''' = \omega \text{ \& } \pi'''' = -\omega$$

pour avoir $\phi = \frac{-\beta + 3}{m-1} \omega$ ou bien $\phi = M\phi$, en posant

$$M = \frac{3-\beta}{m-1}. \text{ Ensuite soit:}$$

$$B = -1, C = \frac{c}{1-c}, D = -\frac{d}{1+d}, E = -1, F = \infty$$

$$B = \infty, C = c, D = -d, E = \infty, F = 1$$

& posons les formules, qui en sont formées :

$$Q = B\pi - \phi = \infty\pi$$

$$R = C\pi' - \pi + \phi = -(\beta - M)\omega$$

$$S = D\pi'' - \pi' + \pi - \phi = (d + \beta - M)\omega$$

$$T = E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi = \infty$$

$$U = F\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \phi = -(3 - \beta + M)\omega$$

XXXVIII. Cela posé, les déterminations tant des distances de foyer que des intervalles des verres seront

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{B^\phi}{Q} P & AB &= P \\
 r &= B \cdot \frac{C^\phi}{R} P & BC &= B \phi \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R} \right) P \\
 s &= BC \cdot \frac{D^\phi}{S} P & CD &= BC \phi \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S} \right) P \\
 t &= BCD \cdot \frac{E^\phi}{T} P & DE &= BCD \phi \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{T} \right) P \\
 u &= BCDE \cdot \frac{F^\phi}{U} P & EF &= BCDE \phi \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U} \right) P
 \end{aligned}$$

& pour le lieu de l'œil $FO = \frac{1}{mM} u$; mais la destruction des couleurs d'iris exige cette condition :

$$\frac{\pi}{Q} + \frac{\pi'}{R} + \frac{\pi''}{S} + \frac{\pi'''}{T} + \frac{\pi''''}{U} = 0$$

qui se réduit à celle-ci : $-\frac{1}{S} - \frac{1}{U} = 0$ ou $S = -U$
 d'où nous tirons $d + \beta - M = 3 - \beta + M$, & $d = 3 - 2(\beta - M)$.

XXXIX. Soit maintenant $\beta = (n + 1)M$, de sorte que $M = \frac{3}{m+n}$, & $\beta - M = nM$. Or posons d'abord

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{m}{i}, \text{ de sorte que } M = \frac{3^i}{m(i+1)}, \beta - M = \frac{3}{i+1}, \\
 d &= \frac{3(i-1)}{i+1}, \text{ \& } U = -\frac{3^i}{i+1} \omega, \text{ donc } S = \frac{3^i}{i+1} \omega,
 \end{aligned}$$

& puisque $\beta = \frac{3(m+i)}{m(i+1)}$, nous aurons :

$$\frac{B^\phi}{Q} = \frac{M}{\beta} = \frac{i}{m+i}, \quad R = -\frac{3}{i+1} \omega, \quad \frac{\phi}{R} = -\frac{i}{m}$$

$\frac{\varphi}{S} = \frac{1}{m}$, $\frac{\varphi}{T} = 0$; or $\frac{C\varphi}{T} = \frac{3i}{m(i+1)}$, & $\frac{\varphi}{U} = \frac{1}{m}$, d'où nous tirons les déterminations suivantes :

$$q = \frac{i}{m+i} P$$

$$AB = p$$

$$r = \frac{ci}{m} P$$

$$BC = \frac{i}{m} p$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m}$$

$$CD = \frac{c}{1-c} (i-1) \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$$

$$DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$$

$$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $FO = \frac{i+1}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{m(i+1)} \omega$.

XL. Quand on se sert d'un objectif simple, en faisant les rayons des faces $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 0, 60849 p \\ \text{de derrière} = 4, 79820 p \end{array} \right.$, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{i}{c})}$ pouces. Je m'en vais donc développer les hypothèses suivantes :

1^{re} Hypothèse $i = 2$ & $c = \frac{1}{2}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+20)}$	$AP = \frac{m}{60} p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{2m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = r = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30} p$	$CD = \frac{1}{m} p$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $D=s=\frac{1}{m}p$	$DS = \frac{1}{4m}p$	$DE = \frac{1}{2m}p$
en $E=t=\frac{1}{m}p$	$ET = \frac{1}{4m}p$	$EF = \frac{1}{2m}p$
en $F=u=\frac{1}{2m}p$	$FU = \frac{1}{8m}p$	$FG = \frac{1}{4m}p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{17}{4m}p$, &

le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{1}{2m}$ ou bien $\phi = \frac{1718}{m}$
minutes.

2^{de} Hypothèse $i = 3$ & $c = \frac{2}{3}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A=p=\frac{3}{4}m\sqrt{(m+15)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B=q=\frac{3}{m+3}p$	$BQ = \frac{9}{16m}p$	$BC = \frac{3}{m}p$
en $C=r=\frac{2}{m}p$	$CR = \frac{1}{20}p$	$CD = \frac{4}{m}p$
en $D=s=\frac{3}{m}p$	$DS = \frac{3}{4m}p$	$DE = \frac{6}{5m}p$
en $E=t=\frac{27}{10m}p$	$ET = \frac{27}{40m}p$	$EF = \frac{6}{5m}p$
en $F=u=\frac{6}{5m}p$	$FU = \frac{3}{10m}p$	$FO = \frac{8}{15m}p$

donc la longueur de toute la Lunette $AO = p + \frac{149}{15m}p$,

& le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{9}{16m}$ ou bien $\phi =$

$\frac{1933}{m}$ minutes.

XLI. Mais quand on veut employer un verre objectif composé, dont j'ai donné la description ci-dessus (16), de sorte qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, on peut se régler sur l'une des hypothèses suivantes :

1^{re} Hypothèse $i = 2$ & $c = \frac{4}{5}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{4}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{4}{5}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = 2$
en $D = s = 2$	$DS = \frac{1}{2}$	$DE = 1$
en $E = t = 2$	$ET = \frac{1}{2}$	$EF = 1$
en $F = u = 1$	$FU = \frac{1}{4}$	$FO = \frac{1}{2}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 5 \frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{1}{2m}$, ou $\phi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2^{de} Hypothèse $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouces	$AB = \frac{m}{2}$
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $C = r = \frac{5}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 5$
en $D = s = \frac{15}{4}$	$DS = \frac{15}{16}$	$DE = \frac{3}{2}$
en $E = t = \frac{27}{8}$	$ET = \frac{27}{32}$	$EF = \frac{3}{2}$
en $F = u = \frac{3}{2}$	$FU = \frac{3}{8}$	$FO = \frac{2}{3}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 10 \frac{1}{6}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{9}{16m}$ ou $\phi = \frac{1933}{m}$ minutes. Si ces Lunettes réussissoient, on les pourroit regarder comme les plus parfaites dans leur espèce.

Des Lunettes de cette espèce à 7 verres.

XLII. Les distances de foyer de nos 7 verres étant marquées par les lettres $p, q, r, s, t, u,$ & $v,$ & les demi-diamètres de leurs ouvertures :

$AP = x, BQ = \pi q, CR = \pi' r, DS = \pi'' s,$
 $ET = \pi''' t, FU = \pi^v u, GV = \pi^v v,$ puisque le demi-

diamètre du champ est $\phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^v + \pi^v}{m - 1}$

posons $\pi = \beta \omega, \pi' = 0, \pi'' = -\omega, \pi''' = \omega, \pi^v = -\omega,$

& $\pi^v = +\omega,$ pour avoir $\phi = \frac{-\beta + 4}{m - 1} \omega,$ ou $\phi =$

$M\omega,$ en posant $M = \frac{4 - \beta}{m - 1}.$ Soient ensuite:

$$E = -1, C = \frac{c}{1-c}, D = \frac{-d}{1+c},$$

$$B = \infty, C = c, D = -d,$$

$$E = \frac{-e}{1-c}, F = \frac{-f}{f-1}, G = \infty,$$

$$E = -c, F = f, G = 1;$$

d'où nous tirons les valeurs suivantes :

$$Q = B\pi - \omega = B\beta\omega$$

$$R = C\pi' - \pi + \phi = -(\beta - M)\omega$$

$$S = D\pi'' - \pi' + \pi - \phi = (d + \beta - M)\omega$$

$$T = E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi = -(e - 1 + \beta - M)\omega$$

$$U = F\pi^{iv} - \pi^{iii} + \pi'' - \pi' + \pi - \phi = (f + 2 - \beta + M)\omega$$

$$V = G\pi^v - \pi^{iv} + \pi^{iii} - \pi'' + \pi' - \pi + \phi = (4 - \beta + M)\omega$$

XLIII. De là la destruction des couleurs donne :

$$-S + T - U + V = 0$$

pour satisfaire à cette équation, puisque $-T > S$, & $-U > V$, posant $S = V$, & $-T = -U = \zeta V$, ou $\zeta > 1$.

Soit pour abréger $\beta = (1 + n)M$, de sorte que $\beta -$

$$M = nM \text{ \& } M = \frac{4}{m+n}, \text{ \& soit } n = \frac{m}{1}, \text{ pour avoir}$$

$$M = \frac{4i}{m(i+1)}, \beta - M = \frac{4}{i+1} \text{ \& } \beta = \frac{4(m+i)}{m(i+1)}$$

là nous aurons :

$$V = \frac{4i}{i+1}, S = (d + \frac{4}{i+1})\omega = \frac{4i}{i+1}, \text{ donc } d = \frac{4(i-1)}{i+1}$$

$$-T = (e - 1 + \frac{4}{i+1})\omega = \frac{4\zeta i}{i+1} \omega, \text{ donc } e = \frac{(4\zeta + 1)i - 3}{i+1}$$

$$-U = (f + 2 - \frac{4}{i+1})\omega = \frac{4\zeta i}{i+1} \omega, \text{ donc } f = \frac{(4\zeta - 2)i + 2}{i+1}$$

$$\text{Ensuite, } R = -\frac{4}{i+1}\omega, \text{ \& } Q = \frac{B \cdot 4(m+i)}{m(i+1)}, \text{ d'où nous}$$

tirons les valeurs suivantes :

$$\frac{Q}{2} =$$

$$\frac{\circ}{Q} = 0, \frac{B\circ}{Q} = \frac{i}{m+i}, \frac{\circ}{R} = -\frac{i}{m}, \frac{\circ}{S} = \frac{i}{m}, \frac{\circ}{T} = -\frac{i}{\zeta m} = \frac{\circ}{U}, \& \frac{\circ}{V} = \frac{i}{m}.$$

XLIV. De là résultent les déterminations suivantes :

$$\begin{aligned} q &= \frac{i}{m+i} p, & AB &= p, \\ r &= ci \cdot \frac{p}{m}, & BC &= i \cdot \frac{p}{m}, \\ s &= \frac{c}{1-c} \cdot d \cdot \frac{p}{m}, & CD &= \frac{c}{1-c} (i-1) \frac{p}{m}, \\ t &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot e \cdot \frac{p}{\zeta m}, & DE &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m}, \\ u &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot f \cdot \frac{p}{\zeta m}, \\ EF &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{2}{\zeta} \cdot \frac{p}{m}, \\ v &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{p}{m}, \\ FG &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m}, \end{aligned}$$

& pour le lieu de l'œil $GO = \frac{i+1}{4^i} v$, le demi-diamètre du champ apparent étant $\phi = \frac{4^i}{m(i+1)} \omega$, où pour les hypothèses $i = 2$ & $i = 3$, il est bon de marquer les valeurs des lettres d, e & f .

$$1^\circ i = 2, d = \frac{4}{3}, e = \frac{8\zeta-1}{3}, f = \frac{8\zeta-2}{3}, \phi = \frac{8}{3m}\omega$$

$$2^\circ i = 3, d = 2, e = 3\zeta, f = 3\zeta-1, \phi = \frac{\zeta}{m}\omega.$$

XLV. Soit donc pour la première hypothèse $i = 2$ & $\zeta = 2$, de sorte que $e = 5$, & $f = \frac{14}{3}$, & nous aurons les déterminations suivantes:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{2}{m+2} p, & BQ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}, & AP &= p, \\
 r &= 2c \cdot \frac{p}{m}, & CR &= \frac{1}{30} \text{pouc.}, & BC &= 2 \cdot \frac{p}{m}, \\
 s &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{m}, & DS &= \frac{1}{4} s, & CD &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}, \\
 t &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}, & ET &= \frac{1}{4} t, & DE &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{p}{m}, \\
 u &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{p}{m}, & FU &= \frac{1}{4} u, & EF &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{p}{m}, \\
 v &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{20}{33} \cdot \frac{p}{m}, & GU &= \frac{1}{4} v, & FG &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{33} \cdot \frac{p}{m}.
 \end{aligned}$$

Pour le lieu de l'œil $GO = \frac{3}{8} v$, & le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{2}{3} m$, ou bien $\phi = \frac{2291}{m}$ minutes.

XLVI. L'autre hypothèse $i = 3$, en prenant $\zeta = \frac{8}{3}$, de sorte que $e = 8$, & $f = 7$ donne les déterminations suivantes :

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{3}{m+3} p, & BQ &= \frac{3}{4m} p, & AB &= p \\
 r &= c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, & CR &= \frac{1}{20}, & BC &= 3 \cdot \frac{p}{m} \\
 s &= \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}, & DS &= \frac{1}{4} s, & CD &= \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m} \\
 t &= \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}, & ET &= \frac{1}{4} t, & DE &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m} \\
 u &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}, & FU &= \frac{1}{4} u, & EF &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m} \\
 v &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}, & GV &= \frac{1}{4} v, & FG &= \frac{c}{1-c} \cdot \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}
 \end{aligned}$$

& pour le lieu de l'œil $GO = \frac{1}{3} v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$,

& le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3}{4m} \varphi$ ou $= \frac{123}{m}$

minutes, où il faut au moins prendre $\frac{c}{1-c} = 2$, & $c = \frac{2}{3}$, pour prévenir une trop grande confusion de la part du troisiéme verre, d'où les verres oculaires deviendront passablement grands.

XLVII. Ici on peut encore considérer deux cas, selon qu'on se sert d'un objectif simple ou composé, propre à détruire toute confusion. Dans le premier cas d'un verre objectif ordinaire, il faut prendre pour l'hypothèse $i = 2$,

$$p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{\left(m + \frac{2}{c^3}\right)}, \text{ \& partant :}$$

si l'on pose $c = \frac{1}{2}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{\left(m + 16\right)}$, ou

si l'on pose $c = \frac{3}{5}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{\left(m + 9\right)}$.

Dans l'autre hypothèse $i = 3$, en prenant $c = \frac{2}{3}$, il faut

mettre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{\left(m + 11\right)}$, & je ne voudrois pas

prendre $\frac{c}{1-c}$ plus grand, de peur que les oculaires ne

düssent être trop grands. Or quand on se sert d'un verre

objectif composé, de sorte qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$

pouces, à cause de $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$, si voudrois poser dans l'une

& l'autre hypothèse $c = \frac{3}{4}$, afin que le dernier oculaire

ait environ un pouce de foyer. D'où il est aisé de tirer

des devis pour tous les grossissemens, qu'on souhaitera.

Des Lunettes de cette espèce à 8 verres.

XLVIII. Posant les distances de foyer de nous 8 verres p, q, r, s, t, u, v & w , & les demi-diamètres de leurs ouvertures :

$$AP = x, BQ = \pi q, CR = \pi' r, DS = \pi'' s, \\ ET = \pi''' t, FU = \pi^{iv} u, GV = \pi^v v, HW = \pi^{vi} w, \\ \text{puisque le demi-diamètre du champ apparent est } \phi = \\ \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{iv} + \pi^v - \pi^{vi}}{m - 1}, \text{ supposons}$$

$$\pi = \beta \omega, \pi' = 0, \pi'' = -\omega, \pi''' = \omega, \pi^{iv} = -\omega, \\ \pi^v = \omega, \pi^{vi} = -\omega,$$

$$\text{pour avoir } \phi = \frac{-\beta + \gamma}{m - 1} \omega, \text{ ou bien } \phi = M \omega, \text{ po-}$$

sant $M = \frac{\gamma - \beta}{w - 1}$. Ensuite donnons aux indices des verres les valeurs suivantes :

$$B = -1, C = \frac{c}{1 - c}, D = \frac{-d}{1 + d},$$

$$B = \infty, C = c, D = -d,$$

$$E = \frac{-e}{1 + e}, F = -1, G = \frac{-g}{g - 1}, H = \infty,$$

$$E = -e, F = \infty, G = g, H = 1,$$

& de là formons les expressions suivantes :

$$Q = B \pi - \phi = B \beta \omega, \text{ à cause de } B = \infty,$$

$$R = C \pi' - \pi + \phi = -(\beta - M) \omega,$$

$$S = D \pi'' - \pi' + \pi - \phi = +(d + \beta - M) \omega,$$

$$T = E \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi = -(c - 1 + \beta - M) \omega,$$

$$U = F \pi^{iv} - \pi^{v} + \pi^{vi} - \pi^{v} + \pi - \phi = -F \omega, \text{ à cause de } F = \infty,$$

$$V = G \pi^v - \pi^{vi} + \pi^{vi} - \pi^{vi} + \pi' - \pi + \phi = +(g + 3 - \beta + M) \omega,$$

$$W = H \pi^{vi} - \pi^{vi} + \pi^{vi} - \pi^{vi} + \pi' - \pi - \phi = -(5 - \beta + M) \omega,$$

XLIX. Cela posé la destruction des couleurs fournit cette équation :

$$-\frac{\omega}{S} + \frac{\omega}{T} + \frac{\omega}{V} - \frac{\omega}{W} = 0,$$

à la quelle je satisfierai en posant $S = -W$ & $-T =$

$$V = -\zeta W. \text{ Soit ensuite comme ci-dessus } M = \frac{5^i}{m(i+1)},$$

$$\beta - M = \frac{5}{i+1} \text{ \& } \beta = \frac{5(m+i)}{m(i+1)}, \text{ d' où nous tirons :}$$

$$W = -\frac{5^i}{i+1} \omega, S = (d + \frac{5}{i+1})\omega = \frac{5^i}{i+1} \omega, \text{ donc } d = \frac{5(i-1)}{i+1}$$

$$-T = (e - \frac{i+4}{i+1})\omega = \frac{5\zeta^i}{i+1} \omega, \text{ donc } e = \frac{(5\zeta+1)i-4}{i+1}$$

$$V = (g + \frac{3i-2}{i+1})\omega = \frac{5\zeta^i}{i+1} \omega, \text{ donc } g = \frac{(5\zeta-3)i+2}{i+1}$$

$$\text{ensuite } R = -\frac{5}{i+1} \omega \text{ \& } Q = B \cdot \frac{5(m+i)}{m(i+1)}, \text{ \& après}$$

$$\frac{\phi}{Q} = 0, \frac{B\phi}{Q} = \frac{i}{m+i}, \frac{\phi}{R} = -\frac{i}{m}, \frac{\phi}{S} = \frac{1}{m}, \frac{\phi}{T} = -$$

$$\frac{1}{\zeta^m}, \frac{\phi}{U} = 0, \text{ or } \frac{F\phi}{U} = -\frac{5^i}{m(i+1)}, \frac{\phi}{V} = \frac{1}{\zeta^m} \text{ \& } \frac{\phi}{W} = -\frac{1}{m},$$

d' où nous trouvons les déterminations suivantes :

$$q = \frac{1}{m+1} p, \quad AB = p,$$

$$r = ci \cdot \frac{p}{m}, \quad BC = i \cdot \frac{p}{m},$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot d \cdot \frac{p}{m}, \quad CD = \frac{c}{1-c} (i-1) \cdot \frac{p}{m},$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{\zeta} \cdot \frac{p}{m}, \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+c} \cdot \frac{5^i}{i+1} \cdot \frac{p}{m},$$

$$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+c} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{g-1} \cdot \frac{p}{m},$$

$$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{1-g} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l'œil la distance $HO = \frac{i+1}{5i} w$, le

demi-diamètre du champ étant $\varphi = \frac{5i}{m(i+1)} \omega$.

L. Considérons ici trois hypothèses, puisqu'il vaut bien la peine examiner aussi le cas $i = 4$.

1° Si $i = 2$, on aura $d = \frac{5}{3}$, $e = \frac{10\zeta-2}{3}$,

$$g = \frac{10\zeta-4}{3}, \quad \varphi = \frac{10}{3m} \omega.$$

2° Si $i = 3$, on aura $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{15\zeta-1}{4}$,

$$g = \frac{15\zeta-7}{4}, \quad \varphi = \frac{15}{4m} \omega.$$

3° Si $i = 4$, on aura $d = 3$, $e = 4\zeta$,

$$g = 4\zeta-2, \quad \varphi = \frac{4}{m} \omega,$$

où la valeur de ζ doit être prise en sorte, qu'aucune des distances entre les verres ne devienne trop petite, & cette condition est très-bien remplie en posant $\zeta = 2$; donc si nous mettons ensuite $\omega = \frac{1}{4}$, nous aurons dans nos trois hypothèses:

$$1^{\circ} \text{ Si } i = 2, d = \frac{5}{3}, e = 6, g = \frac{16}{3},$$

$$\varphi = \frac{5}{6m}, \text{ ou } \varphi = \frac{2864}{m} \text{ min.}$$

$$2^{\circ} \text{ Si } i = 3, d = \frac{5}{2}, e = \frac{29}{4}, g = \frac{23}{4},$$

$$\varphi = \frac{15}{16m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3222}{m} \text{ min.}$$

$$3^{\circ} \text{ Si } i = 4, d = 3, e = 8, g = 6,$$

$$\varphi = \frac{1}{m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3437}{m} \text{ min.}$$

1^{re} Hypothèse $i = 2$ & $\zeta = 2$.

LI. Dans cette hypothèse si l'on se sert d'un objectif simple, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c})}$. Mais si l'on est pourvu d'un objectif composé, on pourra prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Dans l'un & l'autre cas les déterminations seront :

$$q = \frac{2}{m+2} p, \quad BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m} \quad AB = p$$

$$r = c \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}, \quad CR = \frac{1}{30} \text{ pouc. } BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{p}{m}, \quad DS = \frac{1}{4} s \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{p}{m}, \quad ET = \frac{1}{4} t \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{25}{14} \cdot \frac{p}{m}, \quad FU = \frac{1}{4} u \quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}, \quad GV = \frac{1}{4} v \quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{60}{91} \cdot \frac{p}{m}, \quad HW = \frac{1}{4} w \quad GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{30}{91} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $HO = \frac{3}{10} w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{18}{91} \cdot \frac{p}{m}$,
 le demi-diamètre du champ étant de $\frac{2864}{m}$ minutes.

LII. Quand on se sert d'un objectif composé, il con-
 viendra de prendre $c = \frac{3}{4}$; mais n'en employant qu'un or-

dinaire, je voudrais prendre $c = \frac{3}{5}$ ou $\frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}$,

& on aura les mesures suivantes :

Distances de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m+10)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{6}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{15}{32} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{45}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{45}{64} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{75}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{75}{112} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{15}{7} \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{15}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{45}{91} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{90}{91} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{45}{182} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{27}{91} \cdot \frac{p}{m}$

qu'on appliquera aisément à chaque cas proposé.

2^{de} Hypothèse $i = 3$ & $\zeta = 2$.

LIII. En se servant d'un objectif simple il faut pren-
 dre $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m + \frac{3}{c})}$, pendant que la distance de

foyer

foyer d'un objectif composé, peut être prise $p = \frac{m}{2}$ pouces. En voici les déterminations pour l'un & l'autre cas:

$$\begin{array}{ll}
 q = \frac{3}{m+3} p & BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}, AB = p \\
 r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m} & CR = \frac{1}{20} \text{pouc.}, BC = 3 \frac{p}{m} \\
 s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m} & DS = \frac{1}{4} s, CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m} \\
 t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{56} \cdot \frac{p}{m} & \&c. DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{p}{m} \\
 u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{725}{308} \cdot \frac{p}{m} & EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m} \\
 v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{1848} \cdot \frac{p}{m} & FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m} \\
 w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m} & GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{8778} \cdot \frac{p}{m}
 \end{array}$$

Pour le lieu de l'œil $HO = \frac{4}{15} w$ & $\phi = \frac{3^{222}}{m}$ minutes.

LIV. Quand on se sert d'un objectif composé, où $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$ pouce, on prendra commodement $c = \frac{3}{4}$, mais en employant un objectif simple, je supposerai $c = \frac{2}{3}$, & on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m+12)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$ pouc.	$CD = 4 \cdot \frac{p}{m}$

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Interval. entre les verres
en $D = s = 5 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{5}{7} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{145}{28} \cdot \frac{p}{m}$	&c.	$EF = \frac{145}{231} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{725}{154} \cdot \frac{p}{m}$		$FG = \frac{145}{237} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{3335}{924} \cdot \frac{p}{m}$		$GH = \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{6670}{4389} \cdot \frac{p}{m}$		$HO = \frac{5336}{13167} \cdot \frac{p}{m}$

La seule difficulté qu'on rencontrera dans l'exécution, se trouvera dans la grandeur des verres oculaires, dont l'ouverture peut passer plusieurs pouces dans les grands grossifemens,

3^{me} Hypothèse $i = 4$ & $\zeta = 2$.

LV. Lorsque l'objectif est simple, il faut prendre sa distance de foyer $p = \frac{3}{4} m \sqrt{m + \frac{4}{c}}$ pouces, pendant que pour un composé il suffiroit de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Les autres déterminations sont :

$$q = \frac{-4}{m+4} p, \quad BQ = \frac{p}{m}, \quad AB = p$$

$$r = c \cdot 4 \cdot \frac{p}{m}, \quad CR = \frac{1}{15} \text{ pouc. } BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, \quad DS = \frac{1}{4} s, \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}, \quad \&c. \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}, \quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m},$$

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m},$$

$$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$$

Pour le lieu de l'œil la distance $HO = \frac{1}{4} w = \frac{c}{1-c} \times$

$\frac{1}{5} \times \frac{p}{m}$, le demidiamentre du champ apparent étant $\phi =$

$\frac{1}{m}$, ou $\phi = \frac{3437}{m}$ minutes.

LVI. Quand on se sert d'un objectif composé, on pourra bien prendre $c = \frac{3}{4}$, sans que les verres deviennent trop grands, mais pour les objectifs ordinaires il vaudra mieux d'augmenter la distance de foyer p , que d'admettre de trop grands oculaires; je poserais donc $c = \frac{1}{2}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{2}{4} m \sqrt{(m+32)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{4}{m+4} p$	$BQ = \frac{p}{m}$	$BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{15}$ pouc.	$CD = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Donc la longueur de la Lunette $AO = p + 8 \frac{77}{120} \times \frac{p}{m}$; d'où je tirerai les devis suivans pour la pratique.

LVII. Mais j'observe avant toutes choses que dans le cas de huit verre les deux premières hypothèses, où $i = 2$ & $i = 3$ ne sauroient avoir lieu dans la pratique, puisque le second verre B devoit avoir une ouverture, dont le demi-diamètre surpassât la quatrième partie de sa distance de foyer. Ce même inconvénient a bien encore lieu dans la troisième hypothèse, mais dès que le grossissement est considérable, la quantité BQ surpasse si peu $\frac{1}{4} q$, que la figure du verre pourroit bien admettre une telle ouverture. Supposons que ce verre puisse souffrir une ouverture dont le demi-diamètre $BQ = \frac{1}{3} q$, & nous aurons $\frac{p}{m} = \frac{4}{3(m+4)} p$, donc $m = 12$, ou dès que le grossissement m surpasse 12, l'exécution sera possible. Il en est de même des Lunettes à 7 verres, où l'hypothèse $i = 2$ ne sauroit avoir lieu, & posant $i = 3$, il faut que le grossissement m surpasse 9 pour que le demi-diamètre de l'ouverture BQ devienne plus petit que le tiers de la distance de foyer q . Or dans le cas de 6 verres l'hypothèse $i = 2$ n'a lieu que lorsque $m > 6$, mais l'autre $i = 3$ donne toujours $BQ < \frac{1}{3} q$, & même $BQ < \frac{1}{4} q$, si $m > 9$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 15 fois.

LVIII. Il faudra bien prendre $p = 40$ pouces, & alors les mesures seront exprimées en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 40,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 24,34 \\ 191,93 \end{array} \right.$	0,25	$AB = 40,00$
en $B = 8,42$	9,09	2,67	$BC = 10,67$
en $C = 5,33$	5,76	0,07	$CD = 8,00$
en $D = 8,00$	8,64	2,00	$DE = 1,00$
en $E = 8,00$	8,64	2,00	$EF = 0,89$
en $F = 7,11$	7,68	1,78	$FG = 0,89$
en $G = 5,33$	5,76	1,33	$GH = 1,07$
en $H = 2,13$	2,30	0,53	$HO = 0,53$

la longueur de toute la Lunette $AO = 63,05$.

le demi-diamètre du champ apparent = $3^{\circ}, 49'$

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 25 fois.

LIX. On prendra $p = 75$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m}$

= 3 pouces, & on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 75,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 45,64 \\ 359,87 \end{array} \right.$	0,42	$AB = 75,00$
en $B = 10,34 \frac{1}{2}$	11,17	3,00	$BC = 12,00$
en $C = 6,00$	6,48	0,07	$CD = 9,00$
en $D = 9,00$	9,72	2,25	$DE = 1,12 \frac{1}{2}$
en $E = 9,00$	9,72	2,25	$EF = 1,00$
en $F = 8,00$	8,64	2,00	$FG = 1,00$
en $G = 6,00$	6,48	1,50	$GH = 1,20$
en $H = 2,40$	2,59	0,60	$HO = 0,60$

la longueur de toute la Lunette $AO = 106, 92 \frac{1}{2}$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2^{\circ} 17'$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 50 fois.

LX. On prendra $p = 166 \frac{2}{3}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{10}{3}$ pouces, & on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 166, 67$	$\left\{ \begin{array}{l} 101, 42 \\ 799, 70 \end{array} \right.$	0, 83	$AB = 166, 67$
en $B = 12, 34$	13, 33	3, 33	$BC = 13, 33$
en $C = 6, 67$	7, 20	0, 07	$CD = 10, 00$
en $D = 10, 00$	10, 80	2, 50	$DE = 1, 25$
en $E = 10, 00$	10, 80	2, 50	$EF = 1, 11$
en $F = 8, 89$	9, 60	2, 22	$FG = 1, 11$
en $G = 6, 67$	7, 20	1, 67	$GH = 1, 33$
en $H = 2, 67$	2, 88	0, 67	$HO = 0, 67$
la longueur de toute la Lunette $AO = 195, 47$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^{\circ}, 8'$.			

LXI. Comme la grandeur des verres pourroit arrêter l'exécution, en cas qu'on veuille se contenter d'un moindre champ qui surpasse pourtant encore le double de celui, qu'offrent les Lunettes ordinaires, les plus commodes de ces fortes de Lunettes semblent celles qui contiennent 6 verres, où posant $i = 3$, je prendrai $c = \frac{1}{2}$ pour éviter de grands verres, ce qui fournit ces déterminations.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A=p=\frac{3}{4}m\sqrt{(m+24)}$	$AP=\frac{m}{60}$ pouc.	$AB=p$
en $B=q=\frac{3}{m+3}p$	$BQ=\frac{9}{16}\cdot\frac{p}{m}$	$BC=3\frac{p}{m}$
en $C=r=\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{m}$	$CR=\frac{1}{20}$	$CD=2\frac{p}{m}$
en $D=s=\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{m}$	$DS=\frac{3}{8}\cdot\frac{p}{m}$	$DE=3\frac{p}{5}\cdot\frac{p}{m}$
en $E=t=\frac{27}{20}\cdot\frac{p}{m}$	$ET=\frac{21}{80}\cdot\frac{p}{m}$	$EF=3\frac{p}{5}\cdot\frac{p}{m}$
en $F=u=\frac{3}{5}\cdot\frac{p}{m}$	$FU=\frac{3}{20}\cdot\frac{p}{m}$	$FO=4\frac{p}{15}\cdot\frac{p}{m}$

& le demi-diamètre du champ apparent = $\frac{1933}{m}$ minutes.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 10 fois.

LXII. On prendra ici $p=25$ pouces, de sorte que

$\frac{p}{m}=\frac{5}{2}$ pouces, & on aura les mesures suivantes.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A=25,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 15,11 \\ 119,95 \end{array} \right.$	0,17	$AB=25,00$
en $B=5,77$	6,23	1,40	$BC=7,50$
en $C=3,75$	4,05	0,05	$CD=5,00$
en $D=3,75$	4,05	0,94	$DE=1,50$
en $E=3,37\frac{1}{2}$	$3,64\frac{1}{2}$	0,84	$EF=1,50$
en $F=1,50$	1,62	0,38	$FO=0,67$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO=41,17$ pouces,
& le demi-diamètre du champ apparent $3^{\circ}13'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 15 fois.

LXIII. Je prendrai $p = 40$, d'où $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & les

mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 40, 00$	24, 34 191, 93	0, 25	$AB = 40, 00$
en $B = 6, 67$	7, 20	1, 50	$BC = 8, 00$
en $C = 4, 00$	4, 32	0, 05	$CD = 5, 33$
en $D = 4, 00$	4, 32	1, 00	$DE = 1, 60$
en $E = 3, 60$	3, 89	0, 90	$EF = 1, 60$
en $F = 1, 60$	1, 73	0, 40	$FO = 0, 71$

la longueur de toute la Lunette $AO = 57, 24$ pouces,
& le demi-diamètre du champ apparent $= 2^{\circ}, 9$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 20 fois.

LXIV. Je prendrai $p = 55$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$,

& les mesures sont :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = 55, 00$	33, 46 263, 90	0, 33	$AB = 55, 00$
en $B = 7, 18$	7, 75	1, 55	$BC = 8, 25$
en $C = 4, 12 \frac{1}{2}$	4, 45	0, 05	$CD = 5, 50$
en $D = 4, 12 \frac{1}{2}$	4, 45	1, 03	$DE = 1, 65$
en $E = 3, 71$	4, 05	0, 93	$EF = 1, 65$
en $F = 1, 65$	1, 78	0, 41	$FO = 0, 73$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72, 78$, & le
demi-diamètre du champ apparent $= 1^{\circ}, 36'$.

Devis

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 25 fois.

LXV. Je prendrai ici $p = 70$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, &

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 70,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 42,59 \\ 335,87 \end{array} \right.$	0,42	$AB = 70,00$
en $B = 7,50$		1,57	$BC = 8,40$
en $C = 4,20$	4,54	0,05	$CD = 5,60$
en $D = 4,20$	4,54	1,05	$DE = 1,68$
en $E = 3,78$	4,09	0,95	$EF = 1,68$
en $F = 1,68$	1,81	0,42	$FO = 0,75$
la longueur de toute la Lunette $AO = 88,11$, & le demi-diamètre du champ apparent = $1^{\circ}, 17'$			

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 30 fois.

LXVI. Je prendrai ici $p = 90$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$
pouces, & les mesures seront

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 90,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 54,77 \\ 431,84 \end{array} \right.$	0,50	$AB = 90,00$
en $B = 8,18$		1,69	$BC = 9,00$
en $C = 4,50$	4,86	0,05	$CD = 6,00$
en $D = 4,50$	4,86	1,13	$DE = 1,80$
en $E = 4,05$	4,37	1,01	$EF = 1,80$
en $F = 1,80$	1,94	0,45	$FO = 0,80$
la longueur de la Lunette $AO = 109,40$, & le demi- diamètre du champ apparent = $1^{\circ}, 4'$.			

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 40 fois.

LXVII. Je prendrai ici $p = 120$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = 120, 00$	$\left\{ \begin{array}{l} 73, 02 \\ 575, 78 \end{array} \right.$	0, 67	$AB = 120$
en $B = 8, 37$		1, 69	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4, 86	0, 05	$CD = 6, 00$
en $D = 4, 50$	4, 86	1, 13	$DE = 1, 80$
en $E = 4, 05$	4, 37	1, 01	$EF = 1, 80$
en $F = 1, 80$	1, 94	0, 45	$FO = 0, 80$

la longueur de toute la Lunette $AO = 139, 40$, & le demi-diamètre du champ apparent = $48'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 50 fois.

LXVIII. Je prendrai ici $p = 160$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$ &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 160, 00$	$\left\{ \begin{array}{l} 97, 36 \\ 767, 71 \end{array} \right.$	0, 83	$AB = 160, 00$
en $B = 9, 06$		1, 80	$BC = 9, 60$
en $C = 4, 80$	5, 18	0, 05	$CD = 6, 40$
en $D = 4, 80$	5, 18	1, 20	$DE = 1, 92$
en $E = 4, 32$	4, 66	1, 08	$EF = 1, 92$
en $F = 1, 92$	2, 07	0, 48	$FO = 0, 85$

Donc la longueur de la Lunette $AO = 180, 69$, & le demi-diamètre du champ apparent = $39'$.

LXIX. J'ajouterai encore de semblables devis pour des Lunettes à 7 verres, en évitant les cas, où les verres deviendroient trop grands. Pour cet effet je supposerai dans les déterminations du §. XLVI. la lettre $c = \frac{1}{2}$, où à cause de $i = 3$, la distance de foyer de l'objectif doit être prise $p = \frac{3}{4} m \sqrt{(m + 24)}$, & les mesures, pour chaque grossissement $= m$, doivent être tirées des formules suivantes.

$$\text{en } B = q = \frac{3}{m+3} p, \quad BQ = \frac{3}{4m} p, \quad AB = p$$

$$\text{en } C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}, \quad CR = \frac{1}{20}, \quad BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$$

$$\text{en } D = s = 2 \cdot \frac{p}{m}, \quad DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}, \quad CD = 2 \cdot \frac{p}{m}$$

$$\text{en } E = t = 2 \cdot \frac{p}{m}, \quad ET = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{m}, \quad DE = \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$$

$$\text{en } F = u = \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}, \quad FU = \frac{7}{18} \cdot \frac{p}{m}, \quad EF = \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$$

$$\text{en } G = v = \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}, \quad GV = \frac{14}{81} \cdot \frac{p}{m}, \quad FG = \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$$

$$\& \text{ pour le lieu de l'œil la distance } GO = \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$$

Or le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{2578}{m}$ minutes, d'où je déduis les devis suivans.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 10 fois.

LXX. En prenant donc ici $p = 25$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$, on aura les mesures suivantes en pouces:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 25,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 15,21 \\ 119,95 \end{array} \right.$	0,17	$AB = 25,00$
en $B = 5,77$		1,87	$BC = 7,50$
en $C = 3,75$	4,05	0,05	$CD = 5,00$
en $D = 5,00$	5,40	1,25	$DE = 1,04$
en $E = 5,00$	5,40	1,25	$EF = 1,11$
en $F = 3,89$	4,20	0,97	$FG = 1,08$
en $G = 1,73$	1,87	0,43	$GO = 0,58$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = 41,31$,
& le demi-diamètre du champ apparent $= 4^{\circ}, 18'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 15 fois.

LXXI. Je pose pour ce grossissement, comme auparavant $p = 40$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & de là on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 40,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 24,34 \\ 191,93 \end{array} \right.$	0,25	$AB = 40,00$
en $B = 6,67$		2,00	$BC = 8,00$
en $C = 4,00$	4,32	0,05	$CD = 5,33$
en $D = 5,33$	5,76	1,33	$DE = 1,11$
en $E = 5,33$	5,76	1,33	$EF = 1,18$
en $F = 4,15$	4,48	1,04	$FO = 1,15$
en $G = 1,85$	2,00	0,46	$GO = 0,62$

la longueur de toute la Lunette $AO = 57,39$, & le
demi-diamètre du champ apparent $= 2^{\circ}, 52'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 20 fois.

LXXII. En prenant ici $p = 55$ pouces, d'où l'on a $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 33,46 \\ 263,90 \end{array} \right.$	0,33	$AB = 55,00$
en $B = 7,18$			7,75
en $C = 4,12 \frac{1}{2}$	4,45	0,05	$CD = 5,50$
en $D = 5,50$	5,94	1,38	$DE = 1,15$
en $E = 5,50$	5,94	1,38	$EF = 1,22$
en $F = 4,28$	4,62	1,07	$FG = 1,19$
en $G = 1,90$	2,05	0,48	$GO = 0,63$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72,94$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2^{\circ}, 9'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 25 fois.

LXXIII. En supposant comme auparavant $p = 70$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, nous aurons les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 70,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 42,59 \\ 336,87 \end{array} \right.$	0,42	$AB = 70,00$
en $B = 7,50$			8,10
en $C = 4,20$	4,54	0,05	$CD = 5,60$
en $D = 5,60$	6,05	1,40	$DE = 1,17$
en $E = 5,60$	6,05	1,40	$EF = 1,24$
en $F = 4,36$	4,71	1,09	$FO = 1,21$
en $G = 1,94$	2,10	0,49	$GO = 0,65$

la longueur de toute la Lunette $AO = 88, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $1^{\circ}, 43'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 30 fois.

LXXIV. La distance de foyer de l'objectif étant prise $p = 90$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = 3$, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons destâces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 90, 00$	$\left\{ \begin{array}{l} 54, 77 \\ 43, 84 \end{array} \right.$	0,50	$AB = 90, 00$
en $B = 8, 18$	8,84	2,25	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4,86	0,05	$CD = 6, 00$
en $D = 6, 00$	6,48	1,50	$DE = 1, 25$
en $E = 6, 00$	6,48	1,50	$EF = 1, 33$
en $F = 4, 67$	5,04	1,17	$FO = 1, 29$
en $G = 2, 07$	2,24	0,52	$GO = 0, 69$
la longueur de toute la Lunette $AO = 109, 56$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^{\circ}, 26'$.			

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 40 fois.

LXXV. En prenant ici, comme ci-dessus, $p = 120$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m}$ soit $= 3$, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons destâces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 120, 00$	$\left\{ \begin{array}{l} 73, 02 \\ 57, 78 \end{array} \right.$	0,67	$AB = 120, 00$
en $B = 8, 37$	9,04	2,25	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4,86	0,05	$CD = 6, 00$

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $D = 6,00$	6,48	1,50	$DE = 1,25$
en $E = 6,00$	6,48	1,50	$EF = 1,33$
en $F = 4,67$	5,04	1,17	$FG = 1,29$
en $G = 2,07$	2,24	0,52	$GO = 0,69$
la longueur de toute la Lunette $AO = 139,56$, & le demi-diamètre de l'ouverture $= 1^{\circ}, 5'$.			

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 50 fois.

LXXVI. Je prendrai ici, comme auparavant, $p = 160$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$, & j'en trouve les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 160,00$	$\left\{ \begin{array}{l} 97,36 \\ 767,71 \end{array} \right.$	0,83	$AB = 160,00$
en $B = 9,06$	9,79	2,40	$BC = 9,60$
en $C = 4,80$	5,18	0,05	$CD = 6,40$
en $D = 6,40$	6,91	1,60	$DE = 1,33$
en $E = 6,40$	6,91	1,60	$EF = 1,42$
en $F = 4,98$	3,38	1,25	$FG = 1,38$
en $G = 2,22$	2,40	0,56	$GO = 0,67$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = 180,280$, & le demidiamètre du champ apparent $= 51'$.

De la construction de ces Lunettes en y employant un verre objectif composé.

LXXVII. De la manière que j'ai ici considéré la confusion, celle qui résulte du troisième verre est repré-

sentée par cette formule $\frac{i}{m c^2}$, laquelle étant indiquée par la lettre M , j'ai fait voir ailleurs que pour détruire cette confusion aussi bien que celle de l'objectif, celui-ci doit être composé de deux verres l'un convexe, & l'autre concave enforte qu'il soit, posant p pour la distance de foyer de l'objectif entier :

Du premier verre

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 0,51467 p \\ \text{de derrière} = 4,05851 p \end{array} \right.$

De l'autre verre

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = -0,73978 p + 0,7319 M p \\ \text{de derrière} = +1,01897 p - 1,3885 M p \end{array} \right.$

Cependant il faut ici remarquer, que comme les autres verres produisent aussi quelque confusion, il faut prendre

$M > \frac{i}{m c^2}$, & il est même bon d'en prendre la valeur un

peu trop grande, puisqu'on est en état de redresser cette faute, en éloignant les deux verres l'un de l'autre plus que je ne l'ai supposé dans le calcul, où leur distance a été supposée $= \frac{1}{80} p$.

LXXVIII. Je n'appliquerai ces objectifs qu'au cas de six verres, & à l'hypothèse, où j'ai supposé $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$;

de là j'aurai donc $\frac{i}{m c^2} = 5$, & partant, pour tenir compte

des autres verres, je supposerai $M = \frac{10}{m}$, d'où l'on comprend aisément que cette hypothèse ne sauroit être appliquée qu'aux cas, où le grossissement est très-considérable, ou $\frac{10}{m}$ une fraction assez petite. Donc si nous prenons

$p =$

$p = \frac{m}{2}$, la construction de notre objectif composé pour le grossissement = m fera en pouces.

Du premier verre

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = 0,25734 m \\ \text{de derrière} = 2,02926 m \end{array} \right.$

De l'autre verre

le rayon de la face $\left\{ \begin{array}{l} \text{de devant} = -(0,36989 m - 3,659) \\ \text{de derrière} = +(0,50948 m - 6,942) \end{array} \right.$

ce dernier verre est donc un menisque tournant sa face concave vers le premier verre.

Table pour la construction de ces Lunettes.

Objectif composé

Grossissement m	Premier verre		L'autre verre		Dist. de foyer du 2nd verre	Rayon de ses deux faces	Demid. du champ apparent
	Rayon de la face d'avant	de derrière	Rayon de la face de devant	de derrière			
30	7,72	60,88	7,44	8,34	1,36	1,47	1° 4'
40	10,29	81,17	11,14	13,44	1,39	1,50	48'
50	12,87	101,46	14,84	18,53	1,42	1,53	38
60	15,44	121,75	18,53	23,63	1,43	1,54	32
70	18,01	142,05	22,23	28,72	1,44	1,55	28
80	20,59	162,34	25,93	33,82	1,44	1,55	24
90	23,16	182,63	29,63	38,91	1,45	1,56	21
100	25,73	202,93	33,33	44,00	1,45	1,56	19
125	32,17	253,66	42,58	56,74	1,46	1,57	16
150	38,60	304,39	51,83	69,48	1,46	1,57	13
175	45,03	355,12	61,07	82,22	1,47	1,58	11
200	51,47	405,85	70,32	94,95	1,47	1,58	9
250	64,34	507,32	88,82	120,43	1,47	1,58	7 $\frac{1}{2}$
300	77,20	608,78	107,31	145,90	1,48	1,59	6
350	90,07	710,24	125,81	171,38	1,48	1,59	5 $\frac{1}{2}$
400	102,94	811,70	144,30	196,85	1,48	1,59	5
450	115,80	913,17	162,80	222,32	1,49	1,60	4 $\frac{1}{2}$
500	128,67	1014,63	181,29	247,80	1,49	1,60	4

Le second verre *B*, dont la construction est donnée ici, doit toujours être mis dans le foyer de l'objectif, & le demidiamètre de son ouverture est $\frac{3}{16}$ pouces, & de là jusqu'au troisième verre *C*, la distance est $BC = 1 \frac{1}{2}$ pouce.

Du troisième verre *C* la distance de foyer est $= 1, 25$; donc le rayon de ses deux faces $= 1, 35$, le demidiamètre de son ouverture $= \frac{1}{20}$ pouce, & la distance $CD = 5$.

Du quatrième verre *D* la distance de foyer est $= 3, 75$; donc le rayon de ses faces $= 3, 89$, le demidiamètre de son ouverture $= 0, 94$, & la distance $DE = 1, 5$.

Du cinquième verre *E* la distance de foyer est $= 3, 37 \frac{1}{2}$; donc le rayon de ses faces $= 3, 48$, le demidiamètre de son ouverture $= 0, 84$, & la distance $EF = 1, 5$.

Du sixième verre *F* la distance de foyer est $= 1, 50$; donc le rayon de ses faces $= 1, 62$, le demidiamètre de son ouverture est $= 0, 37 \frac{1}{2}$, & la distance de l'œil $FO = 0, 61$.

LXXIX. Mais en cas qu'on ne réussisse pas si heureusement dans la construction de ces objectifs composés, qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, il sera bon de donner des règles plus générales pour les Lunettes, qu'on sera en état d'en faire. Pour cet effet je pose $p = nm$, afin qu'on puisse prendre pour n un nombre tel, que les circonstances le permettront.

Je commencerai donc par le cas de 5 verres, en regardant la distance de foyer du dernier oculaire comme connue :

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{2(i+1)}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{3i-1}{2} t$
en D	$s = \frac{3i-1}{i+1} t$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EO = \frac{i+1}{2i} t$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(3i+1)}{2i} t$, & le demi-diamètre du champ ap-

parent $\phi = \frac{i}{2(i+1)m}$; or $\frac{c}{1-c} = \frac{3i-1}{2n(i-1)} t$; ce qui donne la valeur de c , & par conséquent celle de r .

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{3in}{4(i+1)}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{4i-2}{3} u$
en D	$s = \frac{4i-2}{i+1} u$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = u$
en E	$t = \frac{3i}{i+1} u$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FO = \frac{i+1}{3i} u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AQ = n(m+i) + \frac{(i+1)(4i+1)}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{4(i+1)m}$; or pour la distance de foyer r on a $\frac{c}{1-c} = \frac{4i-2}{3n(i-1)}$, d'où l'on doit tirer la valeur de c .

Pour le cas de 7 verres.

Posant comme ci-dessus $\zeta = 2$, nous aurons $\frac{c}{1-c} = \frac{5i-3}{4i-4} \times \frac{10i-2}{9i-3} \times \frac{5i+1}{6i+2} \times \frac{v}{n}$, d'où l'on doit tirer la valeur de c , alors on aura:

De verre	Distance de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{i+1}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{5i-3}{4} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2}$
en D	$s = \frac{5i-3}{i+1} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$
en E	$t = \frac{10i-2}{i+1} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$
en F	$u = \frac{5i+1}{i+1} \cdot \frac{v}{2}$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FG = \frac{1}{2} \cdot v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4} v$	$GO = \frac{i+1}{4i} \cdot v$

où le demi-diamètre du champ apparent fera $\varphi = \frac{1}{(i+1)m}$; or

afin que BQ ne surpasse point $\frac{1}{4} q$, il faut prendre $i > \frac{3m}{m-4}$.

LXXX. Donnons à i des valeurs convenables pour diminuer l'ouverture du second verre, & pour augmenter en même tems le champ apparent, & nous aurons les règles suivantes plus particulières.

Pour le cas de 5 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{3nm}{m+3}$	$BQ = \frac{3n}{8}$	$BC = 3n$
en C	$r = \frac{6nt}{2t+n}$	$CR = \frac{3x}{m}$	$CD = 4t$
en D	$s = 2t$	$DS = \frac{1}{2}t$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{2}{3}t$

Donc la longueur de la Lunette $AO = n(m+3) + \frac{20}{3}t$, & le demidiamètre du champ apparent $\phi = \frac{3}{8m}$,

ou bien $\phi = \frac{1289}{m}$ minutes.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{5nm}{m+5}$	$BQ = \frac{5n}{8}$	$BC = 5n$
en C	$r = \frac{15nu}{3u+2n}$	$CR = \frac{5x}{m}$	$CD = 6u$

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en D	$s = 3 u$	$DS = \frac{3}{4} u$	$DE = u$
en E	$t = \frac{5}{2} u$	$ET = \frac{5}{8} u$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FO = \frac{2}{5} u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+5)$
 $+ \frac{42}{5} u$, & le demidiamètre du champ apparent $\phi = \frac{5}{8m}$
ou bien $\phi = \frac{2148}{m}$ minutes.

Pour le cas de 7 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = n m$	$AP = x$	$AB = n m$
en B	$q = \frac{7 n m}{m+7}$	$BQ = \frac{7n}{8}$	$BC = 7 n$
en C	$r = \frac{476 m v}{68 v + 55 n}$	$CR = \frac{7x}{m}$	$CD = \frac{408}{55} v$
en D	$s = \frac{204}{55} v$	$DS = \frac{51}{55} v$	$DE = \frac{51}{110} v$
en E	$t = \frac{153}{44} v$	$ET = \frac{153}{176} v$	$EF = \frac{9}{11} v$
en F	$u = \frac{9}{4} v$	$FU = \frac{9}{16} v$	$FG = \frac{1}{2} v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4} v$	$GO = \frac{2}{7} v$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+7)$
 $+ \frac{332}{25} v$, & le demi-diamètre du champ apparent $\phi = \frac{7}{8m}$
ou bien $\phi = \frac{3007}{m}$ minutes.

LXXXI. Si nous traitons de la même manière nos formules pour le cas de 8 verres, en supposant $i = 9$, & introduisant la distance de foyer du dernier oculaire, nous trouvons les formules suivantes, dont la connexion avec les cas précédens est remarquable.

Pour le cas de 8 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{9nm}{m+9}$	$BQ = \frac{9n}{8}$	$BC = 9n$
en C	$r = \frac{9 \cdot 1155nw}{1155w+988n}$	$CR = \frac{9x}{m}$	$CD = \frac{2310}{247} w$
en D	$s = \frac{1155}{247} w$	$DS = \frac{1155}{988} w$	$DE = \frac{231}{494} w$
en E	$t = \frac{231}{52} w$	$ET = \frac{231}{208} w$	$EF = \frac{11}{26} w$
en F	$u = \frac{99}{26} w$	$FU = \frac{99}{104} w$	$FG = \frac{11}{26} w$
en G	$v = \frac{11}{4} w$	$GV = \frac{11}{16} w$	$GH = \frac{1}{2} w$
en H	$w = w$	$HW = \frac{1}{4} w$	$HO = \frac{2}{9} w$

& le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{9}{8m}$ ou $\varphi = \frac{3867}{m}$ minutes. De là on voit que la longueur de la Lunette croît à mesure qu'on augmente le champ apparent.

A V E R T I S S E M E N T .

Comme le Mémoire précédent suppose celui que l'Auteur a donné dans le XIII. Volume de l'Académie de Berlin, on a cru devoir en extraire les formules principales, pour les mettre ici sous les yeux de nos Lecteurs.

 FORMULES DE DIOPTRIQUE NÉCESSAIRES POUR
 L'INTELLIGENCE DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

SOIENT (fig. * plan. 3) autant de lentilles qu'on voudra PP , QQ , RR &c. rangées sur le même axe ao , de manière qu'elles forment une Lunette quelconque. Imaginons que aa soit un objet donné, & que $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, $e\epsilon$ &c. soient les différentes images de cet objet formées par les lentilles PP , QQ , RR &c., de sorte que les points de l'axe b , c , d &c. soient les foyers des rayons qui partent du point a , & les points β , γ , δ &c., (qui se déterminent en tirant les perpendiculaires $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ &c., & menant ensuite les droites $aA\beta$, $\beta B\gamma$, $\gamma c\delta$ &c.) soient les foyers des rayons qui partent du point a placé hors de l'axe. On voit aisément que le rayon aA , qui passe par le centre de la lentille PP , & qui doit être regardé comme le principal de tous ceux qui partent du point a , ira rencontrer la lentille QQ en Q , que de là il passera par γ , & rencontrera la lentille RR en R , ensuite la lentille SS en S &c., & enfin la lentille XX en X , d'où il sortira parallèlement au rayon nG , à cause que
 tous

tous les rayons doivent se trouver parallèles entr'eux au sortir de la dernière lentille.

Soit maintenant O le point où le rayon XO coupera l'axe, ce point sera celui où il faudra placer l'œil pour voir le point α , c'est-à-dire pour pouvoir découvrir un champ apparent égal à l'angle αAa ; l'angle $XOG = \eta Gg$, comparé à l'angle αAa , déterminera le grossissement de la Lunette; & les parties BQ , CR , DS &c. des lentilles feront les ouvertures qu'il faudra leur donner pour pouvoir jouir de tout le champ $\alpha A \alpha$.

Cela posé soit: $\alpha A \alpha = \phi$, $\alpha A = \infty$, $GO = k$; ensuite $\frac{Bc}{bB} = B$, $\frac{Cd}{cC} = C$, $\frac{Dc}{dD} = D$, $\frac{Ef}{eE} = E$ &c.

Soient de plus p , q , r , s &c. les distances focales des lentilles PP , QQ , RR , SS &c., & πq , $\pi' r$, $\pi' s$ &c. les demi-diamètres BQ , CR , DS &c. des ouvertures des verres QQ , RR , SS &c. en tant qu'elles contribuent au champ apparent, on aura, en faisant pour abréger

$$B = \frac{B}{B + 1}, \quad C = \frac{C}{C + 1}, \quad D = \frac{D}{D + 1} \quad \&c.$$

$$\text{Distances focales} \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{B\phi}{B\pi - \phi} P \\ r = \frac{BC\phi}{C\pi' - \pi + \phi} P \\ s = \frac{BCD\phi}{D\pi'' - \pi' + \pi - \phi} P \\ \&c. \end{array} \right.$$

$$\text{Intervalles entre les verres} \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{B\pi}{B\pi - \phi} P \\ BC = \frac{(BC\pi' - B\pi)\phi}{(B\pi - \phi)(C\pi' - \pi + \phi)} P \\ CD = \frac{B(CD\pi'' - C\pi')\phi}{(C\pi' - \pi + \phi)(D\pi'' - \pi + \pi - \phi)} P \\ \&c. \end{array} \right.$$

Distances de l'œil

Pour un seul verre $k = 0$ Pour 2 verres $k = \frac{\phi \pi}{(B \pi - \phi)^2} P$ Pour 3 verres $k = \frac{B \phi \pi'}{(C \pi - \pi' + \phi)^2} P$ Pour 4 verres $k = \frac{B C \phi \pi''}{(D \pi' - \pi'' + \pi - \phi)^2} P$

&c.

Enfin soit m le nombre qui exprime la multiplication des diamètres apparens des objets, on aura l'équation

$$+ m = \frac{\phi - \pi + \pi' - \pi'' + \&c.}{}$$

le signe $+$ est pour le cas, où les objets sont représentés debout, & le signe $-$ pour le cas opposé, de sorte que l'on aura :

pour le premier cas . . . $\phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \&c.}{m - 1}$

& pour le second cas . . . $\phi = \frac{+\pi - \pi' + \pi'' + \&c.}{m + 1}$

Pour ce qui est de l'aberration des lentilles, on trouve;

1° Que celle qui vient de la diverse refrangibilité des rayons sera anéantie en satisfaisant à cette équation

$$0 = \frac{\pi}{B \pi - \phi} + \frac{\pi'}{C \pi' - \pi + \phi} + \frac{\pi''}{D \pi'' - \pi' + \pi - \phi} + \&c.$$

2° Que l'autre aberration, celle qui vient de la figure sphérique des verres, est exprimée pour chaque lentille par la formule suivante :

$$\frac{\mu x^2}{\rho} (\lambda (A + 1)^2 + \nu A)$$

x étant le demidiamètre de l'ouverture, A le rapport de la distance entre le point rayonnant & la lentille, à la distance entré le foyer des rayons rompus & la même

lentille, μ , ν des nombres dépendans du raport de refraction dans le verre, & λ un nombre = ou $>$ 1.

3° Que l'aberration étant donnée, la figure de la lentille doit être telle que l'on ait :

$$\begin{array}{l} \text{Rayon de la surface tournée} \\ \text{vers le point lumineux} \\ \text{Rayon de la surface} \\ \text{opposée} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\rho A + \sigma(1-A) \pm \tau \sqrt{(\lambda-1)}} \\ \frac{p}{\sigma A + \rho(1-A) \mp \tau \sqrt{(\lambda-1)}} \end{array} \right.$$

où p est la distance focale, A est $= \frac{A}{A+1}$, & ρ , σ , τ

sont des nombres, qui dépendent de la raison de refraction; d'où l'on voit qu'il y a toujours deux figures à donner à une lentille, pour qu'elle produise une aberration donnée, excepté dans le cas où $\lambda = 1$, qui est celui où l'aberration est la moindre; on voit de plus que le nombre λ ne peut être pris moindre que l'unité, sans que les rayons des faces deviennent imaginaires.

4° Que l'aberration qui résulte de toutes les lentilles ensemble est exprimée par

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3} \times \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \frac{(B+1)^2 (\lambda'(B+1) + \nu B) \phi}{B^2 (B\pi - \phi)} \\ + \frac{(C+1)^2 (\lambda''(C+1) + \nu C) \phi}{B^2 C^2 (C\pi - \pi + \phi)} \\ + \&c. \end{array} \right.$$

λ , λ' , λ'' &c. étant les valeurs de λ qui conviennent aux lentilles PP , QQ , RR &c.

5° Qu'enfin cette aberration ne doit pas s'étendre au delà de la fraction $\frac{\mu}{4.30}$.

OBSERVATIONES

Circa integralia formularum

$$\int x^{p-1} dx (1 - x^n)^{\frac{q}{n} - 1}$$

Posito post integrationem $x = 1$

Auctore

L. E U L E R O.

I. FORMULAM integram $\int x^{p-1} dx (1 - x^n)^{\frac{q}{n} - 1}$,
 seu hoc modo expressam $\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{n-q}}}$, hic

consideraturus, assumo exponentes n , p , & q esse numeros integros positivos, quandoquidem si tales non essent, facile ad hanc formam perducere possent. Deinde hujus formulæ integrale non in genere hic perpendere constitui, sed ejus tantum valorem, quem recipit, si post integrationem statuatur $x = 1$, postquam scilicet integratio ita fuerit instituta; ut integrale evanescat posito $x = 0$. Primum enim nullum est dubium, quin, hoc casu $x = 1$, integrale multo simplicius exprimitur; ac præterea quoties in analysi ad hujusmodi formulas pervenitur, plerumque non tam integrale indefinitum, pro quocunque valore ipsius x , quam definitum valori $x = 1$, utpote præcipuo desiderari solet.

II. Constat autem casu, quo post integrationem ponitur $x = 1$, integrale $\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{n-q}}}$, hoc modo per productum infinitorum factorum exprimi, ut sit:

$$\frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)} \cdot \&c.$$

cujus quidem primus factor $\frac{p+q}{pq}$ non legi sequentium adstringitur. Hoc tamen non obitante perspicuum est exponentes p & q inter se esse commutabiles, ita ut sit:

$$\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[q]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1} dx}{\sqrt[q]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

quæ quidem æqualitas etiam facile per se ostenditur. Verum productum istud infinitum nos ad alia multo majora perducet, quibus hæc integralia magis illustrabuntur.

III. Ut autem brevitati in scribendo consulam, neque opus habeam scripturam hujus formulæ $\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[q]{(1-x^n)^{n-q}}}$ toties repetere, pro quovis exponente n ejus loco scribam $(\frac{p}{q})$, ita ut $(\frac{p}{q})$ denotet valorem formulæ integralis

$\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[q]{(1-x^n)^{n-q}}}$, casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Et quoniam vidimus esse hoc casu:

$$\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[q]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1} dx}{\sqrt[q]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

manifestum est fore $(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$, ita ut pro quovis valore exponentis n , hæc expressiones $(\frac{p}{q})$ & $(\frac{q}{p})$ eandem significant quantitatem. Ita si fuerit exempli gratia $n = 4$, erit:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

Per productum autem infinitum habebitur.

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{2.3} \cdot \frac{4.9}{6.7} \cdot \frac{8.13}{10.11} \cdot \frac{12.17}{14.15} \cdot \&c.$$

IV. Jam primum observo, si exponentes p & q fuerint majores exponente n , formulam integram semper ad aliam

reduci posse, in qua hi exponentes infra n deprimantur. Cum enim sit:

$$\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p-n}{p+q-n} \int \frac{x^{p-n-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

erit, recepto hic scribendi more:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n} \left(\frac{p-n}{q}\right)$$

quo si fuerit $p > n$, formula ad aliam, in qua exponens p minor sit quam n revocatur, quod etiam ob commutabilitatem de altero exponente q est tenendum. Quamobrem nobis has formulas examinaturis sufficiet pro quovis exponente n exponentes p & q ipso n minores accipere, quoniam his expeditis, omnes casus quibus majores habituri essent valores, eo reduci possunt.

V. Statim autem patet casus, quibus est vel $p = n$, vel $q = n$, absolute seu algebraice esse integrabiles. Si

enim fuerit $q = n$, ob $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p}$, po-

sito $x = 1$, erit $\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}$; similique modo $\left(\frac{n}{q}\right) =$

$\frac{1}{q}$. Atque hi soli sunt casus, quibus integrale nostræ for-

mulae absolute exhiberi potest, si quidem p & q exponentem n non excedant. Reliquis casibus omnibus integratio vel quadraturam circuli, vel adeo altiores quadraturas implicabit; quas hic accuratius perpendere animus est. Post

eas igitur formulas $\left(\frac{p}{n}\right)$, seu $\left(\frac{n}{p}\right)$, quarum valor absolu-

te est $= \frac{1}{p}$, veniunt eæ, quarum valor per solam circuli

quadraturam exprimitur; tum vero sequentur eæ, quæ altio-rem quandam quadraturam postulant, atque has altiores quadraturas tam ad simplicissimam formam, quam ad minimum numerum revocare conabor.

VI. Cum numeri p & q exponents n minores ponantur, eæ formulæ $\left(\frac{p}{q}\right)$ per solam circuli quadraturam integrabiles existunt, in quibus est $p + q = n$. Sit enim $q = n - p$, & formula nostra:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{(1-x^n)^p}} = \int \frac{x^{q-1} dx}{\sqrt{(1-x^n)^p}}$$
 hoc producto infinito exprimitur:

$$\frac{n}{p(n-p)} \cdot \frac{n \cdot 2n}{(n+p)(2n-p)} \cdot \frac{2n \cdot 3n}{(2n+p)(3n-p)} \cdot \frac{3n \cdot 4n}{(3n+p)(4n-p)} \dots$$
 quod hoc modo repræsentatum:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{nn}{nn-pp} \cdot \frac{4nn}{4nn-pp} \cdot \frac{9nn}{9nn-pp} \dots$$

congruit cum eo producto, quo *sinus* angulorum expressi: Quare si π sumatur ad semicircuferentiam circuli cujus radius fit $= r$, simulque mensuram duorum angulorum rectorum exhibeat, erit:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{q\pi}{n}}$$

VII. Ceteris casibus, quibus neque $p = n$, neque $q = n$, neque $p + q = n$, integrale etiam neque absolute, neque per quadraturam circuli exhiberi potest, sed aliam quandam altiorem quadraturam complectitur. Neque vero singuli casus diversi peculiarem hujusmodi quadraturam exigunt, sed plures dantur reductiones, quibus diversas formulas inter se comparare licet. Hæ autem reductiones derivantur ex producto infinito supra exhibitio cum enim fit:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p \cdot q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \dots$$

erit simili modo:

$$\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{(p+q)r} \cdot \frac{n(p+q+r+n)}{(p+n+n)(r+n)} \cdot \frac{2n(p+q+r+2n)}{(p+q+2n)(r+2n)} \dots$$

quibus in se invicem ductis obtinetur:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{pqr} \cdot \frac{nn(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)} \cdot \frac{4nn(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)} \&c.$$

ubi ternæ quantitates p, q, r sunt inter se permutabiles.

VIII. Hinc ergo permutandis his quantitatibus p, q, r consequimur sequentes reductiones.

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) \left(\frac{q+r}{p}\right).$$

unde ex datis aliquot formulis plures aliæ determinari possunt. Veluti si sit $q+r=n$, seu $r=n-q$, ob

$$\left(\frac{q+r}{p}\right) = \frac{1}{p} \quad \& \quad \left(\frac{q}{r}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{q\pi}{n}} \quad \text{erit:} \quad \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p+q}{n-q}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n p \sin. \frac{q\pi}{n}}, \quad \text{nec non} \quad \left(\frac{p}{n-q}\right) \left(\frac{n+p-q}{q}\right) = \frac{\pi}{np \sin. \frac{q\pi}{n}}$$

Deinde si sit $p+q+r=n$, seu $r=n-p-q$, erit:

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{r\pi}{n}} \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{q\pi}{n}} \left(\frac{p}{r}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}} \left(\frac{q}{r}\right)$$

unde insignes reductiones aliarum ad alias oriuntur, quibus multitudo quadraturarum ad nostrum scopum necessarium vehementer diminuitur.

IX. Præterea vero pro p, q, r numeris determinatis assumendis, sequentes adipiscimur productorum ex binis formulis æqualitates:

$$\left(\frac{1}{1}\right) \left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{1}\right) \left(\frac{4}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) \left(\frac{3}{3}\right) = \left(\frac{3}{1}\right) \left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$

&c.

ubi quidem plures occurrunt, quæ jam in reliquis continentur.

X. His quasi principiis præmissis formulam generalem $\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{(1-x^p)^{n-q}}}$, in qua numerus p & q exponentem n non superare assumo, in classes ex exponente n petitas distinguiam, ita ut valores $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ &c. classes primam, secundam, tertiam &c. sint præbituri.

Ac prima quidem classis, qua $n=1$, unicam formulam complectitur $\left(\frac{1}{1}\right)$, cujus valor est $= 1$. Secunda

classis, qua $n=2$, has formulas $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ continet, quarum evolutio per se est manifesta. Tertia classis, qua $n=3$ has habet:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right).$$

Quarta vero classis, qua $n=4$, istas:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{4}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{4}\right);$$

sicque in sequentibus classibus formularum numerus secun-

dum numeros trigonales crescit. Has igitur classes ordine percurramus.

$$\text{Classis } 2^{\text{da}} \text{ formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{(1-x^2)^2 - q}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Perspicuum hic quidem est istas formulas vel absolute, vel per quadraturam circuli exprimi: nam hæc $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ absolute dantur, & reliqua $\left(\frac{1}{1}\right)$ ob $1 + 1 = 2$ est $\frac{\pi}{2 \sin. \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; si ergo brevitatis causa ponamus $\frac{\pi}{2} = \alpha$, uti scilicet in sequentibus classibus faciemus, omnes formulæ hujus classis ita definiuntur:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \alpha.$$

$$\text{Classis } 3^{\text{a}} \text{ formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^3 - q}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Cum hic sit $n = 3$, formula quadraturam circuli involvens est $\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{\pi}{3}}$, ponamus ergo $\left(\frac{2}{1}\right) = \alpha$ reliquæ autem formulæ, quæ non absolute dantur, altiorum quadraturam involvunt, & quidem unicam $\left(\frac{1}{1}\right)$, quam littera A indicemus, qua concessa valores omnium formularum hujus classis assignari poterimus:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{1}\right) &= 1, \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ \left(\frac{2}{1}\right) &= \alpha, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha}{A} \\ \left(\frac{1}{1}\right) &= A. \end{aligned}$$

$$\text{Classis } 4^{\text{ta}} \text{ formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Cum hic sit $n = 4$, duas habemus formulas a quadratura circuli pendentes, quarum valores, quia sunt cogniti, ita indicemus

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{\pi}{4}} = \alpha \quad \& \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{2\pi}{4}} = \beta.$$

Præterea vero unica opus est formula altiore quadraturam involvente, qua concessa reliquas omnes cognoscemus. Ponamus enim $\left(\frac{2}{1}\right) = A$, & omnes formulæ hujus classis ita determinabuntur:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{1}\right) &= 1, \quad \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{3}{1}\right) &= \alpha, \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \quad \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\alpha}{2A} \\ \left(\frac{2}{1}\right) &= A, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \beta \\ \left(\frac{1}{1}\right) &= \frac{\alpha A}{\beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Classis } 5^{\text{ta}} \text{ formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^5-1}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Cum hic sit $n = 5$, notemus statim formulas a quadratura circuli pendentes :

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{\pi}{5}} = \alpha, \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2\pi}{5}} = \beta$$

Duabus autem insuper novis quadraturis opus est huic classi peculiaribus, quas ita designemus :

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A, \quad \& \quad \left(\frac{2}{2}\right) = B$$

ex quibus reliquæ omnes ita definiuntur :

$$\left(\frac{5}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \alpha, \quad \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \quad \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta}{2B}, \quad \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\alpha}{3A},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A, \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \beta, \quad \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha B},$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = B,$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

$$\text{Classis } 6^{\text{ta}} \text{ formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^6-1}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Hic est $n = 6$, & formulæ quadraturam circuli involventes sunt :

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{\pi}{6}} = \alpha, \quad \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{2\pi}{6}} = \beta, \quad \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{6 \sin. \frac{3\pi}{6}} = \gamma.$$

Reliquarum vero omnium valores insuper a binis hisce quadraturis pendent :

$$\left(\frac{4}{1}\right) = A \text{ \& } \left(\frac{3}{2}\right) = B,$$

atque ita se habere deprehenduntur:

$$\left(\frac{6}{1}\right) = 1, \left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{6}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{5}, \left(\frac{6}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}, \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\beta}{3B}, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\alpha}{4A},$$

$$\left(\frac{4}{1}\right) = A, \left(\frac{4}{2}\right) = \beta, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha B B},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}, \left(\frac{3}{2}\right) = B, \left(\frac{3}{3}\right) = \gamma,$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}, \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha B B}{\gamma A},$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

$$\text{Classis } 7^{\text{ma}} \text{ formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[7]{(1-x^2)^7-1}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Quia $n = 7$, formulæ a quadratura circuli pendentes ita designentur:

$$\left(\frac{6}{1}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ fin. } \frac{\pi}{7}} = \alpha, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ fin. } \frac{2\pi}{7}} = \beta, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ fin. } \frac{3\pi}{7}} = \gamma$$

præterea vero hæ quadraturæ introducuntur:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = A, \left(\frac{4}{2}\right) = B, \left(\frac{3}{3}\right) = C$$

quibus datis omnes formulæ ita determinabuntur:

$$\left(\frac{7}{1}\right) = 1, \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{5}, \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}, \left(\frac{7}{7}\right) = \frac{1}{7},$$

$$\left(\frac{6}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{6}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{6}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}, \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{\gamma}{3C}, \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\beta}{4B}, \left(\frac{6}{6}\right) = \frac{\alpha}{5A},$$

$$\left(\frac{5}{1}\right) = A, \left(\frac{5}{2}\right) = \beta, \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\gamma\gamma A}{2\alpha B C}, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\beta\gamma A}{3\alpha B C},$$

$$\binom{4}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}, \binom{4}{2} = B, \binom{4}{3} = \gamma, \binom{4}{4} = \frac{\gamma\gamma}{\alpha C};$$

$$\binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}, \binom{3}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, \binom{3}{3} = C;$$

$$\binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}, \binom{2}{2} = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\gamma A};$$

$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

$$\text{Classis 8va formæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[8]{(1-x^8)^8 - q}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Quia hic est $n = 8$, formula quadraturam circuli implicantes erunt:

$$\binom{7}{1} = \frac{\pi}{8 \sin. \frac{\pi}{8}} = \alpha, \binom{6}{2} = \frac{\pi}{8 \sin. \frac{2\pi}{8}} = \beta,$$

$$\binom{5}{3} = \frac{\pi}{8 \sin. \frac{3\pi}{8}} = \gamma, \binom{4}{4} = \frac{\pi}{8 \sin. \frac{4\pi}{8}} = \delta$$

Nunc vero tres frequentes formulæ tanquam cognitæ spectentur:

$$\binom{6}{1} = A, \binom{5}{2} = B, \& \binom{4}{3} = C$$

atque ex his omnes formulæ hujus classis ita determinabuntur.

$$\binom{8}{1} = 1, \binom{8}{2} = \frac{1}{2}, \binom{8}{3} = \frac{1}{3}, \binom{8}{4} = \frac{1}{4}, \binom{8}{5} = \frac{1}{5},$$

$$\binom{8}{6} = \frac{1}{6}, \binom{8}{7} = \frac{1}{7}, \binom{8}{8} = \frac{1}{8};$$

$$\binom{7}{1} = \alpha, \binom{7}{2} = \frac{\beta}{A}, \binom{7}{3} = \frac{\gamma}{2B}, \binom{7}{4} = \frac{\delta}{3C}, \binom{7}{5} = \frac{\gamma}{4C},$$

$$\binom{7}{6} = \frac{\beta}{5B}, \binom{7}{7} = \frac{\alpha}{6A};$$

$$\binom{6}{1} = A, \binom{6}{2} = \beta, \binom{6}{3} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \binom{6}{4} = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha B C}, \binom{6}{5} = \frac{\gamma\delta A}{3\alpha C C},$$

$$\binom{6}{6} = \frac{\beta\gamma A}{4\alpha B C};$$

$$\binom{5}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}, \binom{5}{2} = B, \binom{5}{3} = \gamma, \binom{5}{4} = \frac{\gamma\delta}{\alpha C}, \binom{5}{5} = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha\beta C C};$$

$$\binom{4}{1} = \frac{\alpha C}{\beta}, \binom{4}{2} = \frac{\alpha B C}{\gamma A}, \binom{4}{3} = C, \binom{4}{4} = \delta;$$

$$\binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\delta}, \binom{3}{2} = \frac{\alpha\beta C C}{\gamma\delta A}, \binom{3}{3} = \frac{\alpha C C}{\delta A};$$

$$\binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}, \binom{2}{2} = \frac{\alpha\beta B C}{\gamma\delta A};$$

$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta};$$

Hinc istas reductiones ad sequentes classes, quousque libuerit, continuare licet. Quemadmodum ergo hinc in genere singularum formularum integralia se sint habitura exponamus.

$$\text{Evolutio formæ generalis } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{(1-x^n)^{n-1}}} = \binom{p}{q}$$

Primo ergo absolute integrabiles sunt hæ formulæ :

$$\binom{n}{1} = 1, \binom{n}{2} = \frac{1}{2}, \binom{n}{3} = \frac{1}{3}, \binom{n}{4} = \frac{1}{4}, \&c.$$

deinde formulæ a quadratura circuli pendentes sunt :

$$\binom{n-1}{1} = \alpha, \binom{n-2}{2} = \beta, \binom{n-3}{3} = \gamma, \binom{n-4}{4} = \delta \&c.$$

quarum quantitatum progressio tandem in se reuertitur cum sit etiam :

$$\binom{4}{n-4} = \delta, \binom{3}{n-3} = \gamma, \binom{2}{n-2} = \beta, \binom{1}{n-1} = \alpha.$$

Præterea vero altiores quadraturæ in subsidium vocari debent, quæ ita repræsententur :

$$\binom{n-2}{1} = A, \binom{n-3}{2} = B, \binom{n-4}{3} = C, \binom{n-5}{4} = D \text{ \&c.}$$

quarum numerum quovis casu sponte determinatur, quia hæ formulæ tandem in se revertuntur.

His autem formulis admittis omnes omnino ad eandem classem pertinentes definiri poterunt. Habebimus autem a formula

$\binom{n-1}{1} = \alpha$, uti supra istas formulas ordinavimus, deorsum descendendo:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{1} &= \alpha, \binom{n-2}{1} = A, \binom{n-3}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}, \binom{n-4}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}, \\ \binom{n-5}{1} &= \frac{\alpha D}{\delta}, \binom{n-6}{1} = \frac{\alpha E}{\epsilon} \text{ \&c.} \end{aligned}$$

qui valores retro sumti ita se habent:

$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}, \binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}, \binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\delta}, \text{ \&c.}$$

Tum vero ab eadem formula $\binom{n-1}{1} = \alpha$ horizontaliter progrediendo definiuntur istæ formulæ:

$$\binom{n-1}{1} = \alpha, \binom{n-1}{2} = \frac{\beta}{A}, \binom{n-1}{3} = \frac{\gamma}{2B}, \binom{n-1}{4} = \frac{\delta}{3C} \text{ \&c.}$$

quarum ultima erit $\binom{n-1}{n-1} = \frac{\alpha}{(n-2)A}$, penulti-

ma $\binom{n-1}{n-2} = \frac{\beta}{(n-3)B}$, antepenultima $\binom{n-1}{n-3} =$

$$\frac{\gamma}{(n-4)C} \text{ \&c.}$$

Simili modo a formula $\binom{n-2}{2} = \beta$ tam descendendo, quam progrediendo horizontaliter valores aliarum impetrebimus, ac descendendo quidem:

$$\binom{n-2}{2} = \beta, \binom{n-3}{2} = B, \binom{n-4}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, \binom{n-5}{2} = \frac{\alpha \beta CD}{\gamma \delta A},$$

$$\binom{n-6}{2} = \frac{\alpha \beta DE}{\delta \epsilon A}, \binom{n-7}{2} = \frac{\alpha \beta EF}{\epsilon \zeta A} \text{ \&c.}$$

ubi

ubi erit ultima $\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}$, penultima $\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\epsilon A}$ &c.; at horizontaliter progrediendo:

$$\left(\frac{n-2}{2}\right) = \beta, \left(\frac{n-2}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}, \left(\frac{n-2}{5}\right) = \frac{\delta\epsilon A}{3\alpha CD}, \left(\frac{n-2}{6}\right) = \frac{\epsilon\zeta A}{4\alpha DE}, \left(\frac{n-2}{7}\right) = \frac{\zeta\eta A}{5\alpha EF} \text{ \&c.}$$

quarum erit ultima $\left(\frac{n-2}{n-2}\right) = \frac{\beta\gamma A}{(n-4)\alpha BC}$, penultima $\left(\frac{n-2}{n-3}\right) = \frac{\gamma\delta A}{(n-5)\alpha CD}$ &c.

Porro a formula $\left(\frac{n-3}{n-3}\right) = \gamma$ descendendo pervenimus ad has formulas:

$$\left(\frac{n-3}{3}\right) = \gamma, \left(\frac{n-4}{3}\right) = \dot{C}, \left(\frac{n-5}{3}\right) = \frac{\alpha CD}{\delta A}, \left(\frac{n-6}{3}\right) = \frac{\alpha CDE}{\delta\epsilon AB},$$

$$\left(\frac{n-7}{3}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\epsilon\zeta AB}, \left(\frac{n-8}{3}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma EFG}{\epsilon\zeta\eta AB} \text{ \&c.}$$

& horizontaliter progrediendo:

$$\left(\frac{n-3}{3}\right) = \gamma, \left(\frac{n-3}{4}\right) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C}, \left(\frac{n-3}{5}\right) = \frac{\gamma\delta\epsilon A}{2\alpha\beta CD}, \left(\frac{n-3}{6}\right) = \frac{\delta\epsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE},$$

$$\left(\frac{n-3}{7}\right) = \frac{\epsilon\zeta\eta AB}{4\alpha\beta DEF}, \left(\frac{n-3}{8}\right) = \frac{\zeta\eta\theta AB}{5\alpha\beta EFG} \text{ \&c.}$$

Pari modo a formula $\left(\frac{n-4}{4}\right) = \delta$ descendendo nanciscimur:

$$\left(\frac{n-4}{4}\right) = \delta, \left(\frac{n-5}{4}\right) = D, \left(\frac{n-6}{4}\right) = \frac{\alpha DE}{\epsilon A}, \left(\frac{n-7}{4}\right) = \frac{\alpha\beta DEF}{\epsilon\zeta AB},$$

$$\left(\frac{n-8}{4}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma DEFG}{\epsilon\zeta\eta ABC}, \left(\frac{n-9}{4}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma\delta EFGH}{\epsilon\zeta\eta\theta ABC} \text{ \&c.}$$

& horizontaliter progrediendo:

$$\left(\frac{n-4}{4}\right) = \delta, \left(\frac{n-4}{5}\right) = \frac{\delta\epsilon}{\alpha D}, \left(\frac{n-4}{6}\right) = \frac{\delta\epsilon\zeta A}{2\alpha\beta DE}, \left(\frac{n-4}{7}\right) = \frac{\delta\epsilon\zeta\eta AB}{3\alpha\beta\gamma DEF},$$

$$\binom{n-4}{8} = \frac{\zeta \eta \theta ABC}{4 \alpha \beta \gamma DEFG}, \binom{n-4}{9} = \frac{\zeta \eta \theta \iota ABC}{5 \alpha \beta \gamma EFGH} \text{ \&c.}$$

Atque hac ratione tandem omnium formularum valores reperiantur.

Accommodemus has generales reductiones ad

$$\text{Classem } 9^{\text{na}} \text{ formulæ } \int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[9]{(1-x^9)^{p-1}}} = \binom{p}{q}$$

Ubi ob $n = 9$ formulæ quadraturam circuli involventes erunt :

$$\binom{8}{1} = \alpha, \binom{7}{2} = \beta, \binom{6}{3} = \gamma, \binom{5}{4} = \delta;$$

hinc $\varepsilon = \delta, \zeta = \gamma, \eta = \beta, \theta = \alpha$.

Deinde novæ quadraturæ huc requisitæ ponantur :

$$\binom{7}{1} = A, \binom{6}{2} = B, \binom{5}{3} = C, \binom{4}{4} = D;$$

ficque erit $E = C, F = B, \text{ \& } G = A$; atque his quatuor valoribus concessis omnium formularum nonæ clasfis valores assignari poterunt, quos simili ordine, ut hac tenus fecimus, repræsentemus.

$$\binom{9}{1} = 1, \binom{9}{2} = \frac{1}{2}, \binom{9}{3} = \frac{1}{3}, \binom{9}{4} = \frac{1}{4}, \binom{9}{5} = \frac{1}{5},$$

$$\binom{9}{6} = \frac{1}{6}, \binom{9}{7} = \frac{1}{7}, \binom{9}{8} = \frac{1}{8}, \binom{9}{9} = \frac{1}{9};$$

$$\binom{8}{1} = \alpha, \binom{8}{2} = \frac{\beta}{A}, \binom{8}{3} = \frac{\gamma}{2B}, \binom{8}{4} = \frac{\delta}{3C}, \binom{8}{5} = \frac{\delta}{4D},$$

$$\binom{8}{6} = \frac{\gamma}{5C}, \binom{8}{7} = \frac{\beta}{6B}, \binom{8}{8} = \frac{\alpha}{7A};$$

$$\binom{7}{1} = A, \binom{7}{2} = \beta, \binom{7}{3} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \binom{7}{4} = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}, \binom{7}{5} = \frac{\delta\delta A}{3\alpha CD},$$

$$\binom{7}{6} = \frac{\gamma\delta A}{4\alpha CD}, \binom{7}{7} = \frac{\beta\gamma\alpha}{5\alpha BC};$$

$$\binom{5}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}, \binom{6}{2} = B, \binom{6}{3} = \gamma, \binom{6}{4} = \frac{\gamma \delta}{\alpha \zeta}, \binom{6}{5} = \frac{\gamma \delta \delta A}{2 \alpha \rho \zeta D},$$

$$\binom{6}{6} = \frac{\gamma \delta \delta AB}{3 \alpha \beta \zeta \zeta D};$$

$$\binom{5}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}, \binom{5}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, \binom{5}{3} = C, \binom{5}{4} = \delta, \binom{5}{5} = \frac{\delta \delta}{\alpha D};$$

$$\binom{4}{1} = \frac{\alpha D}{\delta}, \binom{4}{2} = \frac{\alpha \beta \zeta D}{\gamma \delta A}, \binom{4}{3} = \frac{\alpha \zeta D}{\delta A}, \binom{4}{4} = D;$$

$$\binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\delta}, \binom{3}{2} = \frac{\alpha \beta \zeta D}{\delta \delta A}, \binom{3}{3} = \frac{\alpha \beta \zeta \zeta D}{\delta \delta AB};$$

$$\binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}, \binom{2}{2} = \frac{\alpha \beta BC}{\gamma \delta A};$$

$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Ordo harum formularum etiam in genere diagonaliter a sinistra ad dextram procedendo notari meretur, ubi quidem duo genera progressionum occurrunt, prout vel a prima ferie verticali, vel a suprema horizontali incipimus; hoc modo primum a ferie verticali incipiendo:

$$\binom{n-1}{1} = \alpha, \binom{n-2}{2} = \frac{\beta}{\alpha} \times \binom{n-1}{1}, \binom{n-3}{3} = \frac{\gamma}{\beta} \times \binom{n-2}{2}, \binom{n-4}{4} = \frac{\delta}{\gamma} \times \binom{n-3}{3} \quad \&c.$$

$$\binom{n-2}{1} = A, \binom{n-3}{2} = \frac{B}{A} \times \binom{n-2}{1}, \binom{n-4}{3} = \frac{C}{B} \times \binom{n-3}{2}, \binom{n-5}{4} = \frac{D}{C} \times \binom{n-4}{3}$$

$$\binom{n-3}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}, \binom{n-4}{2} = \frac{\beta C}{\gamma A} \times \binom{n-3}{1}, \binom{n-5}{3} = \frac{\gamma D}{\delta B} \times \binom{n-4}{2}, \binom{n-6}{4} = \frac{\delta E}{\epsilon \zeta} \times \binom{n-5}{3}$$

$$\binom{n-4}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}, \binom{n-5}{2} = \frac{\beta D}{\delta A} \times \binom{n-4}{1}, \binom{n-6}{3} = \frac{\gamma E}{\epsilon B} \times \binom{n-5}{2}, \binom{n-7}{4} = \frac{\delta F}{\zeta C} \times \binom{n-6}{3}$$

$$\binom{n-5}{1} = \frac{\alpha D}{\delta}, \binom{n-6}{2} = \frac{\beta E}{\epsilon A} \times \binom{n-5}{1}, \binom{n-7}{3} = \frac{\gamma F}{\zeta B} \times \binom{n-6}{2}, \binom{n-8}{4} = \frac{\delta G}{\eta \zeta} \times \binom{n-7}{3}$$

$$\binom{n-6}{1} = \frac{\alpha E}{\epsilon}, \binom{n-7}{2} = \frac{\beta F}{\zeta A} \times \binom{n-6}{1}, \binom{n-8}{3} = \frac{\gamma G}{\eta B} \times \binom{n-7}{2}, \binom{n-9}{4} = \frac{\delta H}{\theta \zeta} \times \binom{n-8}{3}$$

&c.

Deinde a suprema horizontali incipiendo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} &= 1, \binom{n-1}{2} = \frac{\beta}{A} \times \binom{n}{1}, \binom{n-2}{3} = \frac{\gamma A}{\delta B} \times \binom{n-1}{2}, \binom{n-3}{4} = \frac{\delta B}{\epsilon C} \times \binom{n-2}{3} \\ \binom{n}{2} &= \frac{1}{2}, \binom{n-1}{3} = \frac{\gamma}{B} \times \binom{n}{2}, \binom{n-2}{4} = \frac{\delta A}{\alpha C} \times \binom{n-1}{3}, \binom{n-3}{5} = \frac{\epsilon B}{\beta D} \times \binom{n-2}{4} \\ \binom{n}{3} &= \frac{1}{3}, \binom{n-1}{4} = \frac{\delta}{C} \times \binom{n}{3}, \binom{n-2}{5} = \frac{\epsilon A}{\alpha D} \times \binom{n-1}{4}, \binom{n-3}{6} = \frac{\zeta B}{\beta E} \times \binom{n-2}{5} \\ \binom{n}{4} &= \frac{1}{4}, \binom{n-1}{5} = \frac{\epsilon}{D} \times \binom{n}{4}, \binom{n-2}{6} = \frac{\zeta A}{\alpha E} \times \binom{n-1}{5}, \binom{n-3}{7} = \frac{\eta B}{\beta F} \times \binom{n-2}{6} \\ \binom{n}{5} &= \frac{1}{5}, \binom{n-1}{6} = \frac{\zeta}{E} \times \binom{n}{5}, \binom{n-2}{7} = \frac{\eta A}{\alpha F} \times \binom{n-1}{6}, \binom{n-3}{8} = \frac{\theta B}{\beta G} \times \binom{n-2}{7} \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

Ubi lex, qua hæ formulæ a se invicem pendent, satis est perspicua; si modo notemus, in utraque litterarum ferie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. & A, B, C, D &c. terminos primum antecedentes inter se esse æquales.

Conclusio.

Cum igitur formulas secundæ classis, sola concessa circuli quadratura, exhibere valeamus, formulæ tertiæ classis insuper requirunt quadraturam contentam vel hac formula

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = A, \text{ vel hac } \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\alpha}{A}$$

quandoquidem, data una, simul altera datur. Quod si istas formulas per productum infinitum exprimamus, earum valor reperitur:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \frac{12.14}{13.13} \quad \&c.$$

unde ejus quantitas vero proxime satis expedite colligi potest; simili modo est:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = 1 \cdot \frac{3.7}{5.5} \cdot \frac{6.10}{8.8} \cdot \frac{9.13}{11.11} \cdot \frac{12.16}{14.14} \quad \&c.$$

Deinde omnes formulas quartæ classis integrare poterimus si modo, præter circuli quadraturam, una ex his quatuor formulis fuerit cognita: $(\frac{2}{1})$, $(\frac{1}{1})$, $(\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{3})$, quæ præbent has formas:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = A;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{\alpha A}{\beta}; \int \frac{xx dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{\alpha}{2} A;$$

$$\int \frac{xx dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{xx dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{\beta}{A};$$

at per productum infinitum erit

$$A = \frac{3}{1.2} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{8.11}{9.10} \cdot \frac{12.15}{13.14} \cdot \frac{16.19}{17.18} \&c.$$

Quinta classis postulat duas quadraturas altiores: $(\frac{3}{1}) = A$, & $(\frac{2}{2}) = B$, quarum loco aliæ binæ ab his pendentes assumi possunt, quæ quidem faciliores videantur, etsi ob 5 numerum primum aliæ aliis vix simpliciores reputari queant.

Pro sexta classe etiam duæ quadraturæ requiruntur: $(\frac{4}{1}) = A$ & $(\frac{3}{2}) = B$. Verum hic loco alterius ea, quæ in tertia classe opus erat, assumi potest, ut unica tantum nova sit adhibenda. Cum enim sit

$$(\frac{2}{2}) = \int \frac{xx dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{\alpha BB}{\gamma A}$$

erit $\frac{2\alpha BB}{\gamma A} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$, quæ est formula ad classem tertiam requisita. Hac ergo data, si insuper innotescat formula:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = B, \text{ vel etiam}$$

$$\text{hæc } \left(\frac{4}{3}\right) = \int \frac{xx dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},$$

quæ sunt simplicissimæ in hoc genere, reliquæ omnes per has definiri poterunt. His autem combinatis patet fore:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{6\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Simili modo ex formulis quartæ classis colligitur:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

cujusmodi Theorematum ingens multitudo hinc deduci potest: inter quæ hoc imprimis est notabile:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)}} = \frac{\pi \sin. \frac{(m-n)\pi}{mn}}{(m-n) \sin. \frac{\pi}{m} \cdot \sin. \frac{\pi}{n}}$$

quod, si m & n sint numeri fracti, in hanc formam transmutatur:

$$\int \frac{x^{q-1} dx}{\sqrt[r]{(1-x^p)^r}} \cdot \int \frac{x^{s-1} dx}{\sqrt[p]{(1-x^r)^s}} = \frac{\pi \sin. \left(\frac{s}{r} - \frac{q}{p}\right) \pi}{(ps - qr) \sin. \frac{q}{p} \pi \cdot \sin. \frac{s}{p} \pi}$$

In genere vero est;

$$\left(\frac{n-p}{q}\right) \cdot \left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right) \left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p) \cdot \left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)}$$

quod hanc formam præbet:

$$\int \frac{x^p - 1 dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} \cdot \int \frac{x^q - 1 dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{(q-p)\pi}{n}}{n(q-p) \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n} \cdot \operatorname{fin.} \frac{q\pi}{n}}$$

unde non solum præcedentia Theoremata, fed alia plura facile derivantur. Posito enim $n = \frac{pq}{m}$ habebimus:

$$\int \frac{x^m - 1 dx}{\sqrt[p]{(1-x^q)^m}} \cdot \int \frac{x^m - 1 dx}{\sqrt[q]{(1-x^p)^m}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \left(\frac{m}{p} - \frac{m}{q} \right) \pi}{m(q-p) \operatorname{fin.} \frac{m\pi}{q} \cdot \operatorname{fin.} \frac{m\pi}{p}}$$

quam ita latius extendere licet:

$$\int \frac{x^p - 1 dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^q - 1 dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m} \right) \pi}{(mq-np) \operatorname{fin.} \frac{p}{m} \pi \cdot \operatorname{fin.} \frac{q}{n} \pi}$$

in qua si ponatur $n = 2q$ erit:

$$\int \frac{x^p - 1 dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^q - 1 dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{\pi \operatorname{cof.} \frac{p}{m} \pi}{q(m-2p) \operatorname{fin.} \frac{p}{m} \pi}$$

At in posteriori formula integrali si ponatur $x^{2q} = 1-y^2$ erit: $\int \frac{x^q - 1 dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{m}{2q} \int \frac{y^{m-p-1} dy}{\sqrt{(1-y^2)^p}}$, unde scripto x pro y

$$\int \frac{x^p - 1 dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1} dx}{\sqrt{(1-x^m)}} = \frac{2\pi \operatorname{cof.} \frac{p}{m} \pi}{m(m-2p) \operatorname{fin.} \frac{p}{m} \pi}$$

Simili modo si in genere ponatur, pro altera formula integrali, $1 - x^n = y^m$, fiet: $\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \frac{m}{n}$

$\int \frac{y^{m-p-1} dy}{\sqrt[n]{(1-y^m)^{n-q}}}$; unde, scripto iterum x pro y , obtinebitur:

$$\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{n\pi \sin. \left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right) \pi}{m(mq-np) \sin. \frac{p}{m} \pi \cdot \sin. \frac{q}{n} \pi}$$

qui valor reducitur ad: $\frac{n\pi}{m(mq-np)} (\cot. \frac{p}{m} \pi - \cot. \frac{q}{n} \pi)$.

Atque hinc ista forma concinnior resultat:

$$\int \frac{x^{\frac{m-r}{2}-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\frac{n-s}{2}}}} \cdot \int \frac{x^{\frac{m+r}{2}-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\frac{n+s}{2}}}} = \frac{2n\pi (\text{tang. } \frac{r\pi}{2m} - \text{tang. } \frac{s\pi}{2n})}{m(nr-ms)}$$

Cum fundamentum harum reductionum situm sit in hac

$$\text{æqualitate: } \left(\frac{n-p}{q}\right) \left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right) \left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p) \left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)},$$

quæ ad hanc formam reducitur:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right) \left(\frac{n-q}{p}\right) \left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n}{q-p}\right) \left(\frac{n-p}{p}\right) \left(\frac{n-q}{q}\right)$$

ejus veritas hoc modo directe ostendi potest.

Suntis in reductione §. VIII. tradita pro numeris ternis p , q , r his $n - q$, $q - p$, q habebimus:

$$\left(\frac{n-q}{q-p}\right) \left(\frac{n-p}{q}\right) = \left(\frac{n-q}{q}\right) \left(\frac{n}{q-p}\right)$$

tum vero sumtis eorum loco $n - q$, $q - p$, p erit

$$\left(\frac{n-q}{p}\right) \left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n-q}{q-p}\right) \left(\frac{n-p}{p}\right)$$

quibus

quibus æquationibus in se invicem ductis, & formula

$\left(\frac{n-q}{q-p}\right)$ utrinque communi per divisionem sublata, erit:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right) \cdot \left(\frac{n-q}{p}\right) \left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n}{q-p}\right) \left(\frac{n-p}{p}\right) \left(\frac{n-q}{q}\right).$$

Quin etiam hujusmodi ternarum æqualitas ab exponente n non pendens exhiberi potest, scilicet:

$$\left(\frac{s}{p}\right) \left(\frac{r+s}{q}\right) \left(\frac{p+s}{r}\right) = \left(\frac{r+s}{p}\right) \left(\frac{s}{q}\right) \left(\frac{q+s}{r}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) \left(\frac{r+s}{q}\right)$$

$$\left(\frac{p+r}{s}\right) = \left(\frac{r+s}{p}\right) \left(\frac{r}{q}\right) \left(\frac{q+r}{s}\right),$$

quæ quatuor adeo litteras ab n non pendentes involvit, ac simili est æqualitati inter binarum formularum producta:

$$\left(\frac{r}{p}\right) \left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q+r}{p}\right) \left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p+r}{r}\right).$$

Æqualitas autem inter ternarum formularum producta habetur etiam ista:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{r}{s}\right) \left(\frac{p+q}{r+s}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) \left(\frac{s}{p}\right) \left(\frac{q+r}{p+s}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{q}{s}\right) \left(\frac{p+r}{q+s}\right) =$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p+q}{r}\right) \left(\frac{p+q+r}{s}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p+q}{s}\right) \left(\frac{p+q+r}{r}\right) \text{ \&c.}$$

In his enim litteræ p, q, r, s utrumque inter se permu-
tari possunt.



Fautes à corriger dans les Mémoires précédens.

Page 1 ligne 8 après *fig. 1.* ajoutez *Pl. 1.*

P. 15 l. 19 au lieu de $\Delta : (x + ct)$ lisez $\Delta : (x - ct)$.

P. 22 l. 3 à compter d'en bas à la fin mettez 0 au lieu de σ .

P. 25 l. 4 au lieu de *plusieurs* lisez *différens*.

P. 27 l. 10 après *fig. 1.* ajout. *Pl. 11.*

P. 38 l. 2 à compter d'en bas au lieu de $5n + \beta$ lisez $5n + 6$.

P. 40 dans la troisième colonne au lieu de $n + 1$ au dénom. lisez $2n + 1$,

Ibid. dern. ligne au lieu de $\frac{1}{\gamma}$ lisez $\frac{1}{\lambda}$.

P. 42 ligne dern. au lieu de $(2\mu - 5)$ au numer. lisez $(2\mu - 6)$.

P. 46 l. 8 à compter d'en bas au lieu de $x(\Delta - x\Gamma)$ lisez $x(x\Delta - x\Gamma)$.

P. 47 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $(x\delta = x'\gamma')$ lisez $(x'\delta' - x'\gamma')$.

P. 52 l. 18 au lieu de $-v \cdot x\Delta$ lisez $-v \cdot x\Gamma + v \cdot x\Delta$.

P. 53 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $-ib(\beta v - x\Delta)$ lisez $-ib(bv - x\Delta)$.

P. 54 l. 3 à compter d'en bas au lieu de $2m'x'\gamma'$ lisez $am'x'\gamma'$.

P. 58 l. 4 au lieu de $18\pi\pi$ au numer. lisez $13\pi\pi$, & ligne suiv. au lieu de 36π au dénom. lisez $36\pi^2$.

P. 66 l. 6 à la fin ajoutez *AC*.

P. 79 l. 15 au lieu de $M = \frac{1}{2} \Gamma : (p - 2x)$ lisez $M = \frac{1}{2} \Gamma : p + \frac{1}{2}$

$\Gamma : (p - 2x)$.

P. 94 l. 8 au lieu de $-\frac{\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$ lisez $\frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$, & l. 4 à compt.

d'en bas au lieu de $-\pi\phi$ lisez $-\pi + \phi$.

P. 96 l. 2 au commenc. au lieu de t lisez s .

P. 102 l. 2 au lieu de $-\frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$ lisez $\frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$,

& ligne 4 au lieu de π mettez π' .

P. 103 l. 3 à compter d'en bas après $(d + 2)$ au numer. ajoutez *M*.

P. 116 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{m}{60} p$ lisez $\frac{m}{60}$ *pouces*, & au

lieu de $\frac{1}{30} p$ lisez $\frac{1}{30}$.

P. 117 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{1}{20} p$ lisez $\frac{1}{20}$.

P. 120 l. 3 à compter d'en bas au commencement. au lieu de $=$ mettez $-$.

P. 123 ligne piem. au lieu de ϕ ou lisez *ou* ϕ .

P. 138 lignes 3 & 16 au lieu de *&c.* lisez *&*.

P. 154 l. 9. au dessous de la barre écrivez ϕ .

P. 167 l. 4 au lieu de $\frac{\alpha C}{\beta}$ lisez $\frac{\alpha C}{\gamma}$.

SOLUTION

DE DIFFÉRENS PROBLÈMES

DE

CALCUL INTÉGRAL

PAR M. DE LA GRANGE.

Sur l'intégration de l'équation

$Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} + P \frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \dots (A),$
dans laquelle L, M, N &c. T sont des fonctions de t.

I. JE multiplie cette équation par $z dt$, z étant une variable indéterminée, j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int L z y dt + \int M z \frac{dy}{dt} dt + \int N z \frac{d^2y}{dt^2} dt + \int P z \frac{d^3y}{dt^3} dt + \&c. = \int T z dt;$$

je change les expressions $\int M z \frac{dy}{dt} dt$, $\int N z \frac{d^2y}{dt^2} dt$,

$\int P z \frac{d^3y}{dt^3} dt$ &c. en leurs égales, $M z y - \int \frac{d \cdot M z}{dt} y dt$,

$N z \frac{dy}{dt} - \frac{d \cdot N z}{dt} y + \int \frac{d^2 \cdot N z}{dt^2} y dt$, $P z \frac{d^2y}{dt^2} -$

$\frac{d \cdot P z}{dt} \times \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 \cdot P z}{dt^2} y - \int \frac{d^3 \cdot P z}{dt^3} y dt$ &c.; j'ai, en

ordonnant les termes par rapport à y ,

$$\begin{aligned}
 & y \left(M\zeta - \frac{d \cdot N\zeta}{dt} + \frac{d^2 \cdot P\zeta}{dt^2} - \&c. \right) + \\
 & \frac{dy}{dt} \left(N\zeta - \frac{d \cdot P\zeta}{dt} + \&c. \right) + \\
 & \frac{d^2 y}{dt^2} \left(P\zeta - \&c. \right) + \&c. + \\
 & \int \left(L\zeta - \frac{d \cdot M\zeta}{dt} + \frac{d^2 \cdot N\zeta}{dt^2} - \frac{d^3 \cdot P\zeta}{dt^3} + \&c. \right) y dt = \\
 & \int T\zeta dt.
 \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$L\zeta - \frac{d \cdot M\zeta}{dt} + \frac{d^2 \cdot N\zeta}{dt^2} - \frac{d^3 \cdot P\zeta}{dt^3} \&c. = 0 \dots (B),$$

& l'équation précédente se réduira à celle-ci

$$\begin{aligned}
 & y \left(M\zeta - \frac{d \cdot N\zeta}{dt} + \frac{d^2 \cdot P\zeta}{dt^2} - \&c. \right) + \\
 & \frac{dy}{dt} \left(N\zeta - \frac{d \cdot P\zeta}{dt} + \&c. \right) + \\
 & \frac{d^2 y}{dt^2} \left(P\zeta - \&c. \right) + \&c. = \int T\zeta dt \dots \dots (C),
 \end{aligned}$$

laquelle est d'un ordre moins élevé d'une unité que l'équation proposée (A).

II. Donc 1.^o si on peut trouver une valeur de ζ , laquelle satisfasse à l'équation (B), on aura tout de suite l'intégrale de l'équation proposée (A), en mettant cette valeur dans l'équation (C). 2.^o Si on avoit deux valeurs différentes de ζ , lesquelles satisfissent également à l'équation (B), on auroit, par la substitution successive de ces valeurs dans l'équation (C), deux intégrales de l'équation (A), à l'aide desquelles on élimineroit la plus haute différentielle de y ; & l'équation résultante seroit l'intégrale seconde de la proposée. (J'entends par intégrale première ou intégrale simplement, une équation qui est d'un ordre moins élevé d'une unité que la proposée; par intégrale seconde une équation qui est d'un ordre moins élevé

de deux unités; & ainsi de suite) 3.^o De même si on avoit trois valeurs différentes de ζ , on trouveroit trois équations intégrales; d'où éliminant les deux plus hautes différentielles de y , on auroit une équation qui seroit l'intégrale troisième de la proposée; & ainsi de suite. D'où il est aisé de conclure, qu'en connoissant un nombre de valeurs de ζ égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation (A), on pourra trouver l'intégrale finie, & algébrique de cette même équation.

III. Qu'on multiplie l'équation (B) par $y dt$, & qu'on en prenne l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe \int toutes les différences de ζ ; par des intégrations par parties, comme nous l'avons pratiqué sur l'équation (A), on aura, en changeant les signes,

$$y \left(M \zeta - \frac{d \cdot N \zeta}{dt} + \frac{d^2 \cdot P \zeta}{dt^2} - \&c. \right) +$$

$$\frac{dy}{dt} \left(N \zeta - \frac{d \cdot P \zeta}{dt} + \&c. \right) +$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \left(P \zeta - \&c. \right) + \&c. -$$

$$\int (L y + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2 y}{dt^2} + P \frac{d^3 y}{dt^3} + \&c.) \zeta dt = \text{const.}$$

Donc si on fait

$$L y + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2 y}{dt^2} + P \frac{d^3 y}{dt^3} + \&c. = 0 \dots (D)$$

& qu'on ordonne l'équation restante par rapport à ζ , on aura

$$\zeta \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt} + \frac{d^2 P}{dt^2} - \&c. \right) y + \left(N - \frac{dP}{dt} + \&c. \right) \frac{dy}{dt} \right. \\ \left. + \left(P - \&c. \right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \&c. \right\} -$$

$$\frac{d\zeta}{dt} \left\{ \left(N - \frac{dP}{dt} + \&c. \right) y + \left(P - \&c. \right) \frac{dy}{dt} + \&c. \right\} +$$

$$\frac{dz}{dt} \left\{ (P - \&c.) y + \&c. \right\} - \&c. = \text{const.} \quad (E)$$

IV. Donc, si on peut trouver une valeur de y qui satisfasse à l'équation (D) , on aura l'intégrale première de l'équation (B) ; si on a deux valeurs différentes de y , qui satisfassent à la même équation (D) , on aura l'intégrale seconde de l'équation (B) ; & ainsi de suite; de sorte que, si on connoissoit un nombre de valeurs de y égal à celui de l'exposant de l'équation (B) , on pourroit trouver l'intégrale finie & algébrique de cette même équation (*Art. II.*).

V. Cette dernière intégrale contiendra, comme l'on voit, autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle (B) ; car les équations (E) , d'où elle résulte, contiennent chacune une constante arbitraire. Donc si on fait successivement toutes ces constantes, moins une; égales à zéro, on aura autant d'intégrales particulières, & par conséquent autant de valeurs différentes de z , qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation (B) ; or il est facile de voir que cette équation est du même ordre que l'équation (A) (*Art. I.*); donc on trouvera aussi l'intégrale finie, & algébrique de cette dernière équation (*Art. II.*).

VI. Donc l'équation (A) , savoir

$$Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} + P \frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T$$

sera intégrable algébriquement toutes les fois qu'on aura m valeurs de y en t dans le cas de $T = 0$, m étant l'exposant de l'ordre de cette équation.

VII. Si on ne connoissoit que $m - 1$ valeurs de y , dans le cas de $T = 0$, on pourroit néanmoins trouver l'intégrale algébrique de l'équation (A) . Car on auroit dans ce cas $m - 1$ équations (E) ; d'où éliminant les

plus hautes différences de z , on parviendroit à une équation de cette forme $Vz + X \frac{dz}{dt} = Y$, (V , X , & Y étant des fonctions de t) laquelle donneroit

$$z = e^{-\int \frac{V}{X} dt} \left(\text{const.} + \int \frac{Y e^{\int \frac{V}{X} dt}}{X} dt \right); \text{ donc \&c.}$$

VIII. Donc l'équation (A) sera aussi intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura $m - 1$ valeurs de y dans le cas de $T = 0$.

IX. Si les valeurs connues de y n'étoient qu'au nombre de $m - 2$, alors il faudroit, pour avoir les m valeurs de z , intégrer une équation de cette forme

$$Vz + X \frac{dz}{dt} + Y \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \text{ laquelle n'est intégrable que dans quelques cas particuliers; \& ainsi de suite.}$$

X. Au reste, si on ne connoissoit pas d'avance les valeurs particuliers de y dans le cas de $T = 0$, il vaudroit mieux chercher directement les valeurs de z par la résolution de l'équation (B), laquelle n'est guere plus compliquée que l'équation (D).

XI. Soit l'équation

$$Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} = T,$$

pour laquelle on connoit deux valeurs particulières de y , dans le cas de $T = 0$.

On aura d'abord l'équation en z (*Art. III.*)

$$z \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt} \right) y + N \frac{dy}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} Ny = \text{const.}$$

donc supposant que y_1 , & y_2 soient les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation $Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} = 0$, on aura

$$\zeta \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_1 + N \frac{d \cdot y_1}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_1 = A,$$

$$\zeta \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_2 + N \frac{d \cdot y_2}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_2 = B,$$

A , & B étant deux constantes arbitraires.

On tire de ces deux équations

$$\zeta = \frac{A y_2 - B y_1}{N \left(y_2 \frac{d \cdot y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt} \right)}$$

Soit d'abord $A = 0$, on aura

$$\zeta = - \frac{B}{N} \times \frac{y_1}{y_2 \frac{d \cdot y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt}} = \zeta_1$$

Soit ensuite $B = 0$, on aura

$$\zeta = \frac{A}{N} \times \frac{y_2}{y_2 \frac{d \cdot y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt}} = \zeta_2.$$

Ayant deux valeurs de ζ , savoir ζ_1 , & ζ_2 , on les substituera successivement dans l'équation (C), & l'on aura

$$y \left(M \zeta_1 - \frac{d \cdot N z_1}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} N \zeta_1 = \int T \zeta_1 dt,$$

$$y \left(M \zeta_2 - \frac{d \cdot N z_2}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} N \zeta_2 = \int T \zeta_2 dt;$$

d'où l'on tire :

$$y = \frac{z_2 \int T \zeta_1 dt - z_1 \int T \zeta_2 dt}{N \left(\zeta_1 \frac{d \cdot z_2}{dt} - \zeta_2 \frac{d \cdot z_1}{dt} \right)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (F)$$

C'est la valeur générale, & complète de y qui satisfait à l'équation proposée.

Si on ne connoissoit que la valeur y_1 , on auroit simplement l'équation

$$\zeta \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_1 + N \frac{d \cdot y_1}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_1 = A;$$

laquelle

laquelle étant intégrée donneroit

$$\zeta = e^{\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N dt} + \frac{d \cdot y_1}{y_1 dt} \right) dt}$$

$$\times \left\{ \text{const.} - A \int \frac{e^{-\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N dt} + \frac{d \cdot y_1}{y_1 dt} \right) dt}}{N y_1} dt \right\}$$

ou bien

$$\zeta = \frac{y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} \left\{ C - A \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y_1)^2} dt \right\}.$$

Donc, en faisant $A = 0$, on auroit

$$\zeta = \frac{C y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} = \zeta_1,$$

& en faisant $C = 0$

$$\zeta = - \frac{A y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y_1)^2} dt = \zeta_2.$$

Supposons que les quantités L , M , N soient constantes, on aura, comme l'on fait, pour les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation $Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $e^{k_1 t}$, & $e^{k_2 t}$; k_1 , & k_2 , étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$; donc $y_1 = e^{k_1 t}$, $y_2 = e^{k_2 t}$; & par conséquent $\zeta_1 = - \frac{B}{N} \times \frac{e^{-k_2 t}}{k_1 - k_2}$,

$$\zeta_2 = \frac{A}{N} \times \frac{e^{-k_1 t}}{k_1 - k_2}; \text{ donc}$$

$$y = \frac{e^{k_2 t} \int T e^{-k_2 t} dt - e^{k_1 t} \int T e^{-k_1 t} dt}{N(k_2 - k_1)}$$

Si on vouloit employer les valeurs de ζ_1 , & de ζ_2 trouvées à la fin de l'Article précédent, on auroit

$\zeta_1 = \frac{C y_1}{N} e^{\frac{M}{N} t}$, & $\zeta_2 = -\frac{A y_1}{N} e^{\frac{M}{N} t} \int \frac{e^{-\frac{M}{N} t}}{(y_1)^2} dt$
 ou bien, en mettant pour y_1 sa valeur $e^{k_1 t}$, $\zeta_1 = \frac{C}{N}$
 $e^{(k_1 + \frac{M}{N}) t}$, & $\zeta_2 = \frac{A}{M + 2 N k_1} e^{-k_1 t}$. Or k_1 ,
 & k_2 étant les racines de l'équation $L + M k + N k^2 = 0$,
 on aura $k_1 + k_2 = -\frac{M}{N}$; donc $k_1 + \frac{M}{N} = -k_2$,
 & $M + 2 N k_1 = N (k_1 - k_2)$; donc en
 faisant $C = -\frac{B}{k_1 - k_2}$, les valeurs de ζ_1 , & de ζ_2
 feront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourroient encore se trouver d'une manière
 plus simple par la remarque de l'Article X. Car l'équa-
 tion (B) fera dans le cas présent $L \zeta - M \frac{d\zeta}{dt} + N \frac{d^2\zeta}{dt^2}$
 $= 0$; d'où l'on tire $\zeta = F e^{h_1 t} = \zeta_1$, & $\zeta = G e^{h_2 t}$
 $= \zeta_2$, F, G étant deux constantes arbitraires, & h_1, h_2
 les racines de l'équation $L - M h + N h^2 = 0$; de
 sorte qu'on aura $h_1 = -k_1$, & $h_2 = -k_2$.

Recherche des cas d'intégration de l'équation

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + a y t^m = T.$$

XII. On aura ici $L = a t^{2m}$, $M = 0$, & $N = 1$;
 donc l'équation (B) deviendra

$$a \zeta t^{2m} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (G).$$

Supposons dt variable, nous aurons au lieu du terme

$\frac{d^2 z}{dt^2}$, ces deux-ci $\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz dt}{dt^2}$; donc faisant cette substitution, & divisant toute l'équation par t^{2m} , on aura la transformée

$$\frac{d^2 z}{t^{2m} dt^2} - \frac{dz dt}{t^{2m} dt^2} + a z = 0.$$

Soit maintenant $t^m dt = du$, c'est-à-dire $u = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, on aura, en prenant du pour constante, $\frac{d^2 t}{dt^2} + m \frac{dt}{t} = 0$, c'est-à-dire, à cause de $dt = t^{-m} du$, $\frac{d^2 t}{dt^2} = -m t^{-m-1} du = -\frac{m}{m+1} \times \frac{du}{u}$; donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, & faisant pour abréger $\frac{m}{m+1} = n$, on aura

$$\frac{d^2 z}{du^2} + n \frac{dz}{udu} + a z = 0.$$

Si n étoit $= 0$ on auroit $\frac{d^2 z}{du^2} + a z = 0$, par conséquent $z = e^{ku}$, k étant une des racines de l'équation $k^2 + a = 0$.

Supposons donc $z = x e^{ku}$, on aura après les substitutions & les réductions

$$\frac{d^2 x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right) \frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0.$$

Qu'on fasse $x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2} + \&c.$; on trouvera, en égalant à zero les termes homogènes, les équations suivantes

$$r(r-1)A + nrA = 0$$

$$(r+1)rB + 2krA + n(r+1)B + nkA = 0$$

$$(r+2)(r+1)C + 2k(r+1)B + n(r+2)C + nkB = 0,$$

& ainsi de suite.

D'où l'on tire premièrement, ou $r = 0$, ou $r = 1 + n = 0$, favoir $r = 1 - n$, ensuite

$$B = - \frac{2r + n}{(r + 1)(r + n)} k A$$

$$C = - \frac{2(r + 1) + n}{(r + 2)(r + 1 + n)} k B$$

$$D = - \frac{3(r + 2) + n}{(r + 3)(r + 2 + n)} k C$$

&c.

En combinant les deux cas de $r = 0$, & de $r = 1 - n$, & faisant $1 - n = v$, & $A = 1$, on aura

$$A = 1$$

$$B = - k$$

$$C = \frac{3 + v}{2(2 + v)} k^2$$

$$D = - \frac{(3 + v)(5 + v)}{2 \cdot 3(2 + v)(3 + v)} k^3$$

$$E = \frac{(3 + v)(5 + v)(7 + v)}{2 \cdot 3 \cdot 4(2 + v)(3 + v)(4 + v)} k^4$$

&c.

Le signe supérieur étant pour le premier cas, & le signe inférieur pour le second cas; d'où l'on voit que la série se terminera toutes les fois que $v =$ à un nombre quelconque impair positif ou négatif, à l'exception de ± 1 .

Ayant ainsi la valeur de x , on aura celle de z , par la supposition de $z = x e^{ku}$; & comme l'équation $k^2 + a = 0$ donne deux valeurs de k , favoir $k = \pm \sqrt{-a}$, on aura aussi deux valeurs de z , qu'on nommera, comme ci-dessus, z_1 , & z_2 , & qui étant substituées dans la formule (F) de l'Article précédent donneront la valeur de y .

Si a est une quantité positive, les deux valeurs de k seront imaginaires. Dans ce cas la valeur de x fera de cette forme $P \pm Q \sqrt{-1}$; & par conséquent on aura

$\zeta = (P \pm Q\sqrt{-1}) e^{\pm u\sqrt{a}\sqrt{-1}} =$ (en mettant au lieu de $e^{\pm u\sqrt{a}\sqrt{-1}}$ sa valeur, $\cos. u\sqrt{a} \pm \sin. u\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$) $P \cos. u\sqrt{a} - Q \sin. u\sqrt{a} \pm (P \sin. u\sqrt{a} + Q \cos. u\sqrt{a})\sqrt{-1}$.

Soit donc ; pour abréger

$$P \cos. u\sqrt{a} - Q \sin. u\sqrt{a} = R$$

$$P \sin. u\sqrt{a} - Q \cos. u\sqrt{a} = S,$$

on aura $R + S\sqrt{-1} = \zeta_1$, & $R - S\sqrt{-1} = \zeta_2$, & la valeur de y deviendra

$$y = \frac{R \int T S dt - S \int T R dt}{N (S \frac{dR}{dt} - R \frac{dS}{dt})}.$$

XIII. Si $m = 1$, on aura $n = \infty$, & la valeur de x fera exprimée par une suite infinie ; mais en reprenant l'équation (G), on aura

$$\frac{az}{r^2} + \frac{d^2z}{dr^2} = 0;$$

laquelle en faisant $\zeta = r^r$, se change en

$$a + r(r - 1) = 0,$$

d'où l'on tire $r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - a\right)}$.

Ainsi l'on aura les deux valeurs de ζ .

XIV. Soit $T = 0$ & $y = e^{\int q dt}$, l'équation proposée se changera en celle-ci

$$\frac{dq}{dt} + q + at^m = 0,$$

laquelle est connue sous le nom d'équation de Riccati ; on trouvera donc par la méthode précédente l'intégrale de cette même équation.

Intégration de l'équation

$$Ay + B(h + kt) \frac{dy}{dt} + C(h + kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \\ D(h + kt)^3 \frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \quad (H)$$

A, B, C &c. étant des coefficients constants.

XV. En comparant cette équation avec la formule générale (A), on aura

$$L = A, \quad M = B(h + kt), \quad N = C(h + kt)^2 \\ P = D(h + kt)^3 \&c.$$

Donc les équations (B) & (C) deviendront

$$A\zeta - B \frac{d \cdot (h + kt)\zeta}{dt} + C \frac{d^2 \cdot (h + kt)^2 \zeta}{dt^2} - \\ D \frac{d^3 \cdot (h + kt)^3 \zeta}{dt^3} + \&c. = 0 \quad (I)$$

$$y \left\{ B(h + kt)\zeta - C \frac{d \cdot (h + kt)^2 \zeta}{dt} + \\ D \frac{d^2 \cdot (h + kt)^3 \zeta}{dt^2} - \&c. \right\} + \\ \frac{dy}{dt} \left\{ C(h + kt)^2 \zeta - D \frac{d \cdot (h + kt)^3 \zeta}{dt} + \&c. \right\} + \\ \frac{d^2y}{dt^2} \left\{ D(h + kt)^3 \zeta - \&c. \right\} + \&c. \\ = \int T \zeta dt \quad (K)$$

Soit maintenant $\zeta = (h + kt)^r$, & l'équation (I) étant divisée par $(h + kt)^r$ se réduira à celle-ci

$$A - Bk(r + 1) + Ck^2(r + 1)(r + 2) - \\ Dk^3(r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. = 0 \quad (L)$$

laquelle étant ordonnée par rapport à r montera à un degré, dont l'exposant sera le même que celui de l'ordre de l'équation proposée (H).

Faisant la même substitution dans l'équation (K), on aura, après avoir divisé par $(h + kt)^{r+1}$

$$y \left\{ B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \&c. \right\} + \\ \frac{dy}{dt} \left\{ C - Dk(r+3) + \&c. \right\} (h+kt) + \\ \frac{d^2y}{dt^2} \left\{ D - \&c. \right\} (h+kt)^2 + \&c.$$

$$= (h+kt)^{-r-1} \int T (h+kt)^r dt;$$

équation qui devra avoir lieu, en mettant pour r chacune des racines de l'équation (L) .

Soit pour abréger

$$B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \&c. = \alpha$$

$$C - Dk(r+3) + \&c. = \beta$$

$$D - \&c. = \gamma$$

&c.

$$(h+kt)^{-r-1} \int T (h+kt)^r dt = \theta,$$

l'équation dont il s'agit se réduira à celle-ci

$$\alpha y + \beta (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta \quad (M).$$

Supposons que r_1, r_2, r_3 &c. soient les racines de l'équation (L) , & que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ &c. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ &c. &c. soient ce que deviennent les quantités α, β &c., lorsque r devient successivement r_1, r_2, r_3 &c.; au lieu de l'équation (M) , on aura celles-ci

$$\alpha_1 y + \beta_1 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma_1 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} \\ + \&c. = \theta_1 \quad (M_1)$$

$$\alpha_2 y + \beta_2 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma_2 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} \\ + \&c. = \theta_2 \quad (M_2)$$

$$\alpha_3 y + \beta_3 (h+kt) \frac{dy}{dt} + \gamma_3 (h+kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} \\ + \&c. = \theta_3 \quad (M_3)$$

&c.

dont le nombre sera le même que celui des quantités in-

connues y , $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., comme il est facile de s'en assurer. Ainsi en éliminant les quantités $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., on aura la valeur de y .

Pour cet effet je multiplie l'équation (M_1) par M' , l'équation (M_2) par M'' , & ainsi de suite; après quoi je les ajoute ensemble, j'ai

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 M + \alpha_2 M' + \alpha_3 M'' + \&c.) y + \\ & (\beta_1 M + \beta_2 M' + \beta_3 M'' + \&c.) (h + kt) \frac{dy}{dt} + \\ & (\gamma_1 M + \gamma_2 M' + \gamma_3 M'' + \&c.) (h + kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. \\ & = M'\theta_1 + M''\theta_2 + M'''\theta_3 + \&c. \end{aligned}$$

Je suppose

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 M + \beta_2 M' + \beta_3 M'' + \&c. &= 0 \\ \gamma_1 M + \gamma_2 M' + \gamma_3 M'' + \&c. &= 0 \\ \&c. & \end{aligned} \right\} \dots (N)$$

j'aurai

$$y = \frac{M'\theta_1 + M''\theta_2 + M'''\theta_3 + \&c.}{M\alpha_1 + M'\alpha_2 + M''\alpha_3 + \&c.} \dots (P)$$

& toute la difficulté se réduira à déterminer les quantités M , M' , M'' &c., par le moyen des équations (N) .

Or si on substitue dans ces équations, les valeurs de β_1 , γ_1 , &c. β_2 , γ_2 &c. &c.; & qu'on ordonne les termes par rapport aux puissances de r , on verra qu'elles se réduisent à celles-ci

$$\begin{aligned} M + M' + M'' + \&c. + M^m &= 0 \\ M'r_1 + M'r_2 + M''r_3 + \&c. + M^m (rm) &= 0 \\ M(r_1)^2 + M'(r_2)^2 + M''(r_3)^2 + \&c. + M^m (rm)^2 &= 0 \\ M(r_1)^3 + M'(r_2)^3 + M''(r_3)^3 + \&c. + M^m (rm)^3 &= 0 \\ \&c. \\ M(r_1)^{m-2} + M'(r_2)^{m-2} + M''(r_3)^{m-2} + \&c. + M^m (rm)^{m-2} &= 0 \end{aligned}$$

m étant

m étant l'exposant de l'ordre de l'équation proposée (H), & la quantité $M' a_1 + M'' a_2 + M''' a_3 + \&c.$ deviendra

$$\pm V k^{m-1} [M' (r_1)^{m-1} + M'' (r_2)^{m-1} + M''' (r_3)^{m-1} + \&c. + M^m (r_m)^{m-1}]$$

dans laquelle V est le coefficient du terme $(h + k t)^m \frac{d^m y}{dt^m}$ de la même équation, le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & le signe inférieur pour celui de m pair.

Telles sont les équations, par lesquelles il faudra déterminer les inconnues M' , M'' , M''' &c. M^m .

Pour rendre cette recherche plus générale nous supposons que l'on ait les équations suivantes

$$M' + M'' + M''' + \&c. + M^m = R$$

$$M' r_1 + M'' r_2 + M''' r_3 + \&c. + M^m (r_m) = R'$$

$$M' (r_1)^2 + M'' (r_2)^2 + M''' (r_3)^2 + \&c. + M^m (r_m)^2 = R''$$

$$M' (r_1)^3 + M'' (r_2)^3 + M''' (r_3)^3 + \&c. + M^m (r_m)^3 = R'''$$

&c.

$$M' (r_1)^{m-1} + M'' (r_2)^{m-1} + M''' (r_3)^{m-1} + \&c. + M^m (r_m)^{m-1} = R^{m-1}$$

(Je prends ici une équation de plus afin que l'on ait autant d'équations que d'inconnues).

On multipliera la première de ces équations par N , la seconde par N' , la troisième par N'' , & ainsi des autres; on les ajoutera ensemble, & l'on aura

$$M [N + N' r_1 + N'' (r_1)^2 + N''' (r_1)^3 + \&c. + N^{m-1} (r_1)^{m-1}] +$$

$$M' [N + N' r_2 + N'' (r_2)^2 + N''' (r_2)^3 + \&c. + N^{m-1} (r_2)^{m-1}] +$$

$$M'' [N + N' r_3 + N'' (r_3)^2 + N''' (r_3)^3 + \&c. + N^{m-1} (r_3)^{m-1}] + \&c. +$$

$$M^m [N + N' (r_m) + N'' (r_m)^2 + N''' (r_m)^3 + \&c. + N^{m-1} (r_m)^{m-1}] =$$

$$N R + N' R' + N'' R'' + N''' R''' + \&c. + N^{m-1} R^{m-1}.$$

b b

Maintenant pour avoir la valeur d'une M quelconque, comme M^μ , il n'y aura qu'à supposer $= 0$ les quantités qui multiplient routes les autres M , & l'on aura

$$M^\mu = \frac{NR + N'R' + N''R'' + \&c. + N^{m-1}R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + N'''(r\mu)^3 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}} \quad (Q)$$

Et les quantités N , N' , N'' &c. N^{m-1} feront déterminées par ces équations

$$N + N'r_1 + N''(r_1)^2 + \&c. + N^{m-1}(r_1)^{m-1} = 0$$

$$N + N'r_2 + N''(r_2)^2 + \&c. + N^{m-1}(r_2)^{m-1} = 0$$

&c ainsi de suite jusqu'à

$$N + N'(rm) + N''(rm)^2 + \&c. + N^{m-1}(rm)^{m-1} = 0$$

à l'exception de

$$N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1} = 0.$$

c'est-à-dire qu'on aura l'équation

$$N + N'r + N''r^2 + N'''r^3 + \&c. + N^{m-1}r^{m-1} = 0$$

laquelle devra avoir lieu en mettant successivement, au lieu de r , r_1 , r_2 , r_3 , &c. (rm) à l'exception de $(r\mu)$.

Or comme r_1 , r_2 , r_3 &c. (rm) , sont les racines de l'équation (L) , si on représente cette équation par $a + br + cr^2 + dr^3 + \&c. + tu^{m-1} + ur^m$, on aura par la théorie des équations

$$1 + \frac{N'}{N}r + \frac{N''}{N}r^2 + \frac{N'''}{N}r^3 + \&c. + \frac{N^{m-1}}{N}r^{m-1}$$

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}r^2 + \frac{d}{a}r^3 + \&c. + \frac{u}{a}r^m}{1 - \frac{r}{(r\mu)}};$$

donc, multipliant par $1 - \frac{r}{(r\mu)}$, & comparant les termes, on aura

$$\frac{N'}{N} - \frac{1}{(r\mu)} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{N''}{N} = \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N'}{N} = \frac{c}{a};$$

$$\frac{N'''}{N} = \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N''}{N} = \frac{d}{a}$$

&c.

d'où l'on tire

$$N = \frac{N}{a(r\mu)} \times \left\{ a + b(r\mu) \right\}$$

$$N' = \frac{N}{a(r\mu)^2} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 \right\}$$

$$N'' = \frac{N}{a(r\mu)^3} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + d(r\mu)^3 \right\}$$

&c.

$$N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + d(r\mu)^3 \right. \\ \left. + \&c. + t(r\mu)^{m-1} \right\}.$$

Faisant ces substitutions dans la formule (Q), on verra que la quantité N disparaîtra d'elle même; de sorte que l'on aura la valeur de chacun des coefficients M .

Soit maintenant $R = 0$, $R^2 = 0$, $R'' = 0$, &c. $R^{m-2} = 0$, on aura

$$M^u = \frac{N^{m-1} R^{m-1}}{N + N(r\mu) + N'(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}$$

$$\text{Or } N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + \&c. \right. \\ \left. + t(r\mu)^{m-1} \right\}; \& \text{ comme } a + br + cr^2 + \&c.$$

$+ tr^{m-1} + ur^m = 0$, on a, en mettant $(r\mu)$ au lieu de r , $a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + \&c. + t(r\mu)^{m-1} = -u(r\mu)^m$; donc

$$N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times -u(r\mu)^m = -\frac{Nu}{a}(r\mu).$$

De plus on a

$$\frac{N + N' r + N'' r^2 + \&c. + N^{m-1} r^{m-1}}{N} = \frac{a + b r + c r^2 + \&c. + u r^m}{a \left[1 - \frac{r}{(r\mu)} \right]}$$

donc, si on fait pareillement $r = (r\mu)$, on aura, en prenant la différence du numérateur & du dénominateur, à cause que l'un & l'autre s'évanouissent dans ce cas,

$$\frac{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}{N} = \frac{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c. + m u (r\mu)^{m-1}}{a \frac{(r\mu)}{(r\mu)^m}}$$

$$\text{donc } M^u = \frac{u R^{m-1}}{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c.}$$

Soit

$$A - Bk(r+1) + Ck^2(r+1)(r+2) - \&c. + V k^m (r+1)(r+2) \dots (r+m) = P,$$

de sorte que l'équation (.L) soit représentée par $P = 0$; on aura

$$a + b r + c r^2 + \&c. + u r^m = P;$$

donc $u = \mp V k^m$, (le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & l'inférieur pour celui de m pair);

$$\&c. \quad b + 2c r + 3d r^2 + \&c. = \frac{dP}{dr}.$$

Donc, si on fait $\frac{dP}{dr} = Q$, & qu'on dénote par Q_1, Q_2, Q_3 &c. le valeurs de Q , lorsque r devient r_1, r_2, r_3 &c., aura

$$M = \frac{+V k^m R^{m-1}}{Q_1}, \quad M' = \frac{+V k^m R^{m-1}}{Q_2} \quad \&c.$$

Substituant donc ces valeurs dans la formule (P), & faisant attention que

$$M' \alpha_1 + M'' \alpha_2 + M''' \alpha_3 + \&c. = \pm V k^{m-1} \\ \times [M'(r_1)^{m-1} + M''(r_2)^{m-1} + M'''(r_3)^{m-1} + \&c.] \\ = \pm V k^{m-1} R^{m-1}, \text{ on aura enfin}$$

$$y = -k \left\{ \frac{\theta_1}{Q_1} + \frac{\theta_2}{Q_2} + \frac{\theta_3}{Q_3} + \&c. \right\} \quad (R)$$

D'où l'on voit que chaque racine de l'équation $P = 0$ donne dans la valeur de y un terme correspondant tel que $-k \frac{\theta}{Q}$.

XVI. Toute la difficulté se réduit donc à résoudre l'équation $P = 0$; or il peut arriver deux cas qu'il est bon d'examiner; le premier est celui où cette équation auroit des racines égales, le second celui où elle auroit des racines imaginaires.

1.^o Supposons que l'on trouve deux racines égales, par exemple, $r_2 = r_1$; on fera $r_2 = r_1 + \omega$, ω étant une quantité évanouissante, & comme P peut être représenté en général par $(r - r_1)(r - r_2)\Pi$, on aura

$$Q = \frac{dP}{dr} = (r - r_2)\Pi + (r - r_1)\Pi + (r - r_1)$$

$(r - r_2) \frac{d\Pi}{dr}$; donc faisant successivement $r = r_1$, & $= r_2$, & substituant $r_1 + \omega$ au lieu de r_2 , on aura

$Q_1 = -\omega \Pi_1$, & $Q_2 = \omega \Pi_1$, Π_1 étant la valeur de Π , lorsque $r = r_1$. Pour trouver cette valeur on remarquera que, puisque $r_2 = r_1$, on a $(r - r_1)^2 \Pi = P$;

d'où l'on tire, en différenciant deux fois, $2\Pi + 4$

$$(r - r_1) \frac{d\Pi}{dr} + (r - r_1)^2 \frac{d^2\Pi}{dr^2} = \frac{d^2P}{dr^2} = R; \text{ \& par conséquent, en faisant } r = r_1, 2\Pi_1 = R_1, \text{ \& } \Pi_1 = \frac{R_1}{2}; \text{ donc } Q_1 = -\frac{\omega}{2} R_1, \text{ \& } Q_2 = \frac{\omega}{2} R_1.$$

Maintenant on a

$\theta_1 = (h + kt)^{-r_1-1} \int T (h + kt)^{r_1} dt$, &
 $\theta_2 = (h + kt)^{-r_2-1} \int T (h + kt)^{r_2} dt$;
 or $(h + kt)^{-r_2-1} = (h + kt)^{-r_1-1-\omega} =$
 $(h + kt)^{-r_1-1} [1 - \omega l(h + kt) \text{ \&c.}]$, & de
 même $(h + kt)^{r_2} = (h + kt)^{r_1} [1 + \omega l(h + kt)]$;
 donc négligeant les ω^2 on aura $\theta_2 = \theta_1 + \omega (h + kt)^{-r_1-1}$
 $\times [\int T (h + kt)^{r_1} l(h + kt) dt - l(h + kt) \times$
 $\int T (h + kt)^{r_1} dt]$, ou bien

$$\theta_2 = \theta_1 - \omega (h + kt)^{-r_1-1} \int \frac{k dt}{b+kt} \int T (h + kt)^{r_1} dt;$$

donc faisant ces substitutions dans les termes $-k \frac{\theta_1}{Q_1} -$

$k \frac{\theta_2}{Q_2}$ de la valeur de y , lesquels répondent aux racines
 égales r_1, r_2 , & effaçant ce qui se détruit, on aura

$$-k \frac{\theta_1}{Q_1} - k \frac{\theta_2}{Q_2} = k \frac{(b+kt)^{-r_1-1}}{R_1} \int \frac{k dt}{b+kt} \int T (h+kt)^{r_1} dt.$$

On résoudre de même le cas de trois racines égales, en
 faisant $r_2 = r_1 + \omega$, $r_3 = r_1 + \eta$, ω, η étant deux
 quantités infiniment petites, & ayant égard aux quantités
 du second ordre. De cette manière on trouvera que les

trois termes $-k \frac{\theta_1}{Q_1} - k \frac{\theta_2}{Q_2} - k \frac{\theta_3}{Q_3}$ deviendront

$$-k \frac{(b+kt)^{-r_1-1}}{S_1} \int \frac{k dt}{b+kt} \int \frac{k dt}{b+kt} \int T (h + kt)^{r_1} dt,$$

S étant $= \frac{d^3 P}{d r^3}$, & S_1 exprimant la valeur de S , lorsque
 $r = r_1$; & ainsi de suite.

2.^o Supposons maintenant que les deux racines r_1 , &
 r_2 soient imaginaires, en sorte que $r_1 = F + G\sqrt{-1}$,
 & $r_2 = F - G\sqrt{-1}$; il est facile de voir que les
 quantités Q_1 , & Q_2 seront de cette forme $Q_1 =$
 $M + N\sqrt{-1}$, $Q_2 = M - N\sqrt{-1}$; de plus les quan-

tités $(h + kt)^{-r_1 - 1}$, & $(h + kt)^{r_1}$ deviendront $(h + kt)^{-F-1}(h + kt)^{-G\sqrt{-1}}$, & $(h + kt)^F \times (h + kt)^{G\sqrt{-1}}$. Or soit $(h + kt)^{G\sqrt{-1}} = \lambda$ (cof. $\phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$), on aura par les logarithmes $G\sqrt{-1} \log(h + kt) = \log \lambda + \phi \sqrt{-1}$, donc $\log \lambda = 0$, favoir $\lambda = 1$, & $\phi = G \log(h + kt)$, donc $(h + kt)^{G\sqrt{-1}} = \text{cof. } G \log(h + kt) + \sin. G \log(h + kt) \cdot \sqrt{-1}$, & prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$, $(h + kt)^{-G\sqrt{-1}} = \text{cof. } G \log(h + kt) - \sin. G \log(h + kt) \cdot \sqrt{-1}$; par ces substitutions on réduira les quantités θ_1 , & θ_2 à la forme $X + Y\sqrt{-1}$, de sorte que les deux termes $-k \frac{\theta_1}{Q_1} - k \frac{\theta_2}{Q_2}$ de l'expression de y se changeront en $-k \frac{X + Y\sqrt{-1}}{M + N\sqrt{-1}} - k \frac{X - Y\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} = -2 \frac{MX + NY}{M^2 + N^2}$:

Application à l'équation

$$A y + B \frac{dy}{dt} + C \frac{d^2y}{dt^2} + D \frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T.$$

XVI. On aura dans ce cas $h = 1$, & $k = 0$, mais comme la supposition de $k = 0$ donneroit $P = A = 0$, on supposera simplement k infiniment petite, & ensuite r infiniment grande, en sorte que $kr = \rho$ à une quantité finie ρ ; de cette manière on aura

$$P = A - B\rho + C\rho^2 - D\rho^3 + \&c. = 0;$$

équation d'où l'on tirera autant de valeurs de ρ qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle, de sorte que, si on appelle ρ_1, ρ_2, ρ_3 &c.

les racines de cette équation, on aura $r_1 = \frac{\rho_1}{k}, r_2 =$

$$\frac{\rho_2}{k} \&c. \text{ Or on a } Q = \frac{dP}{dr}, \text{ donc si on fait } \frac{dP}{d\rho} = q,$$

on aura $Q = kq$, & par conséquent $Q_1 = kq_1$, $Q_2 = kq_2$ &c., donc

$$y = - \left(\frac{\theta_1}{q_1} + \frac{\theta_2}{q_2} + \frac{\theta_3}{q_3} + \&c. \right).$$

Or $\theta = (h + kt)^{-r-1} \int T (h + kt)^r dt$, donc si on fait $h = 1$, & qu'on mette $\frac{\rho}{k}$ au lieu de r , on aura

$$\text{à cause de } r = \infty, \theta = (1 + kt)^{-\frac{\rho}{k}} \int T (1 + kt)^{\frac{\rho}{k}} dt;$$

mais on fait que $(1 + kt)^{\pm \frac{\rho}{k}} = (\text{dans le cas de } k \text{ infiniment petite}) e^{\pm \rho t}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1; donc $\theta = e^{-\rho t} \int T e^{\rho t} dt$, & par conséquent $\theta_1 = e^{-\rho_1 t} \int T e^{\rho_1 t} dt$, $\theta_2 = e^{-\rho_2 t} \int T e^{\rho_2 t} dt$ &c.

Si l'équation $P = 0$ a deux racines égales on transformera d'abord les termes $-\frac{\theta_1}{q_1} - \frac{\theta_2}{q_2} = -k \left(\frac{\theta_1}{Q_1} + \frac{\theta_2}{Q_2} \right)$ en $k \frac{2(b+kt)^{-r-1}}{R_1} \int \frac{k dt}{b+kt} \int T (h+kt)^r dt$ (Art. préc.), expression qui se réduit dans le cas présent à celle-ci $\frac{2k^2}{R_1} e^{-\rho_1 t} \int dt \int T e^{\rho_1 t} dt$; mais $R = \frac{d^2 P}{dr^2} = \frac{k^2 d^2 P}{d\rho^2}$,

donc, si on fait $\frac{d^2 P}{d\rho^2} = r$, on aura $\frac{2}{r_1} e^{-\rho_1 t} \int dt \int T e^{\rho_1 t} dt$ au lieu des termes $-\frac{\theta_1}{q_1} - \frac{\theta_2}{q_2}$. On opéreroit de même si l'on avoit trois, quatre &c. racines égales.

Si ρ_1 , & ρ_2 sont imaginaires de sorte, que $\rho_1 = f + g\sqrt{-1}$, & $\rho_2 = f - g\sqrt{-1}$, on aura

$$e^{\pm \rho_1 t} = e^{\pm f t} (\text{cos. } g t \pm \text{sin. } g t \cdot \sqrt{-1}), \text{ \&}$$

$$e^{\pm \rho_2 t} = e^{\pm f t} (\text{cos. } g t \mp \text{sin. } g t \cdot \sqrt{-1}),$$

de plus on trouvera $q_1 = m + n\sqrt{-1}$, & $q_2 =$
 $m -$

$$m - n\sqrt{-1}, \text{ donc les termes } -\frac{g_1}{q_1} - \frac{g_2}{q_2} \text{ se réduiront à}$$

$$-\frac{2e^{-1}f^t}{m+n} [(m \cos. gt - n \sin. gt) \int T e^{f^t} \cos. gt dt$$

$$+ (m \sin. gt + n \cos. gt) \int T e^{f^t} \sin. gt dt].$$

Résolution de l'équation

$$\alpha \phi [t + a(h + kt)] + \beta \phi [t + b(h + kt)]$$

$$+ \gamma \phi [t + c(h + kt)] + \&c. = T,$$

dans laquelle ϕ dénote une fonction inconnue.

XVIII. On fait que $\phi [t + a(h + kt)]$ peut se réduire en série de cette manière

$$\phi [t + a(h + kt)] \frac{d \cdot \phi^t}{dt} + \frac{1}{2} a^2 (h + kt)^2 \frac{d^2 \cdot \phi^t}{dt^2} +$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} a^3 (h + kt)^3 \frac{d^3 \cdot \phi^t}{dt^3} + \&c.;$$

donc si on développe de même $\phi [t + b(h + kt)]$, $\phi [t + c(h + kt)]$ &c., & qu'on fasse $\phi^t = y$, l'équation proposée deviendra

$$(\alpha + \beta + \gamma + \&c.) y +$$

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.) \times (h + kt) \frac{dy}{dt} +$$

$$\frac{1}{2} (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.) \times (h + kt)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} +$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} (\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.) \times (h + kt)^3 \frac{d^3 y}{dt^3} +$$

$$\&c.$$

$$= T \quad (S)$$

Comparant cette équation avec l'équation (H) de l'Art. XV. on a

$$A = \alpha + \beta + \gamma + \&c.$$

$$B = \alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.$$

$$C = \frac{1}{2} (a a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.)$$

$$D = \frac{1}{2 \cdot 3} (a a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.)$$

&c.

donc on aura

$$P = a \left[1 - k a (r + 1) + \frac{k^2 a^2}{2} (r + 1)(r + 2) - \frac{k^3 a^3}{2 \cdot 3} (r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. \right] +$$

$$\beta \left[1 - k b (r + 1) + \frac{k^2 b^2}{2} (r + 1)(r + 2) - \frac{k^3 b^3}{2 \cdot 3} (r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. \right] +$$

$$\gamma \left[1 - k c (r + 1) + \frac{k^2 c^2}{2} (r + 1)(r + 2) - \frac{k^3 c^3}{2 \cdot 3} (r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. \right] + \&c. = 0;$$

équation, d'où l'on tirera les valeurs r_1, r_2, r_3 &c. de r , dont le nombre sera infini; de sorte que la valeur de y sera exprimée par une suite infinie, telle que

$$- k \left(\frac{\theta_1}{Q_1} + \frac{\theta_2}{Q_2} + \frac{\theta_3}{Q_3} + \&c. \right),$$

θ étant $= (h + kt)^{-r} \int T (h + kt)^r dt$.

Maintenant il est clair que la valeur de P se réduit à $\alpha (1 + ka)^{-r-1} + \beta (1 + kb)^{-r-1} + \gamma (1 + kc)^{-r-1} + \&c.$ donc $Q = -\alpha (1 + ka)^{-r-1} l(1 + ka) - \beta (1 + kb)^{-r-1} l(1 + kb) - \gamma (1 + kc)^{-r-1} l(1 + kc) - \&c.$

& l'équation à résoudre sera

$$\alpha (1 + ka)^{-r-1} + \beta (1 + kb)^{-r-1} + \gamma (1 + kc)^{-r-1} + \&c. = 0,$$

r étant l'inconnue; or cette résolution réussira dans les deux cas suivans

1.° Lorsque l'équation n'a que deux termes, c'est-à-dire qu'on a

$$a(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} = 0;$$

car divisant par $\beta(1 + kb)^{-r-1}$ on a $\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{1+ka}{1+kb} \right)^{-r-1} + 1 = 0$, d'où l'on tire par les logarithmes

$$r + 1 = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta}}{l \frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Qu'on suppose, ce qui est toujours possible,

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \lambda(\cos. \omega + \sin. \omega \sqrt{-1})$$

λ étant une quantité réelle & positive, on trouvera pour ω une infinité d'angles différens, & l'on aura $l - \frac{\alpha}{\beta} = l\lambda + \omega \sqrt{-1}$, ce qui donnera une infinité de valeurs de r .

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une quantité réelle positive, on fera $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, $\cos. \omega = -1$, & $\sin. \omega = 0$, ce qui donne $\omega = (2\nu + 1)\pi$, ν étant un nombre quelconque entier positif, ou négatif, & π dénotant l'angle de 180° ; donc

$$r + 1 = \frac{l \frac{\alpha}{\beta} + (2\nu + 1)\pi \sqrt{-1}}{l \frac{1+ka}{1+kb}}$$

& l'on aura les différentes valeurs de r ; en faisant successivement $\nu = 1, -1, 2, -2$ &c.

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité réelle négative, $-\frac{\alpha}{\beta}$ sera réelle positive, c'est pourquoi on supposera $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, $\cos. \omega$

$= 1$, sin. $\omega = 0$; d'où $\omega = 2v\pi$, & par conséquent

$$r + 1 = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta} + 2v\pi\sqrt{-1}}{l \frac{1+ka}{1+kb}}$$

Enfin si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, on aura $\lambda \cos. \omega = -p$, & $\lambda \sin. \omega = -q$, d'où l'on tire $\lambda = \sqrt{p^2 + q^2}$, sin. $\omega = -\frac{q}{\lambda}$, & cos. $\omega = -\frac{p}{\lambda}$. Donc si on suppose que ω' soit le plus-petit angle dont le sinus $= -\frac{q}{\lambda}$, & le cosinus $= -\frac{p}{\lambda}$, on aura $\omega = \omega' + 2v\pi$, v dénotant comme ci-devant un nombre quelconque entier positif ou négatif, d'où

$$r + 1 = \frac{l\lambda + (\omega' + 2v\pi)\sqrt{-1}}{l \frac{1+ka}{1+kb}}$$

12.^o Lorsque $1 + kb = (1 + ka)^2$, $1 + kc = (1 + ka)^3$ &c.; car en faisant $(1 + ka)^{-r-1} = p$, l'équation proposée deviendra $\alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 + \&c. = 0$, d'où l'on tirera p par les méthodes connues; après quoi on trouvera r par la méthode précédente.

XIX. Si $k = 0$, & $h = 1$, enforte que l'équation à résoudre soit

$\alpha\phi(x+a) + \beta\phi(x+b) + \gamma\phi(x+c) + \&c. = T$, alors, suivant ce qui a été dit dans l'Article XVII., on trouvera

$$P = \alpha e^{-pa} + \beta e^{-pb} + \gamma e^{-pc} + \&c., \quad \& \\ q = -\alpha a e^{-pa} - \beta b e^{-pb} - \gamma c e^{-pc} = \&c.$$

& la valeur de y , c'est-à-dire de φt , sera exprimée par la suite infinie

$$-\frac{\theta_1}{q_1} - \frac{\theta_2}{q_2} - \frac{\theta_3}{q_3} - \&c.$$

dans laquelle on aura en général $\theta = e^{-\rho t} \int T e^{\rho t} dt$.

A l'égard des valeurs de ρ on les tirera de l'équation $P = 0$, laquelle est résoluble dans les mêmes cas que ci-dessus, savoir lorsque le coefficient γ , & tous les suivans sont nuls, & lorsque $b = 2a$, $c = 3a$ &c. Dans le premier cas on aura $\alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} = 0$, d'où l'on tire, en divisant par $\beta e^{-\rho b}$, & prenant les logarithmes

$$\rho = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta}}{b - a} = \frac{l\lambda + \mu\sqrt{-1}}{b - a}. \text{ Dans le second on aura,}$$

en faisant $e^{-\rho a} = p$, $\alpha + \beta p^2 + \gamma p^3 + \&c. = 0$, d'où l'on tirera p , & par conséquent ρ .

Solutions de quelques problèmes concernant le mouvement des fluides.

XX. Si un fluide homogène & non élastique se meut dans un vase de figure quelconque, & qu'on suppose son mouvement arrivé à un état permanent, nommant p & q les vitesses d'une particule quelconque du fluide parallèlement à deux axes fixes perpendiculaires entr'eux, & t , x les coordonnées rectangles qui déterminent la position de cette particule par rapport aux mêmes axes, on aura les équations suivantes

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0, \quad \& \quad \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = 0,$$

(Voyés l'Art. XLII. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente à la solution &c.* inséré dans le Volume précédent).

De ces deux équations on tire celle-ci $\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$, dont l'intégrale est

$p = \phi(t + x\sqrt{-1}) + \psi(t - x\sqrt{-1})$
 ϕ , & ψ dénotant des fonctions quelconques.

Ensuite l'équation $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$ donnera

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \phi(t + x\sqrt{-1}) - \psi(t - x\sqrt{-1}).$$

Or dans chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on a $\frac{dt}{dx} = \frac{p}{q}$, donc l'équation générale de ces courbes sera $p dx - q dt = 0$, ou bien, en substituant les valeurs de p & q , & intégrant ensuite

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M$$

M étant une constante arbitraire, & Φ , Ψ dénotant des fonctions telles que $\frac{d.\Phi t}{dt} = \phi t$, & $\frac{d.\Psi t}{dt} = \psi t$; & cette équation devra exprimer aussi la courbure des parois du vase.

Supposons que l'axe des t divise le vase en deux parties égales & semblables, il faudra que l'équation dont il s'agit ne contienne aucune puissance paire de x ; or

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) = \Phi t + \phi t \cdot x\sqrt{-1} - \phi' t \cdot \frac{x^2}{2} - \phi'' t \cdot \frac{x^3}{2.3} \sqrt{-1} \&c.$$

$$\Psi(t - x\sqrt{-1}) = \Psi t - \psi t \cdot x\sqrt{-1} - \psi' t \cdot \frac{x^2}{2} + \psi'' t \cdot \frac{x^3}{2.3} \sqrt{-1} \&c.$$

(on suppose ici que $\phi' t = \frac{d.\phi t}{dt}$, $\phi'' t = \frac{d.\phi' t}{dt}$, & ainsi des autres); donc l'équation sera

$$\Phi t - \Psi t + (\phi t + \psi t) x\sqrt{-1} - (\phi' t - \psi' t) \frac{x^2}{2}$$

$$- (\phi'' t + \psi'' t) \frac{x^3}{2.3} \sqrt{-1} \&c. = M.$$

Maintenant il est clair que les puissances impaires de x ne peuvent disparaître que dans ces deux cas, 1.^o lorsque $\Phi t - \Psi t = M$, ce qui donne, en différenciant deux fois, $\phi' t - \psi' t = 0$, & ainsi de suite; 2.^o lorsque $\phi t + \psi t = 0$, ce qui donne aussi $\phi'' t + \psi'' t = 0$ &c.

Dans le premier cas on aura $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = \Phi(t - x\sqrt{-1}) - M$, & l'équation deviendra

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Phi(t - x\sqrt{-1}) = 0$$

de plus on aura

$$p = \phi(t + x\sqrt{-1}) + \phi(t - x\sqrt{-1}) \quad \&$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \phi(t + x\sqrt{-1}) - \phi(t - x\sqrt{-1})$$

où il faut remarquer qu'en faisant x négative la valeur de p demeure la même, & que celle de q change de signe; d'où il s'ensuit que dans ce cas-là les particules du fluide auront autour du diamètre du vase des mouvemens semblables, & dans le même sens.

Dans le second cas on aura $\psi(t - x\sqrt{-1}) = -\phi(t - x\sqrt{-1})$, & intégrant $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = N - \Phi(t - x\sqrt{-1})$, d'où

$\Phi(t + x\sqrt{-1}) + \Phi(t - x\sqrt{-1}) = M + N$,
& ensuite

$$p = \phi(t + x\sqrt{-1}) - \phi(t - x\sqrt{-1})$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \phi(t + x\sqrt{-1}) + \phi(t - x\sqrt{-1}).$$

Ici en faisant x négative p devient négative, & q demeure positive, ce qui fait voir que dans ce cas les particules du fluide décrivent de côté & d'autre du diamètre du vase des courbes égales & semblables, comme dans le cas précédent, mais avec des directions contraires.

Tout se réduit donc à trouver la fonction Φ par cette condition que

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) + \Phi(t - x\sqrt{-1}) = H,$$

x étant donnée en t par la figure des parois du vase, & H étant une quantité constante.

Soit $x = h + kt$, ce qui est le cas où les parois sont des lignes droites, & l'équation dont il s'agit sera réductible à la formule générale de l'Art. XVIII.

On fera donc $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$, $T = H$, $y = \Phi t$, & l'on aura,

1.° $-\frac{\alpha}{\beta} = \mp 1$, & par conséquent $\lambda = 1$, $\text{cof. } \omega = \mp 1$, $\text{fin. } \omega = 0$; donc $\omega = \mu \pi$, π dénotant la demie circonférence, & μ étant un nombre quelconque impair dans le premier cas, savoir dans le cas où l'on prend le signe supérieur, & un nombre quelconque pair dans l'autre cas; par conséquent on aura $r + 1 = \frac{\mu \pi \sqrt{-1}}{l \frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}}$;

or on fait que $l \frac{1 + \text{tang. } u \cdot \sqrt{-1}}{1 - \text{tang. } u \cdot \sqrt{-1}} = 2u\sqrt{-1}$; donc,

prenant u pour l'arc dont la tangente est k , on aura $r + 1 = \frac{\mu \pi}{2u}$. 2.° On aura, par le même Article

$Q = - (1 + k\sqrt{-1})^{-r-1} l (1 + k\sqrt{-1} \mp (1 - k\sqrt{-1})^{-r-1} l (1 - k\sqrt{-1}))$; or, à cause

de $k = \frac{\text{fin. } u}{\text{cof. } u}$, on a $(1 \pm k\sqrt{-1})^{-r-1} = \text{cof. } u^{r+1}$

$(\text{cof. } u \pm \text{fin. } u \cdot \sqrt{-1})^{-r-1} = \text{cof. } u^{r+1} [\text{cof. } (r+1)u \mp \text{fin. } (r+1)u \cdot \sqrt{-1}]$, & $l(1 \pm k\sqrt{-1}) =$

$l \frac{\text{cof. } u \pm \text{fin. } u \cdot \sqrt{-1}}{\text{cof. } u} = \pm u\sqrt{-1} - l \text{cof. } u$; donc

on aura pour le premier cas $Q = - 2 \text{cof. } u^{r+1} [u \text{fin. } (r+1)u - l \text{cof. } u \cdot \text{cof. } (r+1)u]$ = (à cause de

$(r+1)u = \frac{\mu \pi}{2}) \mp 2u \text{cof. } u^{r+1}$, le signe supérieur

étant pour le cas où μ sera de la forme $4\nu + 1$, & le signe inférieur pour le cas où μ sera de la forme $4\nu + 3$;

& pour l'autre cas $Q = - 2 \text{cof. } u^{r+1} [u \text{cof. } (r+1)u$

+ l

+ l. cof. $u \cdot \sin. (r + 1)u] \sqrt{-1} = \mp 2u \text{ cof. } u^{r+1} \cdot \sqrt{-1}$,
 le signe supérieur étant pour le cas où μ est de la forme $4v$, & le signe inférieur pour le cas où μ est de la forme $4v + 2$; 3.° On aura, à cause de $T \equiv H$,

$$\int T (h + kt)^r dt = \frac{H}{(r+1)k} (h + kt)^{r+1} + \text{const.};$$

$$\text{donc } \theta = \frac{H}{(r+1)k} + (h + kt)^{-r-1} \chi \text{ const.}$$

Donc on aura en général dans le premier cas

$$-k \frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1) \text{ cof. } u^{r+1}} + (h + kt)^{-r-1} \chi \text{ const.}$$

Et dans le second cas

$$-k \frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1) \text{ cof. } u^{r+1} \sqrt{-1}} + (h + kt)^{-r-1} \chi \text{ const.}$$

Ainsi substituant au lieu de $r + 1$ sa valeur $\frac{\mu\pi}{2u}$, & mettant successivement au lieu de μ tous les nombres entiers positifs & négatifs, on aura tous les termes qui doivent entrer dans la valeur de y .

Il y a cependant un cas à excepter; c'est celui où $\mu = 0$, & par conséquent $r = -1$; dans ce cas on aura

$$\int T (h + kt)^r dt = \frac{H}{k} l(h + kt) + \text{const.}, \text{ \& par conséquent}$$

$$-k \frac{\theta}{Q} = \frac{H}{2u\sqrt{-1}} l(h + kt) + \text{const.}$$

Donc faisant pour abréger $\text{cof. } u^{\frac{\pi}{2u}} = p$, $(h + kt)^{\frac{\pi}{2u}} = z$, & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c. a, b, c &c., on aura pour l'équation

$$\Phi [t + (h + kt)\sqrt{-1}] + \Phi [t - (h + kt)\sqrt{-1}] = H,$$

$$\Phi t := A z_c + a z^{-1} + B z^3 + b z^{-3} + \&c. + \frac{H}{\pi}$$

$$\left(p + \frac{1}{p} - \frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5} p^5 + \frac{1}{5p^5} - \&c. \right),$$

& pour l'équation

$$\Phi [t + (h + kt)\sqrt{-1}] - \Phi [t - (h + kt)\sqrt{-1}] = H,$$

$$\Phi t = \frac{H}{2u\sqrt{-1}} l(h + kt) + A\zeta^2 + a\zeta^{-2} + B\zeta^4 + b\zeta^{-4} \\ + \&c. + \text{const.}$$

$$\text{Or } p - \frac{1}{3} p^3 + \frac{1}{5} p^5 - \&c. = \text{arc. tang. } p; \&$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \&c. = \text{arc. cot. } p; \text{ donc la som-}$$

me de ces deux séries fera $= \frac{\pi}{2}$; par conséquent on aura pour la première équation

$$\Phi t = A\zeta + a\zeta^{-1} + B\zeta^3 + b\zeta^{-3} + \&c. + \frac{H}{2}.$$

Connoissant ainsi la nature de la fonction Φ , on trouvera par la différentiation la fonction ϕ , & par conséquent les expressions des vitesses p & q ; & l'on déterminera ensuite les constantes arbitraires A, a, B, b &c. par les valeurs connues, & données de p & q , lorsque $t = 0$.

XXI. Si $k = 0$, de manière que le fluide se meuve dans un canal rectiligne, & dont la largeur soit par tout $= 2k$, on supposera k infiniment petite, & l'on aura d'abord $u = k$; faisant ensuite $k = \alpha h$, α étant une

quantité évanouissante, on aura $(h + kt)^{\frac{\pi}{2u}} = h^{\frac{\pi}{2u}}$

$$(1 + \alpha t)^{\frac{\pi}{2\alpha h}} = h^{\frac{\pi}{2k}} \times e^{\frac{\pi t}{2h}}; \& l(h + kt) = lh(1 + \alpha t)$$

$$= lh + \alpha t; \text{ par conséquent } \frac{H}{2u\sqrt{-1}} l(h + kt) =$$

$$\frac{Hlh}{2k\sqrt{-1}} + \frac{Ht}{2b\sqrt{-1}}. \text{ Donc si on fait } \zeta = e^{\frac{\pi t}{2k}}, \text{ on aura}$$

pour Φt les mêmes expressions que dans l'Article précé-

dent, excepté qu'au lieu de $\frac{H}{2uv-1} l(h + kt)$, il faudra mettre $\frac{Ht}{2bv-1}$.

XXII. Si on ne vouloit pas que le vase eut deux parties égales & semblables, alors nommant x les ordonnées qui répondent à l'une des parois, & x' celles qui répondent à l'autre, on aura les deux équations

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M, \quad \&$$

$$\Phi(t + x'\sqrt{-1}) - \Psi(t - x'\sqrt{-1}) = N,$$

par le moyen desquelles on déterminera les fonctions Φ , & Ψ .

Si les deux parois sont des lignes droites, de sorte que $x = h + kt$, & $x' = h' + k't$, on en viendra à bout de la manière suivante. On supposera $h' = h + H$, $k' = k + K$, & la seconde équation deviendra, en faisant $H + Kt = X$,

$$\Phi(t + x\sqrt{-1} + X\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1} - X\sqrt{-1}) = N.$$

Soit maintenant $\Phi(t + x\sqrt{-1}) = y$, & $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = y'$; on aura ces deux équations

$$y - y' = M, \quad \&$$

$$y + \frac{dy}{dt} X\sqrt{-1} + \frac{d^2y}{2dt^2} (X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3 dt^3} (X\sqrt{-1})^3 + \&c;$$

$$- y' + \frac{dy'}{dt} X\sqrt{-1} - \frac{d^2y'}{2dt^2} (X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y'}{2.3 dt^3} (X\sqrt{-1})^3 - \&c. = N.$$

La première donne $y' = y - M$, $\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y'}{dt^2} =$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \&c.; \text{ donc la seconde deviendra } 2 \frac{dy}{dt} X\sqrt{-1} +$$

$$2 \frac{d^2y}{2.3 dt^2} (X\sqrt{-1})^2 + \&c. + M = N, \text{ ou bien}$$

$$2\sqrt{-1} (H + Kt) \frac{dy}{dt} + 2 \frac{(\sqrt{-1})^2}{2.3} (H + Kt)^2 \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$+ 2 \frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3.4.5} (H + Kt)^3 \frac{d^3y}{dt^3} - \&c. = N - M,$$

équation qui est dans le cas de la formule (S) de l'Article XVIII.; & l'on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$; $h = H$, $k = K$; donc &c.

On trouvera ainsi la valeur de y en t , après quoi on aura celle de y' par l'équation $y' = y - M$.

XXIII. Les équations $p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})$, $\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$ trouvées dans l'Art. XX. donnent

$$p \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = 2 \varphi(t \pm x\sqrt{-1});$$

ou bien, en faisant $P = \frac{p}{2}$, $Q = -\frac{q}{2}$,

$$\varphi(t \pm x\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

ainsi pour trouver les vitesses p , & q , il ne s'agit que de réduire l'expression $\varphi(t + x\sqrt{-1})$ à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P , & Q étant des quantités réelles.

Lorsque la fonction φ est donnée algébriquement, on peut trouver les valeurs de P , & Q par les méthodes connues; mais si la fonction φ est inconnue, alors il faut avoir recours aux séries, lesquelles donnent

$$P = \varphi t - \frac{x^2}{2} \varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4} \varphi^{iv} t - \&c. \quad \&$$

$$Q = x \varphi' t - \frac{x^3}{2.3} \varphi''' t + \frac{x^5}{2.3.4.5} \varphi^v t - \&c.$$

Or je remarque 1.^o que ces deux séries deviennent divergentes, lorsque x est fort grande, 2.^o qu'elles demandent qu'on connoisse les différences de la fonction φt , de sorte qu'elles ne peuvent être d'usage dans la pratique que lorsque la fonction φ est connue analytiquement, & nullement lorsque cette fonction n'est donnée que mécaniquement, c'est-à-dire par le moyen d'une courbe; ainsi je crois qu'il ne sera pas inutile de faire voir, comment

on peut transformer ces mêmes séries en d'autres qui dépendent uniquement de la fonction φ .

Pour cet effet je prends la quantité

$$\frac{\varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})}{2},$$

laquelle étant réduite en série devient

$$\varphi t - \frac{x^2}{2} \varphi'' t + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^{iv} t - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \varphi^{vi} t + \&c.$$

je prends de plus la quantité

$$\frac{\varphi(t + x) + \varphi(t - x)}{2},$$

laquelle se change de même en celle-ci

$$\varphi t + \frac{x^2}{2} \varphi'' t + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^{iv} t + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \varphi^{vi} t + \&c.$$

j'appelle la première de ces deux quantité y , & la seconde z ; ensuite je suppose que Y, Y', Y'', Y''' &c. soient les valeurs de y , lorsque au lieu de x on y met $0, 1x, 2x, 3x$ &c., & prenant des coefficients arbitraires $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ &c., j'aurai

$$y = \alpha Y + \alpha' Y' + \alpha'' Y'' + \alpha''' Y''' + \&c.$$

$$= (1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c.) \varphi t$$

$$- (1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c.) \frac{x^2}{2} \varphi'' t$$

$$+ (1 - \alpha' - 2^4 \alpha'' - 3^4 \alpha''' - \&c.) \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^{iv} t$$

$$- (1 + \alpha' + 2^6 \alpha'' + 3^6 \alpha''' + \&c.) \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \varphi^{vi} t$$

&c.

Soit

$$1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c. = 0$$

$$1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c. = 0$$

$$1 - \alpha' - 2^4 \alpha'' - 3^4 \alpha''' - \&c. = 0$$

$$1 + \alpha' + 2^6 \alpha'' + 3^6 \alpha''' + \&c. = 0$$

& ainsi de suite, on aura

} (T)

$$y = \alpha Y + \alpha' Y' + \alpha'' Y'' + \alpha''' Y''' + \&c.$$

Tout se réduira donc à tirer les valeurs de α' , α'' , α''' &c. des équations, (T). Pour y parvenir, je multiplie la seconde par β' , la troisième par β'' , la quatrième par β''' &c.; β' , β'' , β''' &c. étant des coefficients indéterminés, après quoi je les ajoute toutes ensemble, ce qui me donne

$$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. - \alpha - 1$$

$$(1 - \beta' + \beta'' - \beta''' + \&c.) \alpha' -$$

$$(1 - 4\beta' + 2^2\beta'' - 2^6\beta''' + \&c.) \alpha'' -$$

$$(1 - 9\beta' + 3^2\beta'' - 3^6\beta''' + \&c.) \alpha''' - \&c. = 0.$$

A présent pour avoir la valeur d'une α quelconque, comme α^m je fais égal à zero chacun des coefficients des autres α ; de cette manière j'ai d'abord

$$\alpha^m = \frac{1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. - \alpha}{1 - m^2\beta' + m^4\beta'' - m^6\beta''' + \&c.},$$

& ensuite les équations de condition

$$1 - \beta' + \beta'' - \beta''' + \&c. = 0$$

$$1 - 4\beta' + 2^2\beta'' - 2^6\beta''' + \&c. = 0$$

&c.

c'est-à-dire l'équation

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \&c. = 0,$$

laquelle doit avoir lieu, en mettant au lieu de u tous les nombres entiers 1, 2, 3 &c. à l'infini, excepté m ,

Donc si on multiplie cette équation par $1 - \frac{u^2}{m^2}$, & qu'on

suppose $u = \frac{z}{\pi}$, on aura

$$1 - \frac{\beta' + \frac{1}{m^2}}{\pi^2} z^2 + \frac{\beta'' + \frac{\beta''}{m}}{\pi^4} z^4 - \frac{\beta''' + \frac{\beta'''}{m^2}}{\pi^6} z^6 + \&c. = 0$$

équation, dont les racines seront π^2 , $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c. à l'infini; donc comparant cette équation avec l'équation

$$\frac{\text{fin. } z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \&c. = 0,$$

dont les racines font aussi, comme l'on sait, π^2 , $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c., on aura

$$\beta' + \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{2.3},$$

$$\beta'' + \frac{\beta'}{m^2} = \frac{\pi^4}{2.3.4.5},$$

$$\beta''' + \frac{\beta''}{m^2} = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7},$$

&c.

par où l'on connoitra les valeurs des quantités β ; mais pour notre objet il suffit de remarquer que

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \&c. = \frac{\text{fin. } \pi u}{\pi u \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right)}.$$

Car, faisant 1.^o $u^2 = -1$, favoir $u = \sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. = \frac{\text{fin. } (\pi \sqrt{-1})}{\pi \sqrt{-1} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}.$$

2.^o Si on suppose $u = m$ on trouvera, en différenciant le numérateur & le dénominateur, à cause que l'un & l'autre s'évanouissent lorsqu'on $u = m$,

$$1 - \beta' m^2 + \beta'' m^4 - \beta''' m^6 + \&c. = -\frac{\text{cof. } m\pi}{2} = \pm \frac{1}{2},$$

le signe supérieur étant pour le cas où m est impair, & le signe inférieur pour le cas où m est pair; donc on aura

$$\alpha^n = \pm \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} \pm 2\alpha,$$

ou bien, en faisant $a = a \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$,
 $\alpha^m = + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \chi \frac{m^2(1-a) - a}{m^2 + 1}$;

donc enfin

$$y = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left\{ \frac{a}{2} Y + \frac{1-a-a}{1+1} Y'' - \frac{4(1-a)-a}{4+1} Y'''' + \frac{9(1-a)-a}{9+1} Y'''''' - \&c. \right\}.$$

Or puisque la quantité a est arbitraire, on la déterminera de manière que la série devienne la plus convergente qu'il est possible; c'est pourquoi on fera $1-a=0$, favoir $a=1$; ce qui donnera

$$y = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left\{ \frac{Y}{2} - \frac{Y''}{1+1} + \frac{Y''''}{4+1} - \frac{Y''''''}{9+1} + \&c. \right\},$$

& par conséquent

$$\begin{aligned} \phi(t+x\sqrt{-1}) + \phi(t-x\sqrt{-1}) &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \\ \chi \left\{ \frac{1}{2} \phi(t) - \frac{\phi(t+x) + \phi(t-x)}{1+1} + \frac{\phi(t+2x) + \phi(t-2x)}{4+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\phi(t+3x) + \phi(t-3x)}{9+1} + \&c. \right\}. \end{aligned}$$

Qu'on différencie cette équation en faisant varier x , & qu'on l'intègre ensuite en faisant varier t , on aura

$$\begin{aligned} [\phi(t+x\sqrt{-1}) - \phi(t-x\sqrt{-1})] \sqrt{-1} &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \\ \chi \left\{ \frac{\phi(t+x) - \phi(t-x)}{1+1} - 2 \frac{\phi(t+2x) - \phi(t-2x)}{4+1} \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{\phi(t+3x) - \phi(t-3x)}{9+1} - \&c. \right\}. \end{aligned}$$

Donc si on fait

$$P = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \phi(t) - \frac{\phi(t+x) + \phi(t-x)}{1+1} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varphi(\ell+2x) + \varphi(\ell-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(\ell+3x) + \varphi(\ell-3x)}{9+1} + \&c. \} \& \\
 Q & \equiv \frac{e^{\pi-\ell-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\varphi(\ell+x) - \varphi(\ell-x)}{1+1} - 2 \frac{\varphi(\ell+2x) - \varphi(\ell-2x)}{4+1} \right. \\
 & \left. + 3 \frac{\varphi(\ell+3x) - \varphi(\ell-3x)}{9+1} - \&c. \right\},
 \end{aligned}$$

(on aura φ)

$$\varphi(\ell \pm x\sqrt{-1}) \equiv P \pm Q\sqrt{-1};$$

& les quantités P & Q feront données, comme l'on voit, par des suites convergentes dont chaque terme pourra se déterminer mécaniquement sans qu'il soit besoin de connoître la nature de la fonction φ .

XXIV. Il est clair que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2p}{dx^2}$

$$= -\frac{d^2p}{dx^2} \text{ (Art. XX.) est aussi}$$

$$p = \varphi(x + i\sqrt{-1}) + \psi(x - i\sqrt{-1})$$

où ce qui revient au même

$$\begin{aligned}
 p & = \frac{\varphi(x + i\sqrt{-1}) + \varphi(x - i\sqrt{-1})}{2} \\
 & \quad - \frac{\downarrow(x + i\sqrt{-1}) - \downarrow(x - i\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire ensuite

$$\begin{aligned}
 q & = \frac{\varphi(x + i\sqrt{-1}) - \varphi(x - i\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \\
 & \quad + \frac{\downarrow(x + i\sqrt{-1}) + \downarrow(x - i\sqrt{-1})}{2}.
 \end{aligned}$$

Imaginons que le vase soit formé de deux parois droites & parallèles enforte qu'il ait par tout la même largeur a ; en prenant une de ces parois pour l'axe des x , il faudra que la vitesse q soit nulle lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, quel que soit t . Or en faisant $t = 0$, on a $p = \varphi x$, & $q = \psi x$; ainsi, en décrivant sur la portion de l'axe des x comprise entre les parois

du vase, deux courbes qui soient les échelles des vitesses p & q que doivent avoir les particules du fluide dans cette section du vase, les appliquées de ces courbes répondantes à une abscisse quelconque x représenteront les fonctions ϕx & ψx .

Présentement on trouvera par l'Art. préc.

$$p = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \phi x - \frac{\phi(x+\varepsilon) + \phi(x-\varepsilon)}{1+1} \right. \\ \left. + \frac{\phi(x+2\varepsilon) + \phi(x-2\varepsilon)}{4+1} - \&c. \right\} - \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \\ \times \left\{ \frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x-\varepsilon)}{4+1} - 2 \frac{\psi(x+2\varepsilon) - \psi(x-2\varepsilon)}{4+1} + \&c. \right\} \\ \& q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\phi(x+\varepsilon) - \phi(x-\varepsilon)}{1+1} \right. \\ \left. - 2 \frac{\phi(x+2\varepsilon) - \phi(x-2\varepsilon)}{4+1} + \&c. \right\} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \psi x - \frac{\psi(x+\varepsilon) + \psi(x-\varepsilon)}{1+1} + \frac{\psi(x+2\varepsilon) + \psi(x-2\varepsilon)}{4+1} - \&c. \right\}$$

Donc puisque q doit être $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\phi \varepsilon - \phi - \varepsilon}{1+1} - 2 \frac{\phi 2\varepsilon - \phi - 2\varepsilon}{4+1} + \&c. \\ + \frac{1}{2} \psi 0 - \frac{\psi \varepsilon + \psi - \varepsilon}{1+1} + \frac{\psi 2\varepsilon + \psi - 2\varepsilon}{4+1} - \&c. = 0 \\ \frac{\phi(a+\varepsilon) - \phi(a-\varepsilon)}{1+1} - 2 \frac{\phi(a+2\varepsilon) - \phi(a-2\varepsilon)}{4+1} + \&c. \\ + \frac{1}{2} \psi a - \frac{\psi(a+\varepsilon) + \psi(a-\varepsilon)}{1+1} + \frac{\psi(a+2\varepsilon) + \psi(a-2\varepsilon)}{4+1} \\ - \&c. = 0,$$

ou bien, afin que les fonctions ϕ & ψ ne dépendent point l'une dans l'autre

$$\frac{\phi \varepsilon - \phi - \varepsilon}{1+1} - 2 \frac{\phi 2\varepsilon - \phi - 2\varepsilon}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{\varphi(a+t) - \varphi(a-t)}{1+t} - 2 \frac{\varphi(a+2t) - \varphi(a-2t)}{4+t} + \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2} \psi 0 - \frac{\psi t + \psi - t}{1+t} + \frac{\psi 2t + \psi - 2t}{4+t} - \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2} \psi a - \frac{\psi(a+t) + \psi(a-t)}{1+t} + \frac{\psi(a+2t) + \psi(a-2t)}{4+t} + \&c. = 0$$

Pour satisfaire à ces quatre conditions, on supposera que les fonctions φ & ψ soient telles que l'on ait en général, quelle que soit la valeur de u ,

$$\varphi u = \varphi - u, \quad \varphi(a+u) = \varphi(a-u),$$

$$\psi u = -\psi - u, \quad \psi(a+u) = -\psi(a-u);$$

ce qui servira à déterminer la continuation des deux échelles données pour les abscisses négatives & pour les abscisses plus grandes que a , laquelle devra par conséquent être telle que les ordonnées également distantes de part & d'autre des deux extrémités de l'axe a soient égales & de même signe dans la courbe des vitesses p , & de signes différens dans la courbe des vitesses q ; d'où il s'ensuit que la première de ces courbes sera composée d'une infinité de branches égales & semblables, toutes du même coté de l'axe, & disposées alternativement en sens contraire, & que l'autre aura de même une infinité de branches égales & semblables, mais situées alternativement au dessus & au dessous de l'axe.

Ayant donc décrit ces deux courbes, on aura par les séries données ci-dessus les valeurs approchées des vitesses p & q de chaque particule du fluide; d'où l'on voit que le mouvement d'un fluide qui se meut dans un canal droit est déterminé par le mouvement que ce fluide a dans une section quelconque de ce même canal.

De plus il est clair par la nature des courbes qui représentent les fonctions φ & ψ qu'en augmentant, ou en diminuant la quantité t de $2a$, ou de $4a$, ou de $6a$ &c. les valeurs de p & de q demeurent les mêmes; d'où il

§ ensuit, que si on imagine le fluide divisé en portions égales par des droites perpendiculaires aux parois du canal, & placées à la distance $2a$ les unes des autres, chacune de ces portions du fluide aura nécessairement le même mouvement.

Si le fluide étoit terminé par une ligne droite perpendiculaire aux parois du vase, alors prenant cette même ligne pour l'axe des x il faudroit que $p = 0$ lorsque $t = 0$, donc $\phi x = 0$, & par conséquent

$$p = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+i} \right. \\ \left. - 2 \frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+i} + \&c. \right\} \&c.$$

$$q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \psi x - \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+i} \right. \\ \left. + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+i} - \&c. \right\}$$

Or puisque la valeur de p est nulle lorsque $t = 0$ elle le sera aussi lorsque $t = 2a$, ou $= 4a$ &c.; ainsi le fluide aura dans ce cas le même mouvement que s'il étoit renfermé dans un vase de figure rectangulaire dont la longueur fût double, ou quadruple &c. de la largeur.

On pourra encore trouver le mouvement du fluide lorsque la longueur du vase sera égale à sa largeur, & en général toutes les fois que les deux dimensions du vase seront commensurables entr'elles; mais il faudra pour lors que les valeurs données de q forment une courbe qui ait un, ou plusieurs nœuds, de sorte que la fonction ψx demeure la même en augmentant ou en diminuant x d'une quantité égale à la longueur du vase. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire, lorsque les dimensions du vase seront incommensurables, on ne pourra déterminer le mouvement du fluide par la théorie précédente; & comme cette théorie est fondée sur la supposition que le mouvement du fluide

soit dans un état constant, en sorte que les particules du fluide décrivent des courbes invariables, ce sera une marque que l'hypothèse dont nous parlons n'aura point lieu sur quoi voyés les Art. XLII. & XLIII. de la Dissertation citée ci-dessus.

*Solution d'une question relative à la théorie
des cordes vibrantes.*

XXV. La question que je vais examiner ici consiste à savoir si toutes les courbes qui rendent la solution du problème des cordes vibrantes possible, suivant la théorie de M. D'Alembert, sont renfermées ou non dans l'équation

$$y = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi x}{a} + \&c. ;$$

question que ce grand Géomètre a vivement agitée avec MM. Bernoulli & Euler dans le premier Mémoire de ses Opuscules Mathématiques.

Pour pouvoir résoudre cette question d'une manière directe & convaincante, je prends l'équation générale de la courbe que forme la corde vibrante, laquelle est comme l'on fait,

$$y = \frac{\phi(x + t) + \phi(x - t)}{2},$$

& j'examine quelle doit être la forme de la fonction ϕ pour que l'on ait en général quel que soit t ,

$$\phi t + \phi - t = 0, \text{ \& } \phi(a + t) + \phi(a - t) = 0,$$

conditions nécessaires pour que les deux bouts de la corde soient fixes; or puisque $\phi t = -\phi - t$ on aura $\phi(a - t) = -\phi - (a - t) = -\phi(t - a)$; donc la seconde des deux conditions se réduira à celle-ci

$$\phi(t + a) - \phi(t - a) = 0.$$

Cette équation étant comparée avec la formule de l' Art. XIX., on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $b = -a$, $T = 0$; donc $P = e^{-\rho a} - e^{\rho a}$, & faisant $\rho = -r\sqrt{-1}$, $P = 2 \sin. ra \times \sqrt{-1}$; donc l'équation $P = 0$ donnera $ra = \mu\pi$, μ étant un nombre entier positif, ou négatif; par conséquent on aura $r = \frac{\mu\pi}{a}$, & $\rho = -\frac{\mu\pi}{a}\sqrt{-1}$; or, T étant $= 0$, on aura $\int T e^{\rho t} dt = \text{const.}$; donc

$\varphi = e^{\frac{\mu\pi t}{a}\sqrt{-1}} \times \text{const.}$; donc, donnant successivement à μ toutes ses valeurs $1, -1, 2, -2$ &c., & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c., A', B', C' , on aura

$$\varphi t = A e^{\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + A' e^{-\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B e^{\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B' e^{-\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + \&c.$$

équation qui revient à cette forme

$$\varphi t = \alpha \sin. \frac{\pi t}{a} + \alpha' \cos. \frac{\pi t}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi t}{a} + \beta' \cos. \frac{2\pi t}{a} + \&c.$$

$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ &c. étant pareillement des constantes arbitraires.

Or par la première condition il faut que $\varphi t + \varphi -t = 0$, donc $\alpha' \cos. \frac{\pi t}{a} + \beta' \cos. \frac{2\pi t}{a} + \&c. = 0$, donc $\alpha' = 0, \beta' = 0$ &c., donc

$$\varphi t = \alpha \sin. \frac{\pi t}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi t}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi t}{a} + \&c.$$

par conséquent l'équation de la figure initiale de la corde, lorsqu'elle en a une, ne peut être que de la forme

$$y = \alpha \sin. \frac{\pi x}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Sur l'intégration des équations

$$L y + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2 y}{dt^2} + \&c. + l y' + m \frac{dy'}{dt} + n \frac{d^2 y'}{dt^2} + \&c. + \lambda y'' + \mu \frac{dy''}{dt} + \nu \frac{d^2 y''}{dt^2} + \&c. = T,$$

$$L' y + M' \frac{dy}{dt} + N' \frac{d^2 y}{dt^2} + \&c. + l' y' + m' \frac{dy'}{dt} + n' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \&c. + \lambda' y'' + \mu' \frac{dy''}{dt} + \nu' \frac{d^2 y''}{dt^2} + \&c. = T',$$

$$L'' y + M'' \frac{dy}{dt} + N'' \frac{d^2 y}{dt^2} + \&c. + l'' y' + m'' \frac{dy'}{dt} + n'' \frac{d^2 y'}{dt^2} + \&c. + \lambda'' y'' + \mu'' \frac{dy''}{dt} + \nu'' \frac{d^2 y''}{dt^2} + \&c. = T'',$$

&c. dans lesquelles L, M, N &c. l, m, n &c. &c. sont des fonctions quelconques de t .

XXVI. En suivant les mêmes principes que dans l'Art. I. on multiplierà la première de ces équations par $z dt$, la seconde par $z' dt$, la troisième par $z'' dt$, & ainsi de suite, z, z', z'' &c. étant de nouvelles indéterminées, & après les avoir ajoutées ensemble, on en prendra l'intégrale en faisant disparaître par des intégrations par parties, les différences des variables y, y', y'' &c. de dessous le signe \int ; de cette manière on aura une équation de la forme suivante

$$U + \int (V y + V' y' + V'' y'' + \&c.) dt = \int (T z + T' z' + T'' z'' + \&c.) dt,$$

dans laquelle

$$U = y \left(M z - \frac{d \cdot N z}{dt} + \&c. + M' z' - \frac{d \cdot N' z'}{dt} + \&c. + M'' z'' - \frac{d \cdot N'' z''}{dt} + \&c. \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{dy}{dt} (Nz - \&c. + N'z' - \&c. + N''z'' - \&c.) + \&c. \\
 & + y' (mz - \frac{d.nz}{dt} + \&c. + m'z' - \frac{d.n'z'}{dt} + \&c. \\
 & + m''z'' - \frac{d.n''z''}{dt} + \&c.) \\
 & + \frac{dy'}{dt} (nz - \&c. + n'z' - \&c. + n''z'' - \&c.) + \&c. \\
 & + y'' (\mu z - \frac{d.vz}{dt} + \&c. + \mu'z' - \frac{d.v'z'}{dt} + \&c. \\
 & + \mu''z'' - \frac{d.v''z''}{dt} + \&c.) \\
 & + \frac{dy''}{dt} (vz - \&c. + v'z' - \&c. + v''z'' - \&c.) + \&c. \&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \&V &= Lz \frac{d.Mz}{dt} + \frac{d.Nz}{dt} \&c. \\
 &+ L'z' - \frac{d.M'z'}{dt} + \frac{d.N'z'}{dt} - \&c. \\
 &+ L''z'' - \frac{d.M''z''}{dt} + \frac{d.N''z''}{dt} \&c. \&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V' &= lz \frac{d.mz}{dt} + \frac{d.nz}{dt} \&c. \\
 &+ l'z' - \frac{d.m'z'}{dt} + \frac{d.n'z'}{dt} \&c. \\
 &+ l''z'' - \frac{d.m''z''}{dt} + \frac{d.n''z''}{dt} \&c. \&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V'' &= \lambda z \frac{d.\mu z}{dt} + \frac{d.vz}{dt} \&c. \\
 &+ \lambda'z' - \frac{d.\mu'z'}{dt} + \frac{d.v'z'}{dt} \&c. \\
 &+ \lambda''z'' - \frac{d.\mu''z''}{dt} + \frac{d.v''z''}{dt} \&c. \&c.
 \end{aligned}$$

Supposant donc $V = 0, V' = 0, V'' = 0 \&c.$ on aura

$$U = \int (Tz + T'z' + T''z'' + \&c.) dt$$

équation, dans laquelle les plus hautes différences des variables y, y', y'' &c. se trouveront moins élevées d'une unité que dans les équations différentielles proposées.

On aura donc autant de pareilles intégrales, qu'on trouvera de valeurs particulières de chacune des quantités $z, z', z'',$ &c. par le moyen des équations $V = 0, V' = 0, V'' = 0$ &c. Or soit m la somme des exposans des plus hautes différences de y, y', y'' &c. dans les équations proposées, il est clair que la quantité U contiendra autant d'inconnues comme y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dy''}{dt}$ &c. &c. qu'il y a d'unités dans le nombre m ; donc si on a aussi m valeurs particulières de z, z', z'' &c., on trouvera facilement les valeurs générales & complètes de y, y', y'' &c.

Soient maintenant Y, Y', Y'' &c. les premiers membres des équations proposées, on aura

$$\int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \&c.) dt = U$$

$$+ \int (Vy + V'y' + V''y'' + \&c.) dt \dots (U);$$

donc faisant $V = 0, V' = 0, V'' = 0$ &c., on aura l'équation

$$U - \int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \&c.) dt = \text{const.},$$

laquelle aura nécessairement toutes les valeurs de z, z', z'' &c. communes avec les équations $V = 0, V' = 0, V'' = 0$ &c. Or l'équation (U) est identique, & par conséquent ne dépend point des valeurs de y, y', y'' &c.; donc on peut supposer ces valeurs telles que $Y = 0, Y' = 0, Y'' = 0$ &c.; & l'on aura par ce moyen l'équation $U = \text{const.}$, dans laquelle on regardera les quantités y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dy''}{dt}$ &c. &c. comme données, & les quantités z, z', z'' &c. $\frac{dz}{dt}, \frac{dz'}{dt},$

$\frac{dz''}{dt}$ &c. &c. comme indéterminées; or il est aisé de voir que ces indéterminées seront aussi au nombre de m ; si donc on a m valeurs particulières de chacune des quantités y, y', y'' &c. dans les équations $Y = 0, Y' = 0, Y'' = 0$ &c., on aura aussi, par la substitution successive de ces valeurs dans l'équation $U = \text{const.}$, m équations particulières, d'où l'on tirera les valeurs de z, z', z'' &c., lesquelles contiendront nécessairement m constantes arbitraires; de sorte qu'en faisant successivement toutes ces constantes, hors une, égales à zéro, on aura m valeurs particulières de z, z', z'' &c. Donc &c.

XXVII. De là résulte ce théorème.

Les équations proposées seront intégrables algébriquement, si on peut trouver, dans le cas de $T = 0, T' = 0, T'' = 0$ &c., autant de valeurs particulières de chacune des quantités y, y', y'' &c. qu'il y a d'unités dans la somme des exposans des plus hautes différences de ces variables.

Au reste ce théorème n'est qu'une suite de celui de l'Art. VI. Car il est clair que les équations proposées peuvent toujours réduire à ne contenir chacune qu'une seule variable; & il est facile de s'assurer par le calcul que les réduites seront nécessairement de l'ordre m ; donc &c.

XXVIII. Les équations $V = 0, V' = 0, V'' = 0$ &c. sont intégrables en général lorsque

$$L = A (h + kt)^p, M = B (h + kt)^{p+1}, \\ N = C (h + kt)^{p+2} \text{ \&c.}, L' = A' (h + kt)^p, \\ M' = B' (h + kt)^{p+1} \text{ \&c. \&c.},$$

& de même

$$l = a (h + kt)^q, m = b (h + kt)^{q+1}, \\ n = c (h + kt)^{q+2} \text{ \&c.}, l' = a' (h + kt)^q, \\ m' = b' (h + kt)^{q+1} \text{ \&c. \&c.},$$

& ainsi des autres.

On fera dans ce cas

$$\zeta = R (h + kt)^r, \quad \zeta' = R' (h + kt)^r,$$

$$\zeta'' = R'' (h + kt)^r \text{ \&c.}$$

$R, R', R'', \text{ \&c.}$ étant ainsi que r des constantes indéterminées; on substituera ces valeurs dans les équations dont il s'agit, & divisant ensuite la première par $(h + kt)^{p+r}$, la seconde par $(h + kt)^{p+r}$ &c. on aura des équations sans t , qui donneront les valeurs de $r, R, R', R'' \text{ \&c.}$

XXIX. Si les coefficients $L, M, N \text{ \&c.}, L', M', N' \text{ \&c.}$ étoient constants, on feroit $k = 0, h = 1, \text{ \& } r = \frac{p}{k}, \rho$ étant une quantité finie, & l'on auroit $(h + kt)^r = e^{\rho t}$; par conséquent il faudroit supposer

$$\zeta = R e^{\rho t}, \quad \zeta' = R' e^{\rho t}, \quad \zeta'' = R'' e^{\rho t} \text{ \&c.}$$

Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.

XXX. Soit n le nombre des corps qui composent le système, & nommons $y', y'', y''' \text{ \&c.}$ les espaces infiniment petits que ces corps décrivent dans leurs oscillations pendant le tems t , on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre & des ordres plus élevés, des équations de cette forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y'}{d t^2} + A' y' + B' y'' + C' y''' + \text{\&c.} + N' y^n &= 0, \\ \frac{d^2 y''}{d t^2} + A'' y' + B'' y'' + C'' y''' + \text{\&c.} + N'' y^n &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ (a)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3y'''}{dt^3} + A''y' + B'''y'' + C''y''' + \&c. + N'''y^n = 0 \\ \&c. \\ \frac{d^2y''}{dt^2} + A^ny' + B^ny'' + C^ny''' + \&c. + N^ny^n = 0, \end{aligned} \right\} (a)$$

$A', B', C' \&c. A'', B'', C'' \&c. \&c.$ étant des constantes données par la nature du problème.

Pour intégrer ces équations suivant la méthode expliquée ci-dessus, on multipliera la première par $\lambda' e^{\rho t} dt$, la seconde par $\lambda'' e^{\rho t} dt$, la troisième par $\lambda''' e^{\rho t} dt$, & ainsi de suite, $\lambda', \lambda'', \lambda''' \&c.$ étant, ainsi que ρ , des constantes indéterminées; ensuite on les ajoutera ensemble, & on en prendra l'intégrale en faisant disparoitre de dessous le signe \int les différences des variables $y', y'', y''' \&c.$; après quoi on fera $= 0$ les coéfiens des quantités $\int y' e^{\rho t} dt, \int y'' e^{\rho t} dt, \int y''' e^{\rho t} dt \&c.$; de cette manière on aura d'abord l'équation intégrale

$$\left\{ \lambda' \left(\frac{dy'}{dt} - \rho y' \right) + \lambda'' \left(\frac{dy''}{dt} - \rho y'' \right) + \lambda''' \left(\frac{dy'''}{dt} - \rho y''' \right) + \&c. + \lambda^n \left(\frac{dy^n}{dt} - \rho y^n \right) \right\} e^{\rho t} = \text{const.} \dots (b)$$

& ensuite les équations

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 \lambda' + A \lambda' + A' \lambda'' + A'' \lambda''' + \&c. + A^n \lambda^n = 0 \\ \rho^2 \lambda'' + B \lambda' + B'' \lambda'' + B''' \lambda''' + \&c. + B^n \lambda^n = 0 \\ \rho^2 \lambda''' + C \lambda' + C'' \lambda'' + C''' \lambda''' + \&c. + C^n \lambda^n = 0 \\ \&c. \\ \rho^2 \lambda^n + N \lambda' + N'' \lambda'' + N''' \lambda''' + \&c. + N^n \lambda^n = 0 \end{aligned} \right\} (c)$$

lesquelles serviront à déterminer les quantités $\rho, \lambda', \lambda'', \lambda''' \&c.$

Soit, lorsque $t = 0$, $y' = Y', y'' = Y'', y''' = Y''' \&c.$

& $\frac{dy'}{dt} = V', \frac{dy''}{dt} = V'', \frac{dy'''}{dt} = V''' \&c.$, l'équation (b) deviendra en divisant par $e^{\rho t}$

$$\begin{aligned} & \lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \&c. + \lambda^n \frac{dy^n}{dt} \\ & - \rho (\lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \&c. + \lambda^n y^n) \\ & = [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n \\ & - \rho (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)] e^{-\rho t} \end{aligned}$$

Or comme la quantité ρ ne se trouve dans les équations (c) que sous la forme quadratique ρ^2 , il s'enfuit qu'elle peut avoir indifféremment le signe $+$ & le signe $-$; donc on aura aussi

$$\begin{aligned} & \lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \&c. + \lambda^n \frac{dy^n}{dt} \\ & + \rho (\lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \&c. + \lambda^n y^n) \\ & = [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n \\ & + \rho (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)] e^{\rho t}; \end{aligned}$$

Donc retranchant ces deux équations l'une de l'autre, & divisant ensuite par 2ρ on aura

$$\begin{aligned} (d) \dots \dots \lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \&c. + \lambda^n y^n \\ & = (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n) \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} \\ & + (\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n) \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}. \end{aligned}$$

Qu'on reprenne maintenant les équations (c), & qu'on substitue dans une quelconque de ces équations les valeurs de $\frac{\lambda^1}{\lambda^1}$, $\frac{\lambda^2}{\lambda^1}$, &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda^1}$ en ρ^2 tirées de $n - 1$ autres, valeurs qui seront toujours données, comme l'on voit, par des équations linéaires, on aura une équation qui étant ordonnée par rapport à ρ^2 montera au degré n , & aura par conséquent n racines. Donc ρ aura, indépendamment de l'ambiguïté du signe dont nous avons déjà tenu compte, n valeurs que nous dénoterons par ρ_1, ρ_2, ρ_3 &c. (ρ_n), en sorte que $(\rho_1)^2, (\rho_2)^2, (\rho_3)^2$ soient les racines de l'équation dont il s'agit. Donc, si on fait pour abréger

$$\theta = (\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n) \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$$

$$+ (\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n) \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

& qu'on désigne par $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ &c. (λ'_n) , $\lambda''_1, \lambda''_2, \lambda''_3$ &c. (λ''_n) &c. les valeurs de λ', λ'' &c. qui résultent de la substitution de ρ_1, ρ_2, ρ_3 &c. (ρ_n) au lieu de ρ , & que de même $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ &c. (θ_n) soient les valeurs correspondantes de θ , on aura lieu de l'équation (d) les n suivantes

$$\lambda'_1 y' + \lambda''_1 y'' + \lambda'''_1 y''' + \&c. + \lambda^n_1 y^n = \theta_1$$

$$\lambda'_2 y' + \lambda''_2 y'' + \lambda'''_2 y''' + \&c. + \lambda^n_2 y^n = \theta_2$$

$$\lambda'_3 y' + \lambda''_3 y'' + \lambda'''_3 y''' + \&c. + \lambda^n_3 y^n = \theta_3$$

&c.

$(\lambda'_n) y' + (\lambda''_n) y'' + (\lambda'''_n) y''' + \&c. + (\lambda^n_n) y^n = (\theta_n)$
par lesquelles il faudra déterminer les n inconnues y', y'', y''' &c. y^n ; - c'est à quoi se réduit maintenant toute la difficulté du problème.

Pour en venir à bout, je multiplie la première de ces équations par μ' , la seconde par μ'' , la troisième par μ''' , & ainsi de suite, μ', μ'', μ''' &c. étant des coefficients indéterminés, puis je les ajoute ensemble, ce qui me donne, en ordonnant les termes par rapport à y', y'', y''' &c.

$$[\mu' \lambda'_1 + \mu'' \lambda'_2 + \mu''' \lambda'_3 + \&c. + \mu^n (\lambda'_n)] y' \\ + [\mu' \lambda''_1 + \mu'' \lambda''_2 + \mu''' \lambda''_3 + \&c. + \mu^n (\lambda''_n)] y'' \\ + [\mu' \lambda'''_1 + \mu'' \lambda'''_2 + \mu''' \lambda'''_3 + \&c. + \mu^n (\lambda'''_n)] y''' \\ \&c.$$

$$+ [\mu' \lambda^n_1 + \mu'' \lambda^n_2 + \mu''' \lambda^n_3 + \&c. + \mu^n (\lambda^n_n)] y^n \\ = \mu' \theta_1 + \mu'' \theta_2 + \mu''' \theta_3 + \&c. + \mu^n (\theta_n);$$

d'où l'on tirera aisément la valeur d'une y quelconque, comme y^s , en égalant à zero chacun des coefficients des autres y ; ainsi l'on aura

$$y^s = \frac{\mu' \theta_1 + \mu'' \theta_2 + \mu''' \theta_3 + \&c. + \mu^n (\theta_n)}{\mu' \lambda^s_1 + \mu'' \lambda^s_2 + \mu''' \lambda^s_3 + \&c. + \mu^n (\lambda^s_n)} \dots (e)$$

Donc si on suppose que les quantités v', v'', v''' &c. v^n , ou plutôt leurs rapports soient tels que les coefficients de $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ &c. λ^{n-1} dans cette équation soient nuls chacun en particulier, celui de λ^n le fera aussi; de sorte que l'on aura les n équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 v' + A' v' + B' v'' + C' v''' + \&c. + N' v^n &= 0 \\ \rho^2 v'' + A'' v' + B'' v'' + C'' v''' + \&c. + N'' v^n &= 0 \\ \rho^2 v''' + A''' v' + B''' v'' + C''' v''' + \&c. + N''' v^n &= 0 \\ \&c. \\ \rho^2 v^n + A^n v' + B^n v'' + C^n v''' + \&c. + N^n v^n &= 0 \end{aligned} \right\} . (k)$$

Et il est bon de remarquer, qu'en éliminant de ces équations les quantités v', v'', v''' &c. on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ &c.; ce qui peut se voir aisément à *priori*.

Faisons maintenant $\rho = (\rho m)$, nous aurons

$$\begin{aligned} A' v' + B' v'' + C' v''' + \&c. + N' v^n &= -(\rho m)^2 v' \\ A'' v' + B'' v'' + C'' v''' + \&c. + N'' v^n &= -(\rho m)^2 v'' \\ A''' v' + B''' v'' + C''' v''' + \&c. + N''' v^n &= -(\rho m)^2 v''' \\ \&c. \end{aligned}$$

$$A^n v' + B^n v'' + C^n v''' + \&c. + N^n v^n = -(\rho m)^2 v^n;$$

& l'équation (i) deviendra

$$[\rho^2 - (\rho m)^2] \chi [v' \lambda' + v'' \lambda'' + v''' \lambda''' + \&c. + v^n \lambda^n] = 0,$$

laquelle devant être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations (e) d'où celle-ci est tirée, on aura en général

$$v' \lambda' + v'' \lambda'' + v''' \lambda''' + \&c. + v^n \lambda^n = 0$$

lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3$ &c. (ρ_n) , excepté (ρm) , auquel cas l'équation se vérifie d'elle-même, à cause du facteur $\rho^2 - (\rho m)^2$.

D'où l'on voit que les valeurs de v', v'', v''' &c. v^n qui satisfont à la condition (h) sont les mêmes que celles qui résultent des équations (k), en y faisant $\rho = (\rho m)$.

Donc

Donc si on dénote ces valeurs par $(v'm)$, $(v''m)$, $(v'''m)$ &c., & qu'on les substitue dans l'équation (g) on aura

$$\mu^m = \frac{(v'm)\Delta' + (v''m)\Delta'' + (v'''m)\Delta''' + \&c. + (v^n m)\Delta^n}{(v'm)(\lambda^1 m) + (v''m)(\lambda^2 m) + (v'''m)(\lambda^3 m) + \&c. + (v^n m)(\lambda^n m)}.$$

Mais les équations (f) demandent que les quantités Δ' , Δ'' , Δ''' &c. Δ^n soient toutes nulles à l'exception de Δ^s , donc si on fait pour abréger

$$v'\lambda^1 + v''\lambda^2 + v'''\lambda^3 + \&c. + v^n\lambda^n = Q$$

& qu'on dénote en général par (Qm) , la valeur de Q lorsque $\rho = (\rho m)$, on aura pour notre cas

$$\mu^m = \frac{(v^s m)\Delta^s}{(Qm)},$$

& par conséquent

$$\mu' = \frac{(v^s 1)\Delta^s}{Q_1}, \mu'' = \frac{(v^s 2)\Delta^s}{Q_2} \&c.$$

Donc enfin substituant ces valeurs dans la formule (e), & faisant attention que

$$\Delta^s = \mu'\lambda^s 1 + \mu''\lambda^s 2 + \mu'''\lambda^s 3 + \&c. + \mu^n(\lambda^s n)$$

on aura

$$y^s = \frac{v^s 1}{Q_1} \theta_1 + \frac{v^s 2}{Q_2} \theta_2 + \frac{v^s 3}{Q_3} \theta_3 + \&c. + \frac{(v^s n)}{(Qn)} (\theta_n).$$

Ainsi le problème ne dépend plus que de la résolution des équations (c) & (k).

XXXI. Nous avons trouvé que la quantité $(v'm)\lambda^1 + (v''m)\lambda^2 + (v'''m)\lambda^3 + \&c. + (v^n m)\lambda^n$ est nulle lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3$ &c. (ρn) , excepté (ρm) ; or il est facile de voir que les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda''}$ &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda^{n-1}}$ tirées

des équations (c) seront exprimées par des fractions telles que $\frac{q'}{q'}$, $\frac{q''}{q'}$ &c. $\frac{q^n}{q'}$, les quantités q' , q'' , q''' &c. étant de la forme $a + b\rho^2 + c\rho^4 + \&c. + h\rho^{2(n-1)}$; de sorte que si on fait, ce qui est permis, $\lambda^1 = q'$, on

aura $\lambda'' = q''$, $\lambda''' = q'''$ &c.; & par conséquent la quantité $(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + (v'''m)\lambda''' + \&c. + (v^nm)\lambda^n$ deviendra de la forme $\alpha + \beta\rho^2 + \gamma\rho^4 + \&c. + \zeta\rho^{2(n-1)}$; donc on aura

$$(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + (v'''m)\lambda''' + \&c. + (v^nm)\lambda^n = \chi \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right),$$

en prenant tous les facteurs depuis $1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}$ jusqu'à

$1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}$, hormis $1 - \frac{\rho^2}{(\rho m)^2}$; & le coefficient χ étant égal à la valeur de $(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + \&c. + (v^nm)\lambda^n$ lorsque on fait $\rho = 0$ dans les quantités λ' , λ'' , λ''' &c.

Or soit $P = 0$ l'équation en ρ^2 tirée des équations (c), ou (k), on aura, en supposant que le terme tout connu de P soit 1,

$$P = \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right)$$

donc

$$\chi P = \left[(v'm)\lambda' + (v''m)\lambda'' + (v'''m)\lambda''' + \&c. + (v^nm)\lambda^n \right] \times \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho m)^2}\right).$$

Prenons les différences de part & d'autre, en faisant varier ρ , & supposons ensuite $\rho = (\rho m)$, ce qui changera les quantités λ' , λ'' , λ''' &c. en $(\lambda'm)$, $(\lambda''m)$, $(\lambda'''m)$ &c.: nous aurons

$$\chi \frac{dP}{d\rho} = - \frac{2}{(\rho m)} \left[(v'm)(\lambda''m) + (v''m)(\lambda'''m) + (v'''m)(\lambda''''m) \right. \\ \left. + \&c. + (v^nm)(\lambda^nm) \right] = \frac{2(Qm)}{(\rho m)};$$

donc on aura en général

$$Q = - \chi \rho \frac{dP}{2 d\rho}$$

ce qui pourra servir à abréger le calcul de la valeur de Q dans plusieurs occasions.

XXXII. Examinons maintenant les différens cas, qui peuvent arriver relativement aux racines de l'équation $P = 0$. Et d'abord il est clair que si toutes ces racines sont réelles positives & inégales les valeurs de ρ seront aussi réelles & inégales; ainsi ce cas n'aura aucune difficulté.

S'il y a des racines négatives, alors les valeurs correspondantes de ρ deviendront imaginaires de la forme $r\sqrt{-1}$, ce qui réduira les exponentielles $\frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$ & $\frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$

à cette forme $\cos. r t$, & $\frac{\sin. r t}{r}$; d'où il s'ensuit que si toutes les racines de l'équation $P = 0$ étoient réelles négatives & inégales, les valeurs de y' , y'' , y''' &c. ne contiendroient que des *sinus* & des *cosinus*; nous verrons plus bas que ce cas est le seul où la solution soit bonne en général relativement à la question mécanique.

Passons au cas des racines égales, & supposons $\rho_2 = \rho_1$, il est facile de voir par les formules de l'Art. préc. que les valeurs de Q_1 & de Q_2 deviendront $= 0$; de sorte que les deux premiers termes de la valeur de y semblent devoir être infinis. Pour obvier à cet inconvénient, on supposera $\rho_2 = \rho_1 + \omega$, ω étant une quantité évanescente, & à cause de $Q = -\chi\rho \frac{dP}{2d\rho} = -\frac{\chi\rho}{2d\rho}$

$$d \cdot \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho_1)^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho_2)^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho_3)^2}\right) \dots \dots \dots$$

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho_n)^2}\right), \text{ l'on aura}$$

$$Q_1 = \chi \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_2)^2}\right) \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_3)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_n)^2}\right)$$

$$= 2 \chi \frac{\omega}{\rho_1} \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_3)^2} \right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_n)^2} \right)$$

& de même

$$Q_2 = -2 \chi \frac{\omega}{\rho_1} \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_3)^2} \right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{(\rho_1)^2}{(\rho_n)^2} \right)$$

Donc si on fait $\frac{dQ}{d\rho} = R$, & qu'on dénote par R_1 ce que devient R lorsque ρ devient ρ_1 , on aura $Q_1 = -\frac{\omega}{(\rho_1)^2} R_1$, & $Q_2 = \frac{\omega}{(\rho_1)^2} R_1$.

Or, en faisant $\rho_2 = \rho_1 + \omega$, on a $\nu^2 \theta_2 = \nu^1 \theta_1 + \frac{d.(\nu^1 \theta_1)}{d\rho_1} \omega$; donc

$$\frac{\nu^1 \theta_1}{Q_1} + \frac{\nu^2 \theta_2}{Q_2} = -\frac{(\rho_1)^2 \nu^1 \theta_1}{\omega R_1} + \frac{(\rho_1)^2 \nu^1 \theta_1}{\omega R_1} + \frac{(\rho_1)^2}{\omega R_1} \chi \frac{d.(\nu^1 \theta_1)}{d\rho_1} \omega = \frac{(\rho_1)^2}{R_1} \chi \frac{d.(\nu^1 \theta_1)}{d\rho_1}.$$

On réduira de même le cas de trois racines égales, & ainsi des autres. Au reste il est évident que les termes de la valeur de y^2 qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle t , & de plus des exponentielles ordinaires, si ces racines sont positives, & des *sinus* & des *cosinus* si elles sont négatives.

Enfin s'il se trouvoit des racines imaginaires, on les réduiroit d'abord deux à deux à la forme $a + b\sqrt{-1}$, & $a - b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles, de sorte que $(\rho_1)^2 = a + b\sqrt{-1}$, $(\rho_2)^2 = a - b\sqrt{-1}$, & ainsi de suite; ce qui donneroit $\rho_1 = f + g\sqrt{-1}$, $\rho_2 = f - g\sqrt{-1}$, & par conséquent $e^{\pm \rho_1 t} = e^{\pm f t} \chi e^{\pm g t \sqrt{-1}} = e^{\pm f t} (\cos. g t \pm \sin. g t \chi \sqrt{-1})$, & de même $e^{\pm \rho_2 t} = e^{\pm f t} (\cos. g t \mp \sin. g t \chi \sqrt{-1})$. On rameneroit de même à la forme $p + q\sqrt{-1}$, & $p - q\sqrt{-1}$ les valeurs des quantités μ , ν , & Q répondantes à ρ_1 & ρ_2 , & on trouveroit après les substi-

tutions & les réductions, que les imaginaires se détruiraient dans les deux termes $\frac{r^1}{Q^1} \theta_1 + \frac{r^2}{Q^2} \theta_2$, lesquels contiendroient alors des *sinus* & des *cosinus* multipliés par des exponentielles ordinaires.

XXXIII. Au reste quand on veut appliquer la solution précédente au mouvement d'un système quelconque de corps, on doit supposer, comme nous l'avons fait, que les quantités y' , y'' , y''' &c. soient assez petites pour qu'on puisse négliger, sans erreur sensible, dans les expressions des forces accélératrices des corps, les termes qui contiendroient les produits y^2 , $y'y''$ &c. Ainsi il faudra pour que la solution soit bonne *mécaniquement* 1.^o que les valeurs initiales Y' , Y'' , Y''' &c. V' , V'' , V''' &c. soient infiniment petites. 2.^o que les expressions de y' , y'' , y''' &c. ne contiennent aucun terme qui augmente à l'infini avec le tems t ; par conséquent il faudra que les racines de l'équation $P = 0$ soient toutes réelles négatives & inégales, auquel cas la valeur de y^s ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* (*Art. préc.*), ou au moins que les termes qui renfermeraient l'arc t disparaissent d'eux mêmes.

Donc 1.^o si $(\rho_1)^2$ est une quantité positive, il faudra que l'on ait

$$\left. \begin{aligned} \lambda^1_1 Y' + \lambda^2_1 Y'' + \lambda^3_1 Y''' + \&c. + \lambda^n_1 Y^n = 0 \\ \lambda^1_1 V' + \lambda^2_1 V'' + \lambda^3_1 V''' + \&c. + \lambda^n_1 V^n = 0 \end{aligned} \right\} . (l)$$

ce qui fera évanouir le premier terme $\frac{r^1}{Q^1} \theta_1$ de la valeur de y^s .

De même si $(\rho_1)^2$ & $(\rho_2)^2$ étoient toutes deux positives, mais inégales, on auroit, outre les deux conditions précédentes, encore ces deux-ci

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2_2 Y' + \lambda^2_2 Y'' + \lambda^3_2 Y''' + \&c. + \lambda^n_2 Y^n = 0 \\ \lambda^2_2 V' + \lambda^2_2 V'' + \lambda^3_2 V''' + \&c. + \lambda^n_2 V^n = 0, \end{aligned} \right\}$$

& il faudroit effacer les deux premiers termes de y^s ; & ainsi de suite.

2.^o Si $(\rho_1)^2$ & $(\rho_2)^2$ font égales & négatives, on aura les mêmes conditions (l), & les deux termes

$$\frac{r_1}{Q_1} \theta_1 + \frac{r_2}{Q_2} \theta_2 \text{ deviendront, en faisant } \rho_1 = r_1 \sqrt{-1},$$

$$\frac{r_1}{2R_1} \times \frac{d. r_1 (\lambda_1 Y' + \lambda_2 Y'' + \lambda_3 Y''' + \&c. + \lambda_n Y^n)}{dr_1} \text{ cof. } r_1 t$$

$$+ \frac{r_1}{2R_1} \times \frac{d. \frac{r_1}{r_1} (\lambda_1 V' + \lambda_2 V'' + \lambda_3 V''' + \&c. + \lambda_n V^n)}{dr_1} \text{ fin. } r_1 t.$$

Mais si $(\rho_1)^2$ & $(\rho_2)^2$ étoient égales & positives, alors on auroit encore deux autres conditions à remplir, favoir

$$\frac{d. r_1 (\lambda_1 Y' + \lambda_2 Y'' + \lambda_3 Y''' + \&c. + \lambda_n Y^n)}{d\rho_1} = 0$$

$$\frac{d. \frac{r_1}{\rho_1} (\lambda_1 V' + \lambda_2 V'' + \lambda_3 V''' + \&c. + \lambda_n V^n)}{d\rho_1} = 0;$$

& ainsi du reste.

Mais il y a ici une remarque importante à faire; c'est que les équations (a) n'étant qu'approchées, l'équation $P = 0$ doit aussi être regardée comme telle, de sorte que lorsque on trouve des racines égales, on n'est pas en droit d'en conclure que les valeurs de ρ sont égales, mais seulement qu'elles ne diffèrent que par des quantités infiniment petites; d'où il s'ensuit qu'à la rigueur, l'égalité des racines de l'équation $P = 0$, ne suffit pas pour introduire des arcs de cercle dans les valeurs de y' , y'' , y''' &c. en tant que ces quantités représentent les espaces parcourus dans les oscillations des corps. Cependant comme la supposition de $\rho_2 = \rho_1 + \omega$, ω étant une quantité très-petite, rend aussi les quantités Q_1 & Q_2 très-petites du même ordre, comme on peut s'en assurer par ce qui a été dit.

dans l'Art. préc. sur le cas des racines égales, il est clair que les quantités $\frac{\theta_1}{Q_1}$ & $\frac{\theta_2}{Q_2}$ contiendront des termes finis, & qu'ainsi il faudra, pour que les valeurs de y' , y'' , y''' &c. soient toujours très-petites, que les termes dont il s'agit disparaissent entièrement de l'expression de y' ; ce qui donnera, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, les mêmes conditions & les mêmes résultats que ci-dessus. Il est clair que ce que nous venons de dire des racines égales, doit avoir lieu de même, lorsque elles ne diffèrent que par des quantités très-petites.

3.^o Si $(p_1)^2$ & $(p_2)^2$ étoient imaginaires, alors réduisant les quantités $\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'''_1$ &c., & $\lambda'_2, \lambda''_2, \lambda'''_2$ &c. à la forme $p' + q'\sqrt{-1}$, $p'' + q''\sqrt{-1}$, $p''' + q'''\sqrt{-1}$ &c., & $p' - q'\sqrt{-1}$, $p'' - q''\sqrt{-1}$, $p''' - q'''\sqrt{-1}$ &c. on auroit les conditions suivantes

$$p'Y' + p''Y'' + p'''Y''' + \&c. + p^n Y^n = 0,$$

$$p'V' + p''V'' + p'''V''' + \&c. + p^n V^n = 0,$$

$$q'Y' + q''Y'' + q'''Y''' + \&c. + q^n Y^n = 0, \&$$

$$q'V' + q''V'' + q'''V''' + \&c. + q^n V^n = 0.$$

On aura de pareilles conditions pour chaque paire de racines imaginaires.

XXXIV. De là on tire une méthode générale pour voir si l'état d'équilibre d'un système quelconque donné de corps est *stable*, c'est-à-dire, si les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y renviendront d'eux mêmes, ou au moins tendront à y revenir.

On supposera le système dans un état infiniment proche de celui d'équilibre, & on cherchera les expressions des forces accélératrices des corps pour se remettre à cette état, lesquelles seront, aux infinimens petits du second or-

dre & des suivans près, de cette forme $Ay' + By'' + Cy''' + \&c.$, comme nous l'avons supposé dans les équations (a). On formera ensuite des équations telles que les équations (c), & on en tirera l'équation $P = 0$, dont ρ^2 sera l'inconnue, & qui sera nécessairement d'un degré égal à l'exposant du nombre des corps. Cela posé

1.° Si toutes les racines de cette équation sont réelles négatives & inégales, l'état d'équilibre sera *stable* en général quel que soit le dérangement initial du système.

2.° Si ces racines sont toutes réelles positives ou toutes imaginaires, ou en partie réelles positives, & en partie imaginaires, l'état d'équilibre n'aura aucune *stabilité*, & le système une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre.

3.° Enfin si les racines sont en partie réelles négatives & inégales, & en partie réelles négatives & égales, ou réelles & positives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura seulement une *stabilité relative & conditionnelle*, c'est-à-dire, que cet état ne se rétablira, ou ne tendra à se rétablir, que lorsque il y aura, entre les distances & les vitesses initiales, les conditions marquées dans l'Art. préc.; dans tous les autres cas il sera impossible que le système revienne de lui même à son premier état.

XXXV. Lorsque toutes les racines de l'équation $P = 0$ sont réelles inégales & négatives, il est clair, qu'en faisant $\rho^2 = -r^2$, chaque terme de la valeur de y^s se réduira à la forme $\alpha \cos. rt + \beta \sin. rt$, laquelle représente, comme l'on fait, le mouvement d'un pendule simple de longueur $\frac{1}{r^2}$; d'où il est aisé de conclure que le mouvement de chaque corps sera composé de n mouvemens pareils à ceux de n pendules dont les longueurs seroient

$$\frac{1}{(r1)^2},$$

$\frac{1}{(r_1)^2}$, $\frac{1}{(r_2)^2}$, $\frac{1}{(r_3)^2}$ &c. $\frac{1}{(r_n)^2}$. C'est le théorème que M. Daniel Bernoulli a déduit, par induction, de la considération du mouvement d'une corde chargée de plusieurs poids.

Si on veut que les oscillations des corps deviennent simples & isochrones, on supposera que l'état initial du système soit tel que l'on ait

$$\left. \begin{aligned} \lambda'V' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n &= 0 \& \\ \lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n &= 0 \end{aligned} \right\} (m)$$

pour toutes les valeurs de ρ^2 , hors une quelconque à volonté comme $(\rho m)^2$; car alors les quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ &c. seront nulles, à l'exception de (θm) ; & par conséquent

la valeur de y^s se réduira à $\frac{(v^s m)}{(Q m)} (\theta m)$. Mais les équations

(m) étant absolument semblables à l'équation (h) de l'Art. XXX., il est clair qu'on aura pour la détermination des quantités Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. des équations analogues aux équations (k) ; d'où il s'ensuit que ces quantités seront en raison constante avec les quantités $(v^s m), (v'' m), (v''' m)$ &c. $(v^n m)$; de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda' m) Y' + (\lambda'' m) Y'' + (\lambda''' m) Y''' + \&c. + (\lambda^n m) Y^n}{Y^s} \\ = & \frac{(\lambda' m) V' + (\lambda'' m) V'' + (\lambda''' m) V''' + \&c. + (\lambda^n m) V^n}{V^s} \\ = & \frac{(\lambda' m) (v^s m) + (\lambda'' m) (v'' m) + (\lambda''' m) (v''' m) + \&c. + (\lambda^n m) (v^n m)}{(v^s m)} \\ = & \frac{(Q m)}{(v^s m)}; \text{ donc} \end{aligned}$$

$$y^s = Y^s \cos. (r m) t + V^s \frac{\sin. (r m) t}{(r m)};$$

Ainsi le mouvement des corps sera le même, dans ce cas, que s'ils étoient pesans, & qu'ils fussent suspendus

chacun à un fil de longueur $\frac{1}{(rm)^2}$, la gravité étant prise pour l'unité des forces accélératrices; d'où l'on voit que le système est susceptible d'autant de différens mouvemens isochrones que l'équation $P = 0$ a des racines réelles négatives & inégales.

Des oscillations d'un fil fixe par une de ses extrémités, & chargé d'un nombre quelconque de poids.

XXXVI. Soit n le nombre des poids que nous supposons, pour plus de simplicité, égaux entr'eux & également éloignés les uns des autres; imaginons que le fil ne fasse que des oscillations infiniment petites & dans le même plan; & soient nommées y', y'', y''' &c. y^n les distances des corps à la verticale à commencer par le plus bas, & a la distance d'un corps à l'autre, on aura, comme il est très-aisé de le voir par les principes de la Dynamique, & comme on peut le déduire des formules générales que j'ai données à la page 227. du Vol. préc.,

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} + \frac{y'' - y'''}{a} - \frac{y' - 2y'' + y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y'''}{dt^2} + \frac{y''' - y^{(iv)}}{a} - 2 \frac{y'' - 2y''' + y^{(iv)}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y^{(iv)}}{dt^2} + \frac{y^{(iv)} - y^{(v)}}{a} - 3 \frac{y''' - 2y^{(iv)} + y^{(v)}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2 y^n}{dt^2} + \frac{y^n}{a} - (n-1) \frac{y^{n-1} - 2y^n}{a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} + \frac{-y' + 3y'' - 2y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y'''}{dt^2} + \frac{-2y'' + 5y''' - 3y^{(4)}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y^{(4)}}{dt^2} + \frac{-3y''' + 7y^{(4)} - 4y^{(5)}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2 y^n}{dt^2} + \frac{-(n-1)y^{n-1} + (2n-1)y^n}{a} = 0.$$

Comparant ces équations avec les équations (a) de l'Art. XXX., on trouvera que les équations (c) du même Article deviennent celles-ci

$$\rho^2 \lambda' + \frac{\lambda' - \lambda''}{a} = 0$$

$$\rho^2 \lambda''' + \frac{-\lambda' + 3\lambda'' - 2\lambda'''}{a} = 0$$

$$\rho^2 \lambda^{(4)} + \frac{-2\lambda'' + 5\lambda''' - 3\lambda^{(4)}}{a} = 0$$

$$\rho^2 \lambda^{(5)} + \frac{-3\lambda''' + 7\lambda^{(4)} - 4\lambda^{(5)}}{a} = 0$$

&c.

$$\rho^2 \lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda'' = (1 + a\rho^2)\lambda'$$

$$\lambda''' = \frac{-\lambda' + (3 + a\rho^2)\lambda''}{2}$$

$$= (1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2\rho^4}{2})\lambda'$$

$$\lambda^{(4)} = (1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2\rho^4}{2} + \frac{a^3\rho^6}{2 \cdot 3})\lambda'$$

$$\lambda^v = \left(1 + 4a\rho^2 + \frac{6a^2\rho^4}{2} + \frac{4a^3\rho^6}{2 \cdot 3} + \frac{a^4\rho^8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \lambda',$$

& ainsi de suite; de sorte que l'on aura en général

$$\lambda^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4} a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4 \cdot 9} a^3\rho^6 + \&c. \right] \lambda'.$$

Or il est visible que, pour satisfaire à la dernière équation $\rho^2 \lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0$,

il faut supposer $\lambda^{n+1} = 0$; ce qui donne

$$1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4} \rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4 \cdot 9} \rho^6 + \&c. = 0$$

équation, d'où l'on tirera n valeurs de ρ^2 , qu'on désignera par $(\rho_1)^2$, $(\rho_2)^2$, $(\rho_3)^2$ &c. $(\rho_n)^2$, & qu'on substituera successivement dans l'expression de λ^m pour avoir les valeurs de λ^{m_1} , λ^{m_2} , λ^{m_3} &c.

A l'égard des quantités v , on les trouvera de la même manière par le moyen des équations (k) , lesquelles deviennent dans le cas présent

$$\rho^2 v' + \frac{v' - v''}{a} = 0$$

$$\rho^2 v'' + \frac{-v'' + 3v''' - 2v^{(4)}}{a} = 0$$

$$\rho^2 v^{(4)} + \frac{-2v''' + 5v^{(4)} - 3v^{(5)}}{a} = 0$$

&c.

$$\rho^2 v^n + \frac{-(n-1)v^{n-1} + (2n-1)v^n}{a} = 0$$

d'où l'on tire comme ci-dessus

$$\rho^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4} a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4 \cdot 9} a^3\rho^6 + \&c. \right] v',$$

ou bien, en supposant pour plus de simplicité $\lambda' = v' = 1$, $v^m = \lambda^m$; & par conséquent $v^{m_1} = \lambda^{m_1}$, $v^{m_2} = \lambda^{m_2}$ &c.

On aura donc

$$Q = (\lambda)^2 + (\lambda'')^2 + (\lambda''')^2 + \&c. + (\lambda^n)^2 \\ = 1 + (1 + a\rho^2)^2 + (1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4)^2 + \&c. \\ + [1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \&c.]^2.$$

Mais on peut trouver une expression plus simple de cette quantité par la méthode de l'Article XXXI. Car, on a d'abord

$$P = 1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\rho \frac{dP}{2d\rho} = na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{2}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.3}\rho^6 + \&c.$$

Or en faisant $\rho = 0$, on a $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 1$ &c. donc

$$\chi = v' + v'' + v''' + \&c. + v^n \\ = 1$$

$$+ 1 + a\rho^2$$

$$+ 1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4$$

$$+ 1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2}{2}\rho^4 + \frac{a^3}{2.3}\rho^6$$

&c.

$$+ 1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9}\rho^6$$

+ &c.

$$= n + \frac{n(n-1)a}{2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^2}{4.3}\rho^4$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9.4}\rho^6 + \&c.$$

$$\text{Donc } Q = -\chi \rho \frac{dP}{2d\rho} = -a\rho^2 \left(n + \frac{n(n-1)}{2} a\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{4 \cdot 3} a^2\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 9 \cdot 4} a^3\rho^6 + \&c. \right)^2.$$

Ces deux expressions de Q ne sont pas à la vérité identiques ; mais elles deviennent égales lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3$ &c. ; ce qui suffit pour notre objet.

Faisant donc ces substitutions dans la dernière formule de l'Art. XXX., on aura l'expression générale des quantités y , & le problème sera résolu.

Au reste quoique il soit difficile, peut être impossible ; de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, on peut cependant s'assurer, par la nature même du problème, que ces racines sont nécessairement toutes réelles inégales & négatives ; car sans cela les valeurs de y', y'', y''' &c. pourroient croître à l'infini, ce qui seroit absurde.

XXXVII. Si on cherche quelles doivent être les distances & les vitesses initiales des corps pour que chacun d'eux ne fasse que des vibrations isochrones & analogues à celles d'un pendule simple, on trouvera (Art. XXXV.) en prenant l pour la longueur de ce pendule,

$$Y^s = \left(1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4 \cdot 9l^3} + \&c. \right) Y_1^s.$$

$$V^s = \left(1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4 \cdot 9l^3} + \&c. \right) V_1^s.$$

& la valeur de l devra se déterminer par l'équation

$$1 - \frac{na}{l} + \frac{n(n-1)a^2}{4l^2} - \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4 \cdot 9l^3} + \&c. = 0;$$

*Des vibrations d'une corde tendue & chargée
d'un nombre quelconque de poids.*

XXXVIII. Quoique j'aye déjà résolu ce problème dans mes *Recherches sur le Son* imprimées dans le premier Volume de ces Mémoires, je crois pouvoir le redonner ici, non seulement pour faire voir comment ma méthode générale s'y applique, mais encore parce qu'il me donnera lieu de faire de nouvelles reflexions sur les vibrations des cordes sonores, qui pourront être utiles à l'éclaircissement de cette matière épineuse & délicate.

Supposons une corde chargée de n poids égaux qui la divisent en $n + 1$ parties égales que nous ferons chacune $= a$, & tendue par un poids qui soit à la somme de ceux dont la corde est chargée comme $c^2 : 1$; nommant y', y'', y''' &c. y^n les distances des poids à l'axe de la corde, & faisant pour abréger $\frac{nc^2}{a} = k^2$, on aura

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} - k^2 (-2y' + y'') = 0$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} - k^2 (y' - 2y'' + y''') = 0$$

$$\frac{d^2 y'''}{dt^2} - k^2 (y'' - 2y''' + y^{(4)}) = 0$$

$$\text{\&c.}$$

$$\frac{d^2 y^n}{dt^2} - k^2 (y^{n-1} - 2y^n) = 0$$

Donc, en comparant ces équations avec les équations générales de l'Art. XXX. on aura les équations suivantes en $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ &c.

$$\rho^2 \lambda' - k^2 (-2\lambda' + \lambda'') = 0$$

$$\rho^2 \lambda'' - k^2 (\lambda' - 2\lambda'' + \lambda''') = 0$$

$$\rho^2 \lambda''' - k^2 (\lambda'' - 2\lambda''' + \lambda^{(4)}) = 0$$

&c.

$$\rho^2 \lambda^n - k^2 (\lambda^{n-1} - 2 \lambda^n) = 0;$$

d'où l'on tire, en supposant $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cof. } \varphi$, $\lambda'' =$

$$\frac{\text{fin. } 2 \varphi}{\text{fin. } \varphi} \lambda', \lambda''' = \frac{\text{fin. } 3 \varphi}{\text{fin. } \varphi} \lambda', \text{ \&c.}, \text{ \& en général}$$

$$\lambda^m = \frac{\text{fin. } m \varphi}{\text{fin. } \varphi} \lambda'.$$

Et pour la détermination de l'angle φ , c'est-à-dire de la quantité ρ , on aura l'équation $\lambda^{n+1} = \frac{\text{fin. } (n+1) \varphi}{\text{fin. } \varphi} \lambda' = 0$;

laquelle donne $\varphi = \frac{m \pi}{n+1}$, π exprimant l'angle de 180 degrés, & m un nombre quelconque entier depuis 0 jusqu'à n inclusivement. De sorte qu'on aura $\rho = k \sqrt{2 \text{ cof. } \varphi - 2} = 2 k \text{ fin. } \frac{1}{2} \varphi \cdot \sqrt{-1} = 2 k \text{ fin. } \frac{n \pi}{2(n+1)} \cdot \sqrt{-1}$; ce qui donnera toutes les valeurs de ρ que nous avons désignées par ρ_1, ρ_2, ρ_3 &c. (ρ_n), en faisant successivement $m = 1, 2, 3, \text{ \&c. } n$.

On trouvera des équations entièrement semblables en v', v'', v''' &c. d'où l'on tirera pareillement $v^m = \frac{\text{fin. } (n+1) \varphi}{\text{fin. } \varphi} v'$;

De plus on aura

$$\begin{aligned} Q &= \frac{v' \lambda'}{\text{fin. } \varphi^2} \left\{ \text{fin. } \varphi^2 + \text{fin. } 2 \varphi^2 + \text{fin. } 3 \varphi^2 + \text{ \&c. } + \text{fin. } n \varphi^2 \right\} \\ &= \frac{v' \lambda'}{\text{fin. } \varphi^2} \left\{ \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} (\text{cof. } 2 \varphi + \text{cof. } 4 \varphi + \text{cof. } 6 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \text{ \&c. } + \text{cof. } 2n) \right\} \\ &= \frac{v' \lambda'}{\text{fin. } \varphi^2} \left\{ \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{cof. } 2n \varphi - \text{cof. } 2(n+1) \varphi}{2(1 - \text{cof. } 2 \varphi)} - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{(n+1)}{2 \text{ fin. } \varphi^2} v' \lambda', \text{ à cause de } \varphi = \frac{m \pi}{n+1}. \end{aligned}$$

On trouveroit la même valeur de Q la méthode de l'Art. XXXI; mais le calcul seroit alors tant soit peu plus long. Cependant comme ce calcul peut servir à montrer la bonté de la méthode dont nous parlons, je n'ai pas cru devoir le supprimer, mais je l'ai renfermé entre deux crochets, afin que mes Lecteurs puissent le passer s'ils le jugent à propos.

[On aura d'abord $P = \frac{\sin.(n+1)\phi}{(n+1)\sin.\phi}$ (j' écris $P = \frac{\sin.(n+1)\phi}{(n+1)\sin.\phi}$, & non pas simplement $P = \frac{\sin.(n+1)\phi}{\sin.\phi}$, afin que, lorsque $\rho = 0$ c'est-à-dire $\phi = 0$, on ait $P = 1$, comme nous l'avons supposé); d'où l'on tire par la différentiation $\frac{dP}{d\phi} = \frac{\cos.(n+1)\phi}{\sin.\phi} - \frac{\sin.(n+1)\phi \times \cos.\phi}{(n+1)\sin.\phi^2}$
 $= [\text{à cause de } \sin.(n+1)\phi = 0] \frac{\cos.(n+1)\phi}{\sin.\phi}$; or

l'équation $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \cos.\phi$ donne $\frac{\rho^2}{2k^2} = \cos.\phi - 1$,

& prenant les différences logarithmiques $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sin.\phi}{1-\cos.\phi} d\phi$;

donc $\rho \frac{dP}{2d\rho} = \frac{\cos.(n+1)\phi \times (1-\cos.\phi)}{2\sin.\phi^2} = \frac{\cos.(n+1)\phi}{2(1+\cos.\phi)}$.

Maintenant on a, lorsque $\rho = 0$, $\phi = 0$, & par conséquent $\lambda'' = 2\lambda'$, $\lambda''' = 3\lambda'$ &c.; donc

$\chi = \lambda' (v' + 2v'' + 3v''' + \&c. + n v^n)$
 $= \frac{v'\lambda'}{\sin.\phi} (\sin.\phi + 2\sin.2\phi + 3\sin.3\phi + \&c. + n\sin.n\phi)$

$= \frac{v'\lambda'}{\sin.\phi} \times \frac{(n+1)\sin.n\phi - n\sin.(n+1)\phi}{2(1-\cos.\phi)}$

$= [\text{à cause de } \sin.(n+1)\phi = 0] v'\lambda' \frac{(n+1)\sin.n\phi}{2\sin.\phi(1-\cos.\phi)}$;

$$\text{donc } Q = -\chi p \frac{dP}{2d\rho} = -\frac{(n+1) \sin. \varphi \cdot \text{cof. } (n+1) \varphi}{4 \sin. \varphi^3} \sqrt{\lambda'}$$

$$= -\frac{(n+1) (\sin. (2n+1) \varphi - \sin. \varphi)}{4 \sin. \varphi^3} \sqrt{\lambda'} = \frac{n+1}{2 \sin. \varphi^2} \sqrt{\lambda'}$$

à cause de $\sin. (2n+1) \varphi = -\sin. \varphi$].

Donc faisant ces substitutions dans l'expression de y' (Art. XXX.), & supposant en général

$$(Y_m) = Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} + Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1} \&c.$$

$$(V_m) = V' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + V'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} + V''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + V^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1}$$

on aura

$$X^s = \frac{2 \sin. \frac{s\pi}{n+1}}{n+1} \left(Y_1 \text{ cof. } (2sk \sin. \frac{\pi}{2(n+1)}) + \frac{V_1}{2k \sin. \frac{\pi}{2(n+1)}} \sin. (2sk \sin. \frac{\pi}{2(n+1)}) \right)$$

$$+ \frac{2 \sin. \frac{2s\pi}{n+1}}{n+1} \left(Y_2 \text{ cof. } (2sk \sin. \frac{2\pi}{2(n+1)}) + \frac{V_2}{2k \sin. \frac{2\pi}{2(n+1)}} \sin. (2sk \sin. \frac{2\pi}{2(n+1)}) \right)$$

$$+ \frac{2 \sin. \frac{3s\pi}{n+1}}{n+1} \left(Y_3 \text{ cof. } (2sk \sin. \frac{3\pi}{2(n+1)}) + \frac{V_3}{2k \sin. \frac{3\pi}{2(n+1)}} \sin. (2sk \sin. \frac{3\pi}{2(n+1)}) \right)$$

&c.

$$+ \frac{2 \sin. \frac{ns\pi}{n+1}}{n+1} \left((Y_n) \text{ cof. } (2sk \sin. \frac{n\pi}{2(n+1)}) + \frac{(V_n)}{2k \sin. \frac{n\pi}{2(n+1)}} \sin. (2sk \sin. \frac{n\pi}{2(n+1)}) \right)$$

*Application de la solution précédente
aux cordes sonores.*

XXXIX. Je supposerai ici, pour plus de simplicité, que les vitesses initiales V' , V'' , V''' &c. soient nulles, moyennant quoi la valeur de y^s ne contiendra plus que des termes de cette forme

$$\frac{2 \sin. \frac{m s \pi}{n+1}}{n+1} (Y m) \cos. \left(2 t k \sin. \frac{m \pi}{2(n+1)} \right).$$

m étant successivement 1, 2, 3 &c. n .

Cela posé on fait que

$$\varphi = \sin. \varphi + \alpha \sin. \varphi^3 + \beta \sin. \varphi^5 + \gamma \sin. \varphi^7 + \&c.$$

en faisant $\alpha = \frac{1.1}{2.3}$, $\beta = \frac{3.3}{4.5}$, $\gamma = \frac{5.5}{6.7} \beta$ &c.; donc

$$\sin. \varphi = \varphi - \alpha \sin. \varphi^3 - \beta \sin. \varphi^5 - \gamma \sin. \varphi^7 - \&c.; \text{ donc,}$$

supposant $\varphi = \frac{m \pi}{2(n+1)}$ & faisant pour abréger $\sin. \frac{m \pi}{2(n+1)}$

$$= x, \text{ on aura } \sin. \frac{m \pi}{2(n+1)} = \frac{m \pi}{2(n+1)} - \alpha x^3 - \beta x^5 -$$

$\gamma x^7 - \&c.$, & par conséquent

$$\cos. \left(2 t k \sin. \frac{m \pi}{2(n+1)} \right) = \cos. \left(\frac{m k t}{n+1} \pi - 2 \alpha k t x^3 - 2 \beta k t x^5 - 2 \gamma k t x^7 - \&c. \right)$$

$$= \cos. \frac{m k t}{n+1} \pi \times \cos. (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.)$$

$$+ \sin. \frac{m k t}{n+1} \pi \times \sin. (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.)$$

Or $\cos. (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.) = 1 - 2 \alpha^2 k^2 t^2 x^6 - 2 \alpha \beta k^2 t^2 x^8 - 2 \beta^2 k^2 t^2 x^{10} - \&c.$

$$\& \sin. (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.) = 2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + 2 \gamma k t x^7 + \left(2 \delta k t - \frac{4 \alpha^3 k^3 t^3}{3} \right) x^9 + \&c.$$

De plus $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 \&c.$, &

par conséquent $(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \&c.) \sqrt{(1-x^2)} = 1$; donc on aura aussi

$$\text{fin. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \&c.) = \left\{ 2 \alpha k t x^2 + (\alpha + 2 \beta) k t x^4 + \left(\frac{3 \alpha}{4} + \beta + 2 \gamma \right) k t x^6 + \left[\left(\frac{3 \cdot 5 \alpha}{4 \cdot 6} + \frac{3 \beta}{4} + \gamma + 2 \delta \right) k t - \frac{4 \alpha^2}{3} k^2 t^3 \right] x^8 + \&c. \right\} \times x \sqrt{(1-x^2)}$$

où l'on remarquera que $x \sqrt{(1-x^2)} = \text{fin. } \frac{m \pi}{2(n+1)} \times$

$$\text{cof. } \frac{m \pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \text{fin. } \frac{m \pi}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Maintenant } (Y m) &= Y' \text{fin. } \frac{m \pi}{n+1} + Y'' \text{fin. } \frac{2 m \pi}{n+1} \\ &+ Y''' \text{fin. } \frac{3 m \pi}{n+1} + \&c. + Y^n \text{fin. } \frac{n m \pi}{n+1} \text{ (Artic. préc.)}; \\ \text{donc si on multiplie cette quantité par } x^2, \text{ c'est-à-dire par} \\ &(\text{fin. } \frac{m \pi}{2(n+1)})^2 = \frac{1}{2} (1 - \text{cof. } \frac{m \pi}{n+1}), \text{ \& qu'on dévelop-} \\ &\text{pe les produits des } \textit{sinus} \text{ \& des } \textit{cosinus}, \text{ on aura} \\ (Y m) x^2 &= \frac{1}{4} \left\{ Y' \left(2 \text{fin. } \frac{m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{2 m \pi}{n+1} \right) \right. \\ &+ Y'' \left(2 \text{fin. } \frac{2 m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{3 m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{m \pi}{n+1} \right) \\ &+ Y''' \left(2 \text{fin. } \frac{3 m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{4 m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{2 m \pi}{n+1} \right) \\ &\&c. \\ &+ Y^n \left(2 \text{fin. } \frac{n m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{(n+1) m \pi}{n+1} - \text{fin. } \frac{(n-1) m \pi}{n+1} \right) \left. \right\} \\ &= - \frac{1}{4} \left\{ (Y'' - 2 Y') \text{fin. } \frac{m \pi}{n+1} + (Y''' - 2 Y'' + Y') \right. \end{aligned}$$

$$\sin. \frac{2m\pi}{n+1} + (Y^{iv} - 2Y''' + Y'') \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. \\ + (-2Y^v + Y^{v-1}) \sin. \frac{nm\pi}{n+1} \left. \vphantom{\sin. \frac{2m\pi}{n+1}} \right\},$$

à cause de $\sin. \frac{(n+1)m\pi}{n+1} = \sin. m\pi = 0$.

Qu'on dénote par $\Delta^2 Y$ les différences secondes des quantités Y dans la suite $Y', Y'', Y''' \&c. Y^n$, de sorte que l'on ait en général $\Delta^2 Y^s = Y^{s+1} - 2Y^s + Y^{s-1}$, & supposant $Y^0 = 0$ & $Y^{n+1} = 0$, (ce qui est permis, à cause que les quantités $Y', Y'', Y''' \&c. Y^n$ sont les seules données) afin que $\Delta^2 Y' = Y'' - 2Y'$ & $\Delta^2 Y^m = -2Y^m + Y^{m-1}$, on aura

$$(Y^m) x^2 = -\frac{1}{4} \left(\Delta^2 Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^2 Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} \right. \\ \left. + \Delta^2 Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^2 Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1} \right).$$

Si on fait de même $\Delta^4 Y^s = \Delta^2 Y^{s+1} - 2\Delta^2 Y^s + \Delta^2 Y^{s-1} = Y^{s+2} - 4Y^{s+1} + 6Y^s - 4Y^{s-1} + Y^{s-2}$, & qu'on suppose ensuite $\Delta^2 Y^0 = 0$ & $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, on trouvera

$$(Y^m) x^4 = \frac{1}{16} \left(\Delta^4 Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^4 Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} + \right. \\ \left. \Delta^4 Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^4 Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1} \right).$$

En général on aura

$$(Y^m) x^{2r} = \pm \frac{1}{2^r} \left(\Delta^{2r} Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} \right. \\ \left. + \Delta^{2r} Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^{2r} Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1} \right),$$

(le signe supérieur étant pour le cas de r pair, & l'inférieur pour celui de r impair) pourvu qu'on suppose $Y^0 = 0$, $\Delta^2 Y^0 = 0$, $\Delta^4 Y^0 = 0$ &c. $Y^{n+1} = 0$, $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, $\Delta^4 Y^{n+1} = 0$ &c.; conditions auxquelles on peut

satisfaire, en imaginant la suite des Y continuée de part & d'autre à l'infini, de manière que les termes Y^0 & Y^{n+1} soient nuls, & que les termes également distans de ceux-ci soient égaux & de signes contraires.

Donc si on fait ces substitutions, & qu'on fasse pour abréger

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha^2 k^2 t^2}{2^6} \Delta^4 Y^s - \frac{2\alpha\beta k^2 t^2}{2^5} \Delta^3 Y^s + \&c. = P^s, \\ & - \frac{\alpha k t}{2^2} \Delta^2 Y^s + \frac{1}{2} (\alpha + 2\beta) \frac{k t}{2^2} \Delta^4 Y^s - \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha}{4} + \beta \right. \\ & \left. + 2\gamma \right) \frac{k t}{2^6} \Delta^6 Y^s + \&c. = Q^s, \end{aligned}$$

& de plus

$$P' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + P'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} + P''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c.$$

$$+ P^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1} = (Pm),$$

$$Q' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + Q'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} + Q''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c.$$

$$+ Q^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1} = (Qm),$$

on aura

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin. \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1} (Ym) \cos. \left(2t k \sin. \frac{m\pi}{2(n+1)} \right) \\ & = \frac{2 \sin. \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1} [(Ym) + (Pm)] \cos. \frac{mkt}{n+1} \pi \\ & + \frac{2 \sin. \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1} (Qm) \sin. \frac{m\pi}{n+1} \times \sin. \frac{mkt}{n+1} \pi \\ & = \frac{(Ym) + (Pm)}{n+1} \left[\sin. \frac{m(s+kt)}{n+1} \pi + \sin. \frac{m(s-kt)}{n+1} \pi \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{(Q_m)}{2(n+1)} \left[\text{fin.} \frac{m(s+1+kt)}{n+1} \pi - \text{fin.} \frac{m(s-1+kt)}{n+1} \pi \right. \\ \left. - \text{fin.} \frac{m(s+1-kt)}{n+1} \pi + \text{fin.} \frac{m(s-1-kt)}{n+1} \pi \right].$$

Donc si on fait successivement $m = 1, 2, 3$ &c. n , & qu'on suppose en général

$$\phi x = 2 \frac{T_1 + P_1}{n+1} \text{fin.} x \pi + 2 \frac{T_2 + P_2}{n+1} \text{fin.} 2x \pi$$

$$+ 2 \frac{T_3 + P_3}{n+1} \text{fin.} 3x \pi + \text{\&c.} + 2 \frac{(T_n) + (P_n)}{n+1} \text{fin.} nx \pi,$$

$$\psi x = 2 \frac{Q_1}{n+1} \text{fin.} x \pi + 2 \frac{Q_2}{n+1} \text{fin.} 2x \pi + 2 \frac{Q_3}{n+1} \text{fin.} 3x \pi$$

$$+ \text{\&c.} + 2 \frac{(Q_n)}{n+1} \text{fin.} nx \pi,$$

ϕ , & ψ dénotant des fonctions, on aura (*Art. préc.*)

$$y' = \frac{1}{2} \left(\phi \frac{s+kt}{n+1} + \phi \frac{s-kt}{n+1} \right) \\ + \frac{1}{4} \left(\psi \frac{s+1+kt}{n+1} - \psi \frac{s-1+kt}{n+1} \right. \\ \left. - \psi \frac{s+1-kt}{n+1} + \psi \frac{s-1-kt}{n+1} \right).$$

D'où l'on voit que pour avoir la valeur d'une y quelconque, comme y' , après un tems quelconque t , il n'y aura qu'à tracer deux courbes, dont les ordonnées répondantes aux abscisses x soient ϕx & ψx , & prendre ensuite dans la première de ces courbes $\frac{1}{2}$ ord. abf. $\frac{s+kt}{n+1}$

+ $\frac{1}{2}$ ord. abf. $\frac{s-kt}{n+1}$, & dans la seconde $\frac{1}{4}$ ord. abf.

$\frac{s+1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}$ ord. abf. $\frac{s-1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}$ ord. abf. $\frac{s+1-kt}{n+1}$

+ $\frac{1}{4}$ ord. abf. $\frac{s-1-kt}{n+1}$.

Substituons maintenant dans les expressions de ϕx & de ψx les valeurs de Y_1, Y_2, Y_3 &c. (Y_n), P_1, P_2, P_3 &c. (P_n), & Q_1, Q_2, Q_3 &c. (Q_n), & supposant en général

$\chi(u, x) = \sin. u\pi \times \sin. x\pi + \sin. 2u\pi \times \sin. 2x\pi + \sin. 3u\pi \times \sin. 3x\pi + \&c. + \sin. nu\pi \times \sin. nx\pi$, nous aurons

$$\begin{aligned} \phi x &= 2 \frac{Y' + P'}{n+1} \chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2 \frac{Y'' + P''}{n+1} \chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right) \\ &+ 2 \frac{Y''' + P'''}{n+1} \chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \&c. \\ &+ 2 \frac{Y^n + P^n}{n+1} \chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right), \& \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi x &= 2 \frac{Q'}{n+1} \chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2 \frac{Q''}{n+1} \chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right) \\ &+ 2 \frac{Q'''}{n+1} \chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \&c. \\ &+ 2 \frac{Q^n}{n+1} \chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right). \end{aligned}$$

Or $2 \cos. u\pi \times \chi(u, x) = 2 \cos. u\pi \times \sin. u\pi \times \sin. x\pi + 2 \cos. u\pi \times \sin. 2u\pi \times \sin. 2x\pi + 2 \cos. u\pi \times \sin. 3u\pi \times \sin. 3x\pi + \&c. + 2 \cos. u\pi \times \sin. nu\pi \times \sin. nx\pi$

$$= \sin. 2u\pi \times \sin. x\pi + (\sin. u\pi + \sin. 3u\pi) \sin. 2x\pi + (\sin. 2u\pi + \sin. 4u\pi) \sin. 3x\pi + \&c.$$

$$+ [\sin. (n-1)u\pi + \sin. (n+1)u\pi] \sin. nx\pi = \sin. 2x\pi \times \sin. u\pi + (\sin. x\pi + \sin. 3x\pi) \sin. 2u\pi + (\sin. 2x\pi + \sin. 4x\pi) \sin. 3u\pi + \&c.$$

$$+ [\sin. (n-1)x\pi + \sin. (n+1)x\pi] \sin. nu\pi + \sin. (n+1)u\pi \times \sin. nx\pi - \sin. (n+1)x\pi \times \sin. nu\pi$$

$$= 2 \cos. x\pi \times \chi(u, x) + \sin. (n+1)u\pi \times \sin. nx\pi - \sin. (n+1)x\pi \times \sin. nu\pi. \text{ Donc}$$

$$\chi(u, x) = \frac{\sin. (n+1)u\pi \cdot \sin. nx\pi - \sin. (n+1)x\pi \cdot \sin. nu\pi}{2(\cos. u\pi - \cos. x\pi)}.$$

Soit $u = \frac{m}{n+1}$, & $x = \frac{s}{n+1}$, m & s étant des nombres entiers, on aura $\sin. (n+1)u\pi = \sin. m\pi = 0$, & $\sin. (n+1)x\pi = \sin. s\pi = 0$; par conséquent

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{s}{n+1}\right) = 0.$$

Il en faut excepter le cas où $s = m$; car alors le numérateur & le dénominateur de la formule deviennent égaux chacun à zéro. Pour trouver la valeur de $\chi(u, x)$ dans ce cas, on fera $x = u + \omega$, ω étant une quantité évanouissante, & l'on aura en effaçant ce qui se détruit,

$$\chi(u, x) = \frac{n \sin. (n+1)u\pi \times \cos. nu\pi}{2 \sin. u\pi} \\ - \frac{(n+1) \cos. (n+1)u\pi \times \sin. nu\pi}{2 \sin. u\pi}.$$

Donc, faisant $u = x = \frac{m}{n+1}$,

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}\right) = - \frac{(n+1) \cos. m\pi \times \sin. \frac{nm\pi}{n+1}}{2 \sin. \frac{m\pi}{n+1}}.$$

Or $\cos. m\pi \times \sin. \frac{nm}{n+1}\pi = \frac{1}{2} \sin. \frac{2n+1}{n+1}m\pi - \frac{1}{2} \sin. \frac{m}{n+1}\pi$, & $\sin. \frac{2n+1}{n+1}m\pi = \sin. \left(2m - \frac{m}{n+1}\right)\pi$
 = (a cause que m est un nombre entier) $-\sin. \frac{m}{n+1}\pi$;

donc $\cos. m\pi \times \sin. \frac{nm}{n+1}\pi = -\sin. \frac{m}{n+1}\pi$; & par conséquent

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2},$$

On aura donc

$$\phi \frac{s}{n+1} = Y^s + P^s, \text{ \& } \psi \frac{s}{n+1} = Q^s;$$

c'est-à-dire que les deux courbes qui représentent les fonctions ϕx & ψx , doivent être telles que les ordonnées répondantes aux abscisses $\frac{s}{n+1}$ soient $Y^s + P^s$ & Q^s .

Ayant donc divisé l'axe de la corde, que je suppose $= 1$, en $n + 1$ parties égales, on appliquera à chaque abscisse $\frac{s}{n+1}$ deux ordonnées, l'une $= Y^s + P^s$, & l'autre $= Q^s$, & l'on fera passer par les extrémités de chacune de ces deux suites d'ordonnées deux courbes représentées par l'équation

$$y = \alpha \sin. x \pi + \beta \sin. 2 x \pi + \gamma \sin. 3 n \pi + \&c. + \omega \sin. n x \pi,$$

y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse x , & α , β , γ &c. ω des coéfiens arbitraires; on aura de cette manière les courbes qui serviront à déterminer, pour un tems quelconque t , la figure du poligone vibrant, comme nous l'avons enseigné plus haut.

A l'égard de la continuation de ces courbes, il est clair qu'elles s'étendront de part & d'autre à l'infini, & seront composées de branches égales, semblables & alternativement situées au dessus & au-dessous de l'axe, de sorte qu'il ne faudra que tracer les branches qui répondent à l'axe 1; & les transporter ensuite alternativement au dessus & au dessous de l'axe prolongé à l'infini de part & d'autre.

XL. Supposons présentement que le nombre a des corps soit très-grand, & que par conséquent la distance a d'un corps à l'autre soit très-petite, la longueur de toute la corde étant $= 1$; il est clair que les différences $\Delta^2 Y$, $\Delta^4 Y$ &c. deviendront très-petites du second ordre, du quatrième &c.; donc puisque $k = \sqrt{\left(\frac{n c^2}{a}\right)} =$ (à cause de

$n = \frac{1}{a}) \frac{e}{a}$, les quantités $k \Delta^2 Y$, $k \Delta^4 Y$, $k^2 \Delta^6 Y$ &c. feront très-petites du premier ordre, du troisième, du quatrième &c., & par conséquent les quantités P & Q pourront être regardées & traitées comme nulles sans erreur sensible.

Ainsi dans cette hypothèse, on aura à très peu près le mouvement de la corde, en faisant passer par les sommets des ordonnées très-proches Y' , Y'' , Y''' &c., lesquelles représentent la figure initiale du poligone vibrant, une courbe dont l'équation soit $y = a \sin. \pi x + \beta \sin. 2 \pi x + \gamma \sin. 3 \pi x + \&c. + \omega \sin. n \pi x$, & que j'appellerai *génératrice*, & prenant ensuite pour l'ordonnée du poligone vibrant, qui répond à une abscisse quelconque

$\frac{s}{n+1} = x$, la demi somme de deux ordonnées de cette

courbe, desquelles l'une réponde à l'abscisse $\frac{s+kt}{n+1} = x+ct$,

& l'autre réponde à l'abscisse $\frac{s-kt}{n+1} = x-ct$; & cette

détermination sera toujours d'autant plus exacte que le nombre n sera plus grand. Or il est évident que plus le nombre des poids est grand, plus la poligone initial doit s'approcher de la courbe circonscrite; d'où il s'ensuit qu'en supposant le nombre des poids infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, on pourra regarder la figure initiale même de la corde comme une branche de la courbe *génératrice*, & qu'ainsi pour avoir cette courbe il n'y aura que transporter la courbe initiale alternativement au dessus & au dessous de l'axe à l'infini (*Art. préc.*).

XLI. On pourroit douter s'il ne faut pas que la courbe initiale de la corde soit aussi comprise dans la même équation $y = a \sin. \pi x + \beta \sin. 2 \pi x + \&c.$

Il est certain que si on veut que la courbe génératrice soit la même géométriquement que la courbe initiale, il faut que celle-ci soit renfermée dans l'équation $y = \alpha \sin. \pi x + \beta \sin. 2 \pi x + \&c.$ Je dis la même géométriquement, car il suffit que la différence de ces deux courbes soit moindre qu'aucune grandeur donnée, pour qu'elles puissent être prises pour les mêmes. Or il est clair que, quelle que soit la courbe initiale, on peut toujours faire passer, par une infinité de points infiniment proches de cette courbe, une autre courbe de la forme $y = \alpha \sin. \pi x + \beta \sin. 2 \pi x + \&c.$, de manière que la différence entre les deux courbes soit aussi petite qu'on voudra, quoique cette différence ne puisse devenir absolument nulle que dans le cas où la courbe initiale sera aussi de la même forme; dans tous les autres cas cette courbe initiale ne sera qu'une espèce d'asymptôte dont la courbe génératrice pourra s'approcher à l'infini, sans qu'elles puissent jamais coïncider entièrement.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je vais faire voir comment on peut trouver une infinité de telles courbes, qui coïncident avec une courbe donnée en un nombre quelconque de points aussi près les uns des autres qu'on voudra. Pour cela je prends l'équation

$$y = \frac{2Y_1}{n+1} \sin. x\pi + \frac{2Y_2}{n+1} \sin. 2x\pi + \frac{2Y_3}{n+1} \sin. 3x\pi + \&c. + \frac{2(Y_n)}{n+1} \sin. nx\pi,$$

dans laquelle

$$(Y_m) = Y' \sin. \frac{m\pi}{n+1} + Y'' \sin. \frac{2m\pi}{n+1} + Y''' \sin. \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n \sin. \frac{nm\pi}{n+1},$$

& par ce que j'ai démontré dans l'Art. XXXIX. j'aurai, lorsque $x = \frac{f}{n+1}$, $y = Y^f$.

Soit maintenant $n + 1 = \frac{r}{dX}$ & $\frac{s}{n+1} = X$, on aura
 $(Y_m) = \int Y \sin. m X \pi = (n + 1) \int Y \sin. m X \pi dX$,
 cette intégrale étant prise depuis $X = 0$ jusqu'à $X = 1$;
 par conséquent

$$y = 2 \int Y \sin. X \pi dX \times \sin. x \pi + 2 \int Y \sin. 2 X \pi dX$$

$$\times \sin. 2 x \pi + 2 \int Y \sin. 3 X \pi dX \times \sin. 3 x \pi + \&c.$$

$$+ 2 \int Y \sin. n X \pi dX \times \sin. n x \pi,$$

de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X .

Or soit Z une fonction quelconque de X , & z une pareille fonction de x , il est clair qu'en mettant dans l'équation précédente YZ au lieu de Y & $y z$ au lieu de y , on aura aussi, lorsque $X = x$, $y z = YZ$, c'est à dire, à cause de $z = Z$ dans ce cas, $y = Y$. D'où il s'ensuit que si l'on a une courbe quelconque rapportée à un axe $= 1$, & dont les coordonnées soient X & Y , & qu'on décrive sur le même axe une autre courbe dont l'équation, en prenant x & y pour les coordonnées, soit

$$y = \frac{2}{z} \int Z Y \sin. X \pi dX + \frac{2}{z} \int Z Y \sin. 2 X \pi dX$$

$$+ \frac{2}{z} \int Z Y \sin. 3 X \pi dX + \&c.$$

$$+ \frac{2}{z} \int Z Y \sin. n X \pi dX,$$

ces deux courbes coïncideront dans tous les points qui répondent aux abscisses $x = X = \frac{s}{n+1}$, s & n étant des nombres entiers, quelle que soit d'ailleurs la fonction Z ; or on peut rendre n & s si grands que les points de coïncidence soient aussi près les uns des autres qu'on voudra.

Au reste il ne faut pas manquer d'observer que la construction donnée ci-dessus, pour représenter le mouvement de la corde vibrante, n'est exacte qu'autant qu'il est permis

de négliger les quantités P & Q comme nous l'avons fait (*Art. XL.*). Or il est clair que ces quantités seront toujours nulles d'elles-mêmes, si $\frac{d^m y}{dx^m}$ ne fait de fait nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives; ainsi pourvu que cette condition soit observée, on pourra toujours déterminer le mouvement de la corde quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe initiale.

*Nouvelle manière d'intégrer par approximation
l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + L + i M y^2 + i^2 N y^3 + \text{\&c.} = 0 \quad (A)$$

dans laquelle K, L, M, N &c. sont des constantes quelconques, & i marque un coefficient très-petit.

XLII. On fait que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + L + a \text{ cof. } \alpha t + b \text{ cof. } \beta t + \text{\&c.} = 0, \text{ est}$$

$$y = f \text{ cof. } K t + \frac{g}{K} \text{ fin. } K t + \frac{L}{K^2} (\text{cof. } K t - 1).$$

$$+ \frac{a}{K^2 - \alpha^2} (\text{cof. } K t - \text{cof. } \alpha t) + \frac{b}{K^2 - \beta^2} (\text{cof. } K t - \text{cof. } \beta t)$$

$$+ \text{\&c.}$$

f & g étant deux constantes arbitraires, dont l'une exprime la valeur de y , & l'autre celle de $\frac{dy}{dt}$, lorsque $t = 0$.

Si $\alpha = K$ on trouvera (en faisant $\alpha = K + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante) que les

$$\text{termes } \frac{a}{K^2 - \alpha^2} (\text{cof. } K t - \text{cof. } \alpha t) \text{ se réduisent à celui-}$$

$$\text{ci } - \frac{a}{2K} t \text{ fin. } K t.$$

XLIII. Cela posé, pour intégrer l'équation (A), suivant la méthode ordinaire d'approximation, on négligera d'abord les termes affectés de i , & l'on aura pour première équation approchée $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L = 0$, & par conséquent

$$y = f \cos. Kt + \frac{g}{K} \sin. Kt + \frac{L}{K^2} (\cos. Kt - 1).$$

On substituera ensuite cette première valeur de y dans le terme iMy^2 , en négligeant le terme suivant i^2Ny^3 , & faisant pour plus de simplicité $g = 0$ & $f + \frac{L}{K^2} = F$, on aura la nouvelle équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iM \left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4} \right) - 2i \frac{MLF}{K} \cos. kt + i \frac{MF^2}{2} \cos. 2Kt = 0,$$

dont l'intégrale fera, en supposant $g = 0$ & $L + iM \left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4} \right) = L'$,

$$y = f \cos. Kt + \frac{L'}{K^2} (\cos. Kt - 1) + i \frac{MLF}{K^3} t \sin. Kt - i \frac{MF^2}{2,3K^3} (\cos. Kt - \cos. 2Kt).$$

XLIII. Mais voici une difficulté. L'expression de y qu'on vient de trouver renferme un terme multiplié par t , & si on continuoit le calcul de la même manière on trouveroit encore des termes multipliés par t^2 , t^3 &c.; cependant il est certain que la valeur de y ne doit point contenir de pareils termes. Pour le démontrer je reprends l'équation (A), & j'en tire, en multipliant par $2dy$, & intégrant

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2N}{2} y^4 \&c. = 0 \text{ (B)}$$

H étant une constante qu'on déterminera par les valeurs données de y & de $\frac{dy}{dt}$ lorsque $t = 0$; de sorte qu'on aura en général

$$H = -g^2 - K^2 f^2 - 2Lf - \frac{2iM}{2} f^3 - \frac{i^2 N}{2} f^4 \text{ \&c.}$$

Je fais $\frac{dy}{dt} = x$, j'ai

$$x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2 N}{2} y^4 \text{ \&c.} = 0;$$

équation qui peut être regardée comme appartenant à une courbe dont x & y soient les coordonnées. Or puisque i est une quantité très-petite, il est clair qu'on aura à peu près $x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H = 0$, d'où l'on tire

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2 H - K^2 x^2)}}{K^2}.$$

Ces deux racines donnent comme l'on voit une ovale dans laquelle la valeur de y est contenue entre ces deux limites

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2 H)}}{K^2} \text{ \& } y = \frac{-L - \sqrt{(L^2 - K^2 H)}}{K^2}.$$

Pour trouver les autres racines on supposera $y = \frac{z}{i}$, & après avoir fait disparaître les puissances de i qui se trouveront au dénominateur, on cherchera les valeurs de z par les règles ordinaires d'approximation. De cette manière on aura en ne considérant d'abord que l'équation

$$x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 = 0, \text{ \& } \text{pouf-}$$

sant la précision jusqu'aux i^2 , $z = -\frac{3K^2}{2M} + \frac{2iL}{K} -$

$$\frac{3i^2 L^2 M}{3K^4} - \frac{2i^2 M(H + x^2)}{3K^4}, \text{ \& } \text{par conséquent}$$

$$y = -\frac{3K^2}{2iM} + \frac{2L}{K^2} - \frac{8iL^2M}{3K^6} - \frac{2iM(H+x^2)}{3K^2}$$

ce qui donne une branche parabolique infiniment éloignée de l'axe. On tirera de même de l'équation

$$x^2 + Ky^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 = 0,$$

$$y = \frac{\alpha}{i} + \beta + i(\gamma + \delta x^2), \text{ où}$$

$$\alpha = \frac{-\frac{2M}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)}}{N}$$

$$\beta = -\frac{4L\alpha}{4N\alpha^2 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\gamma = -\frac{(6N\alpha^2 + 4M\alpha^2 + 2K^2)\beta^2 + 4L\beta + 2C}{4N\alpha^2 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\delta = -\frac{2}{4N\alpha^2 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

ce qui donnera, à cause de l'ambiguïté du radical $\sqrt{\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)}$, deux branches paraboliques éloignées à l'infini de l'axe; & ainsi de suite.

De là il est aisé de conclure que la valeur de y ne peut jamais passer du fini à l'infini. Donc puisque t peut devenir infinie, ce qui est évident par la nature même de l'équation (A), il s'ensuit que la valeur de y en t ne doit point contenir de termes qui croissent avec t ; donc &c.

XLV. Voyons donc comment on pourroit faire disparaître de l'expression de y les termes qui contiendroient des puissances de t , & qui rendroient cette expression très-fautive.

Qu'on suppose, dans l'équation (A), $y = y' + \lambda + i\mu + i^2\nu + \&c.$, λ , μ , ν &c. étant des constantes indéterminées & y' une nouvelle variable, & négligeant les termes qui

seroient affectés de i^2 &c. on aura une équation de cette forme

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + R^2 y' + A + i(B + M y'^2) + i^2(C + 3N \lambda y'^2 + N y'^3) + \&c. = 0 \quad (C)$$

dans laquelle $R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$,
 $A = L + K^2\lambda$, $B = K^2\mu + M\lambda^2$, & $C = K^2\nu + 2M\mu\lambda + N\lambda^3$;

ce qui donnera pour première équation approchée $\frac{d^2 y'}{dt^2}$

$$+ R^2 y' + A = 0; \text{ d'où, en supposant } y' = f' \text{ \& } \frac{dy'}{dt} = 0$$

lorsque $t = 0$, on aura

$$y' = f' \cos. Rt + \frac{A}{R^2} (\cos. Rt - 1).$$

Substituant ensuite cette première valeur de y' dans le terme $iM y'^2$ de l'équation (C), & négligeant les termes affectés de i^2 on aura

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + R^2 y' + A + i \left[B + M \frac{A^2}{R^2} + \frac{M}{2} \left(f' + \frac{A}{R^2} \right)^2 \right] - 2iM \frac{A}{R^2} \left(f' + \frac{A}{R^2} \right) \cos. Rt + i \frac{M}{2} \left(f' + \frac{A}{R^2} \right)^2 \cos. 2Rt = 0.$$

On fera $A = 0$, moyennant quoi le terme qui contient $\cos. Rt$ disparaîtra, & l'équation se réduira à celle-ci

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + R^2 y' + i \left(B + \frac{M f'^2}{2} \right) + i \frac{M f'^2}{2} \cos. 2Rt = 0,$$

dont l'intégrale fera

$$y' = f' \cos. Rt + i \left(\frac{B}{R^2} + \frac{M f'^2}{2 R^2} \right) (\cos. Rt - 1) - i \frac{M f'^2}{2.3 R^2} (\cos. Rt - \cos. 2 Rt).$$

Si on veut se contenter de cette approximation on négligera dans la valeur de R les termes de l'ordre de i^2 , & l'on aura $R^2 = K^2 + 2iM\lambda$; or la supposition de

$A = 0$ donne $\lambda = \frac{L}{K}$, donc on aura $R^2 = K^2 - 2i \frac{LM}{K^2}$. A l'égard de la quantité μ qui entre dans la valeur de B , on pourra la supposer $= 0$, de sorte qu'on aura $B = M\lambda^2 = \frac{L^2 M}{K^2}$. Ainsi la valeur de y fera, aux quantités de l'ordre de i^2 près, $-\frac{L}{K} + y'$.

Mais si on vouloit pousser le calcul plus loin il faudroit substituer l'expression précédente de y' dans les termes $i M y'^2$, $3 i^2 N \lambda y'^2$ & $i^2 N y'^3$ de l'équation (C), en négligeant les quantités qui se trouveroient affectés de i^3 , & faire disparaître ensuite le terme qui contiendrait \cos .

R^2 , en supposant égal à zéro son coefficient $i^2 [- 2 M f' (\frac{B}{R^2} + \frac{M f'^2}{2 R^2}) + \frac{M^2 f'^3}{2.3 R^2} + \frac{3 N f'^3}{4}]$, ce qui donneroit $B = - \frac{5 M f'^2}{12} + \frac{3 N R^2 f'^2}{8 M}$. De cette manière on auroit une

nouvelle valeur de y' qui ne contiendrait, comme la précédente, que des *cosinus* d'angles; & ainsi de suite.

La valeur de B qu'on vient de trouver donnera, à cause de $B = K^2 \mu + M \lambda^2$, $\mu = (\frac{3 N R^2}{8 M K^2} - \frac{5 M}{12 K^2}) f'^2 - \frac{M L^2}{K^4} = [\text{en mettant au lieu de } R^2 \text{ sa valeur approchée } K^2] (\frac{3 N}{8 M} - \frac{5 M}{12 K^2}) f'^2 - \frac{M L^2}{K^4}$; d'où l'on aura

$R^2 = K^2 + 2 i M \lambda + i^2 (2 M \mu + 3 N \lambda^2)$
 $= K^2 - 2 i \frac{M L}{K^2} + i^2 [(\frac{3 N}{4} - \frac{5 M^2}{6 K^2}) f'^2 + \frac{3 N L^2}{K^4} - \frac{2 M^2 L^2}{K^6}]$;
 c'est la valeur de R^2 aux quantités de l'ordre de i^3 près.

XLVI. Je vais présentement donner une méthode particulière pour intégrer ces sortes d'équations différentielles aussi exactement qu'on voudra par approximation, méthode qui aura sur la précédente l'avantage de donner directement, & sans aucune supposition précaire la vraie forme de l'intégrale.

Je supposerai ici pour plus de simplicité qu'on ne veuille avoir égard qu'aux quantités de l'ordre de i & de i^2 ; mais on verra aisément que la méthode aura lieu quelque loin qu'on veuille pousser l'approximation.

Soit $y^2 = u$, & $y^3 = v$; l'équation proposée (A) deviendra

$$\frac{dy}{dt} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \quad (D)$$

Or $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2y dy^2}{dt^2} + \frac{2 dy^2}{dt^2}$; donc si on multiplie l'équation (A) par $2y$, & l'équation (B) de l'Art. XLIV. par 2 , & qu'ensuite on les ajoute ensemble on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2y^2 + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}y^3 + 6i^2Ny^4 = 0.$$

Mais comme la quantité u est déjà multipliée par i dans l'équation (D), il est clair que pour ne pas introduire dans la valeur de y des termes de l'ordre de i^3 , il faut rejeter dans la valeur de u & par conséquent aussi de dans celle de $\frac{d^2u}{dt^2}$, les termes de l'ordre de i^2 ; effaçant donc le terme $6i^2Ny^4$, & mettant dans les autres u à la place de y^2 & v à la place de y^3 , on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0.$$

On a de même $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{3y^2 dy^2}{dt^2} + \frac{6y dy^2}{dt^2}$; donc multipliant l'équation (A) par $\frac{2}{3}y^2$, & l'équation (B) par $6y$, & les ajoutant ensemble on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2y^3 + 15Ly^2 + 6Hy + 7iMy^4 + \&c. = 0.$$

Or v étant multipliée par i^2 dans l'équation (D), on rejettera dans la valeur de $\frac{d^2v}{dt^2}$ tous les termes affectés de i , de sorte qu'on aura, en mettant u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3 ,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0.$$

Nous avons donc entre les trois variables y, u, v , ces trois équations du second ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv &= 0 \\ \frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(E)}$$

lesquelles sont intégrables par la méthode de l'Art. XXVI.

Suivant cette méthode je multiplie la première par $\lambda e^{\rho t} dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t} dt$, la troisième par $\nu e^{\rho t} dt$ (Art. XXIX), λ, μ, ν & ρ étant des constantes indéterminées, ensuite je les ajoute ensemble, & j'en prends l'intégrale en faisant disparaître, par des intégrations par parties, les différences des variables y, u, v de dessous le signe f ; j'aurai donc

$$\left\{ \lambda \frac{dy}{dt} + \mu \frac{du}{dt} + \nu \frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v) \rho + \frac{\lambda L + \mu H}{\rho} \right\} e^{\rho t} dt + \int \left\{ (\lambda \rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H) y + (i\lambda M + \mu \rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L) u + (i^2\lambda N + \frac{10i}{3}\mu M + \nu \rho^2 + 9\nu K^2) v \right\} e^{\rho t} dt = \text{const.}$$

J'égalé à zéro les coefficients des variables y, u, v , qui sont tous les signes f , ce qui me donne ces trois équations

$$\left. \begin{aligned} \lambda \rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H &= 0 \\ i\lambda M + \mu \rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L &= 0 \\ i^2 \lambda N + \frac{10}{3}\mu M + \nu \rho^2 + 9\nu K^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (F)$$

par le moyen desquelles je détermine les quantités λ, μ, ν , & ρ .

De cette manière j'ai

$$\left\{ \lambda \frac{dy}{dt} + \mu \frac{du}{dt} + \nu \frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v) \rho + \frac{\lambda L + \mu H}{\rho} \right\} e^{\rho t} = \text{const.} \quad (G)$$

Or pour peu qu'on examine les équations (F), il est aisé de reconnoître que la quantité μ doit être de l'ordre de i , & celle de ν de l'ordre de i^2 .

Soit donc $\mu = i\lambda\alpha$, & $\nu = i^2\lambda\beta$, on aura, en divisant la première équation par λ , la seconde par $i\lambda$, & la troisième par $i^2\lambda$, les trois suivantes

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 + K^2 + 6i\alpha L + 6i^2\beta H &= 0 \\ iM + \alpha(\rho^2 + 4K^2) + 15i\beta L &= 0 \\ N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(\rho^2 + 9K^2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La première donne $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, & mettant cette valeur de ρ^2 dans les deux autres on aura $M + \alpha(3K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) + 15i\beta L = 0$ & $N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(8K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) = 0$.

Négligeons d'abord les termes affectés de i , & nous aurons $M + 3\alpha K^2 = 0$, & $N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2$

$$= 0, \text{ d'où l'on tire } \alpha = -\frac{M}{3K^2} \text{ \& } \beta = -\frac{N}{8K^2} \\ \frac{10\alpha M}{3 \cdot 8K^2} = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9 \cdot 8K^4}$$

Substituânt ensuite ces valeurs dans les termes de l'ordre de i , & négligeant ceux de l'ordre de i^2 , on aura

$$M + 3\alpha K^2 - 6iL \left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + 15iL \left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

$$N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 - 6iL \left(-\frac{M}{3K^2}\right) \left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

d'où l'on tirera de nouvelles valeurs plus exactes de α

$$\& \text{ de } \beta, \text{ lesquelles seront } \alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{6iL}{3K^2} \left(\frac{M}{3K^2}\right)^2$$

$$- \frac{15iL}{3K^2} \left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right), \beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{8.9K^4} -$$

$$\frac{10.6iLM}{9.8K^4} \left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + \frac{15iLM}{9.8K^4} \left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) + \frac{6iL}{8K^2}$$

$$\left(-\frac{M}{3K^2}\right) \left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right); \& \text{ ainsi de suite; mais}$$

comme $\mu = i\lambda\alpha$ & $\nu = i^2\lambda\beta$, il est clair que pour notre objet il suffira d'avoir la valeur de α aux quantités de l'ordre de i^2 près, & celle de β aux quantités de l'ordre de i près; de sorte qu'on pourra se contenter de prendre

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{iL}{K^4} \left(\frac{5N}{8} - \frac{17M^2}{36K^2}\right) \&$$

$$\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}$$

Ayant trouvé les valeurs de α & de β , on les substituera dans l'équation $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, & l'on aura, en ordonnant les termes par rapport à i ,

$$\rho^2 = -K^2 + \frac{2iLM}{K^2} - \frac{i^2L^2}{K^4} \left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) + \frac{i^2H}{K^2}$$

$$\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right).$$

Soit $\rho = R\sqrt{-1}$, en sorte que $\rho^2 = -R^2$, & l'on aura

$$R^2 = K^2 - \frac{2iLM}{K^2} + \frac{iL^2}{K^2} \left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2} \right) - \frac{i^2H}{K^2} \\ \left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2} \right); \text{ d'où}$$

$$R = K - i \frac{LM}{K^2} + i^2 \frac{L^2}{K^2} \left(\frac{15N}{8} - \frac{10M^2}{3K^2} \right) - i^2 \frac{H}{K^2} \\ \left(\frac{3N}{8} - \frac{15M^2}{12K^2} \right).$$

Reprenons maintenant l'équation (G), & substituons-y $R\sqrt{-1}$ au lieu de ρ , $i\lambda\alpha$ au lieu de μ , $i^2\lambda\beta$ au lieu de ν , y^2 au lieu de u , & y^3 au lieu de v , nous aurons, en prenant C pour la constante,

$$\lambda e^{Rt\sqrt{-1}} \left\{ (1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2) \frac{dy}{dt} - (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}) R\sqrt{-1} \right\} = C.$$

Or soit, lorsque $t = 0$, $y = f$ & $\frac{dy}{dt} = g$, on aura $C = \lambda (1 + 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2) g - \lambda (f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}) R\sqrt{-1}$. Donc si on fait

$$F = f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}, \text{ \&}$$

$$G = (1 + 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2) g,$$

& qu'on divise toute l'équation par $\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2) \frac{dy}{dt} - (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}) R\sqrt{-1} = (G - FR\sqrt{-1}) e^{-Rt\sqrt{-1}}$$

$$= G \cos. Rt - FR \sin. Rt - (FR \cos. Rt + G \sin. Rt) \sqrt{-1};$$

& prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$,

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2) \frac{dy}{dt} + (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3$$

+

Du mouvement d'un corps qui décrit une orbite à peu près circulaire, en vertu d'une force centrale proportionnelle à une fonction quelconque de la distance.

XLVII. Soit r le rayon vecteur de l'orbite, t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, ϕ l'angle parcouru par le rayon r durant le tems t , Δr la fonction de la distance r qui exprime la force centrale, à la distance initiale, c la vitesse de projection, & b l'angle de la ligne de projection avec le rayon vecteur; on aura en prenant dt constant ces deux équations

$$d \cdot \frac{r^2 d\phi}{dt} = 0 \quad \& \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r d\phi^2}{dt^2} + \Delta r = 0$$

(Voyés l'Art. IV. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente &c.* imprimé dans le Vol. préc.).

La première étant intégrée donne $\frac{r^2 d\phi}{dt} =$ à une constante, mais lorsque $t = 0$ on a $r = a$ & $\frac{r d\phi}{dt} = c \sin. b$;

donc $\frac{r^2 d\phi}{dt} = a.c \sin. b$ & $\frac{d\phi}{dt} = \frac{a.c \sin. b}{r^2}$; substituant donc cette valeur dans l'autre équation, on aura pour les équations générales du mouvemens du corps

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{a^2 c^2 \sin. b^2}{r^3} + \Delta r = 0, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{a.c \sin. b}{r^2} = 0$$

Maintenant, puisque on suppose que l'orbite diffère peu d'un cercle, il est clair que r doit être presque égal à a , & que par conséquent on peut faire $r = a + iy$, i étant un coefficient très-petit & y une nouvelle variable;

$$\text{ce qui donnera } \frac{d^2 r}{dt^2} = i \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{(a + iy)^3} = \frac{1}{a^3} -$$

$$3 i \frac{y}{a^2} + 6 i^2 \frac{y^2}{a^2} - 10 i^3 \frac{y^3}{a^3} + \&c., \Delta r = \Delta (a + iy) =$$

(en supposant $\frac{d \cdot \Delta r}{dr} = \Delta' r$, $\frac{d \cdot \Delta' r}{dr} = \Delta'' r$ &c.) $\Delta a +$

$$i \Delta' a y + i^2 \frac{\Delta'' a}{2} y^2 + i^3 \frac{\Delta''' a}{2 \cdot 3} y^3 + \&c.; \text{ donc la première}$$

équation deviendra $i \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{c^2 \sin. b^2}{a} (1 - 3 i \frac{y}{a} + 6 i^2 \frac{y^2}{a^2}$

$$- 10 i^3 \frac{y^3}{a^3} + \&c.) + \Delta a + i \Delta' a y + i^2 \frac{\Delta'' a}{2} y^2 +$$

$$i^3 \frac{\Delta''' a}{2 \cdot 3} y^3 + \&c. = 0; \text{ d'où l'on voit que } \Delta a - \frac{c^2 \sin. b^2}{a}$$

doit être nécessairement une quantité très-petite de l'ordre

de i ; de sorte qu'on peut supposer $\Delta a - \frac{c^2 \sin. b^2}{a} = i L$,

moynnant quoi l'équation sera divisible par i , & deviendra après la division

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\Delta' a + \frac{3 c^2 \sin. b^2}{a^2}) y + L + i (\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6 c^2 \sin. b^2}{a^2}) y^2$$

$$+ i^2 (\frac{\Delta''' a}{2 \cdot 3} + \frac{10 c^2 \sin. b^2}{a^3}) y^3 + \&c. = 0;$$

équation qui se réduit à la formule (A) de l'Art. XLII.,

$$\text{en supposant } \Delta' a + \frac{3 c^2 \sin. b^2}{a^2} = K^2, \frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6 c^2 \sin. b^2}{a^2}$$

$$= M, \frac{\Delta''' a}{2 \cdot 3} + \frac{10 c^2 \sin. b^2}{a^3} = N \&c.;$$

Ainsi l'on aura la valeur de y , & par conséquent celle

de r en t ; il faudra seulement observer que, quand t

$$= 0, r = a \& \frac{dr}{dt} = -c \cos. b, \text{ c'est-à-dire } y = 0$$

& $i \frac{dy}{dt} = -c \cos. b$, par conséquent $f = 0$ & $ig =$

$-c \cos. b$; d'où l'on voit que $\cos. b$ doit être très-petit,

& par conséquent l'angle de projection b presque droit;

ce qui est d'ailleurs évident, à cause que l'orbite est supposée peu différente d'un cercle.

L'autre équation donnera, après la substitution de $a + iy$ au lieu de r ,

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{c \sin. b}{a} + 2i \frac{c \sin. b}{a^2} y - 3i^2 \frac{c \sin. b}{a^3} y^2 + 4i^3 \frac{c \sin. b}{a^4} y^3 - \&c. = 0.$$

Je substitue dans cette équation u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3 , ensuite j'y ajoute les trois équations (E) de l'Art. XLVI. multipliées la première par λ , la seconde par μ , la troisième par ν (λ , μ , ν étant des coefficients indéterminés), ce qui me donne, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} + \lambda \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \nu \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{c \sin. b}{a} + \lambda L + 2\mu H \\ + \left(\frac{2i c \sin. b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H \right) y + \left(-\frac{3i^2 c \sin. b}{a^3} \right. \\ \left. + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L \right) u + \left(\frac{4i^3 c \sin. b}{a^4} + i^2 \lambda N + \right. \\ \left. \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2 \right) v = 0. \end{aligned}$$

Je suppose à présent

$$\left. \begin{aligned} \frac{2i c \sin. b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H &= 0 \\ -\frac{3i^2 c \sin. b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L &= 0 \\ \frac{4i^3 c \sin. b}{a^4} + i^2 \lambda N + \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\phi}{dt} + \lambda \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \nu \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{c \sin. b}{a} + \lambda L + 2\mu H = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\phi + \lambda \frac{dy}{dt} + \mu \frac{du}{dt} + \nu \frac{dv}{dt} - \left(\frac{c \sin. b}{a} - \lambda L - 2\mu H \right) t = \text{const.}$$

c'est-à-dire, en remettant y^2 au lieu de u , y^1 au lieu de v , & faisant attention que lorsque $t = 0$, on a $\phi = 0$,

$$y = 0 \text{ \& } \frac{dy}{dt} = g,$$

$$\phi \star (\lambda + 2\mu y + 3y^2) \frac{dy}{dt} - \left(\frac{c \text{ fin. } b}{a} - \lambda L - 2\mu H \right) t = \lambda g.$$

Et il ne s'agira plus que de tirer les valeurs de λ , μ , ν des équations (I); or si on fait $\lambda = i\gamma$, $\mu = i^2\delta$, $\nu = i^3\varepsilon$, & qu'on divise la première équation par i , la seconde par i^2 , la troisième par i^3 , on aura

$$\frac{2c \text{ fin. } b}{a^2} + \gamma K^2 + 6i\delta L + 6i^2\varepsilon H = 0$$

$$- \frac{3c \text{ fin. } b}{a^2} + \gamma M + 4\delta K^2 + 15i\varepsilon L = 0$$

$$\frac{4c \text{ fin. } b}{a^2} + \gamma N + \frac{10}{3}\delta M + 9\varepsilon K^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$\gamma = - \frac{2c \text{ fin. } b}{a^2 K^2} + \frac{6iL}{K^2} \delta - \frac{6i^2 H}{K^2} \varepsilon,$$

$$\delta = \frac{c \text{ fin. } b}{a^2 K^2} \left(\frac{3}{4a} + \frac{M}{2K^2} + \frac{9iLM}{8aK^2} + \frac{3iLM^2}{4K^4} \right) - \frac{15iL}{4K^2} \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{c \text{ fin. } b}{a^2 K^2} \left(- \frac{4}{9a^2} + \frac{2N}{9K^2} - \frac{5M}{18aK^2} - \frac{5M^2}{27K^4} \right).$$

Donc si on fait pour abréger

$$S = \frac{c \text{ fin. } b}{a} - i\gamma L - 2i^2\delta H$$

on aura

$$\phi = St + i\gamma g - i(\gamma + 2i\delta y + 3i^2\varepsilon y^2) \frac{dy}{dt} \quad (K)$$

Or y est déjà connu en t , donc on connoitra aussi ϕ en t .

Il est à remarquer que $St + i\gamma g$ représente l'angle du mouvement moyen; de sorte que si on nomme cet angle θ , & qu'on substitue dans les équations (H) & (K)

$\frac{\theta - i\gamma g}{S}$ au lieu de t , on aura les formules qui feront trouver le lieu vrai du corps, son lieu moyen étant donné.

Il est visible que les apfides de l'orbite se trouveront aux points, où $dy = 0$; or si on différentie l'équation (H) & qu'on fasse ensuite $dy = 0$ on aura $Rt \sin. Rt + G \cos. Rt = 0$, c'est-à-dire $\text{tang. } Rt = \frac{G}{RF}$. Soit h le plus petit angle qui répond à la tangente $\frac{G}{RF}$, & l'on aura $Rt = h + \mu\pi$, π dénotant l'angle de 180° degrés, & μ un nombre quelconque entier; maintenant l'équation (K) donnera, lorsque $dy = 0$, $\phi = St + i\gamma g$; donc mettant au lieu de t sa valeur $\frac{h + \mu\pi}{R}$ on aura pour les lieux des apfides

$$\phi = i\gamma g + \frac{S}{R} (h + \mu\pi);$$

d'où l'on voit que la distance d'une apfide à l'autre sera égale à l'angle $\frac{S}{R}\pi$, & que par conséquent le mouvement des apfides fera de $(\frac{S}{R} - 1)360^\circ$ à chaque révolution.

XLVIII. Si on veut connoître la figure de l'orbite décrite par les corps, il faudra éliminer t des équations (H) & (K) pour avoir une équation entre y & ϕ , mais il fera beaucoup plus simple de substituer d'abord dans l'équation $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r d\phi^2}{dt^2} + \Delta r = 0$ au lieu de dt sa valeur $\frac{r^2 d\phi}{ac \sin. b}$, ce qui donnera, en faisant $\frac{1}{r} = s$ & prenant $d\phi$ constant, $\frac{d^2s}{d\phi^2} + s - \frac{\Delta}{s^2 a^2 c^2 \sin. b^2} = 0$, & d'in-

régrer ensuite cette dernière équation par la méthode de l'Art. XLVI.

En effet puisque r est à peu près égale à a (hyp.) s sera à peu près égale à $\frac{1}{a}$, & par conséquent on pourra

supposer $s = \frac{1}{a} + iy$, ce qui donnera, en faisant

$$\frac{\Delta \frac{1}{s}}{s^2 a^2 c^2 \sin. b^2} = \Gamma s, \text{ \& } \frac{1}{a} - \Gamma \frac{1}{a} = L, \text{ \& } \Gamma' \frac{1}{a}$$

$$= K^2, \text{ \& } -\frac{1}{2} \Gamma'' \frac{1}{a} = M, \text{ \& } -\frac{1}{2.3} \Gamma''' \frac{1}{a} = N \text{ \&c.},$$

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + K^2 y + H + i M y^2 + i^2 N y^3 + \text{\&c.} = 0,$$

dont l'intégralé fera (Art. cité)

$$y + i\alpha y^2 + i^2 \beta y^3 = -\frac{L - 2i\alpha H}{R^2} + F \cos. R\varphi,$$

$$+ \frac{G}{R} \sin. R\varphi.$$

Ainsi l'on aura y en φ ; il faudra seulement observer que la quantité g n'exprimera plus ici la valeur de $\frac{dy}{ds}$

lorsque $t = 0$, mais celle de $\frac{dy}{d\varphi}$ c'est-à-dire $\frac{dr}{i d\varphi}$, de sorte qu'on aura $ig = -\cot. b$.

Le coefficient R donnera la distance d'une apside à l'autre de $\frac{180^\circ}{R}$, & l'on verra, après en avoir fait le calcul,

que cette valeur s'accorde avec celle que nous avons trouvée ci-dessus.

Soit $\Delta r = Ar^{m-1}$, on aura $\Gamma s = \frac{A}{a^2 c^2 \sin. b^2} s^{-m}$,

$$\text{donc } \Gamma \frac{1}{a} = \frac{A a^{m-2}}{c^2 \sin. b^2}, \Gamma' \frac{1}{a} = -m \frac{A a^{m-1}}{c^2 \sin. b^2}, \Gamma'' \frac{1}{a}$$

$$= m(m+1) \frac{Aa^m}{c^2 \sin. b^2}, \Gamma''' \frac{1}{a} = -m(m+1)(m+2)$$

$$\frac{Aa^{m+1}}{c^2 \sin. b^2} \&c.; \text{ on aura donc } \frac{1}{a} - \frac{Aa^{m-2}}{c^2 \sin. b^2} = iL,$$

$$1 + m \frac{Aa^{m-1}}{c^2 \sin. b^2} = K^2, -\frac{m(m+1)}{2} \times \frac{Aa^m}{c^2 \sin. b^2} = M,$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} \times \frac{Aa^{m+1}}{c^2 \sin. b^2} = N \&c.; \text{ donc, puisque}$$

$$\frac{Aa^{m-2}}{c^2 \sin. b^2} = \frac{1}{a} - iL, \text{ on aura}$$

$$K^2 = 1 + m(1 - iaL), M = -\frac{m(m+1)a}{2} (1 - iaL),$$

$$N = \frac{m(m+1)(m+2)a^2}{2 \cdot 3} (1 - iaL) \&c.;$$

faisant donc ces substitutions dans la valeur de R^2 de l'Art. XLVI., & rejettant tous les termes qui contiendroient des puissances de i plus hautes que la seconde, on aura

$$R^2 = 1 + m(1 - iaL) + im(m+1)aL \frac{1 - iaL}{1 + m(1 - iaL)}$$

$$+ \frac{i^2 a^2 L^2}{(1+m)^2} \left(\frac{5m(m+1)(m+2)}{8} - \frac{17m^2(m+1)}{24} \right)$$

$$- \frac{i^2 a^2 H}{1+m} \left(\frac{m(m+1)(m+2)}{8} - \frac{5m^2(m+1)}{24} \right)$$

$$= 1 + m + \frac{i^2 m(3-m)a^2}{12(1+m)} [L^2 - (1+m)H],$$

d'où l'on tire

$$R = \sqrt{(1+m) + \frac{i^2 m(3-m)a^2}{24(1+m)^{\frac{3}{2}}} [L^2 - (1+m)H]}$$

ce qui donnera pour la distance d'une apside à l'autre

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{(1+m)}} - \frac{i^2 m(3-m)a^2}{24(1+m)^{\frac{3}{2}}} [L^2 - (1+m)H] \right\} 180^\circ.$$

XLIX. Supposons maintenant que l'on ait à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + i(My^2 + M' \frac{dy^2}{dt^2}) + i^2(Ny^3 + N'y \frac{dy^2}{dt^2}) + \&c. = 0$$

on pourra faire disparaître la quantité $\frac{dy^2}{dt^2}$ de la manière suivante.

Qu'on multiplie l'équation par $2 dy$, & qu'on en prenne l'intégrale, en négligeant les termes affectés de i^2 , on aura $\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + i(\frac{2M}{3}y^3 + 2M' \int \frac{dy^2}{dt^2} dy) = 0$.

Or $\int \frac{dy^2}{dt^2} dy = y \frac{dy^2}{dt^2} - 2 \int y dy \frac{dy^2}{dt^2} =$ (en mettant au lieu de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-K^2y^2$

$-2Ly - H$, & $-K^2y - L$) $-\frac{K^2}{3}y^3 - Ly^2 - Hy$; donc on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + (K^2 - 2iLM')y^2 + (2L - 2iHM')y + H + i(\frac{2M}{3} - \frac{2K^2M'}{3})y^3 = 0.$$

Substituant donc cette valeur de $\frac{dy^2}{dt^2}$ dans l'équation proposée, elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [K^2 - 2iLM' + i^2H(2M^2 - N')]y + L - iHM' + i(M - K^2M' + 2iLM'^2)y^2 + i^2(N - K^2N' - \frac{2MM'}{3} + \frac{2K^2M^2}{3})y^3 = 0,$$

laquelle est, comme l'on voit, dans le cas de l'équation (A).

Par cette méthode on pourra faire disparaître toutes les puissances paires de $\frac{dy}{dt}$ qui se trouveront dans l'équation proposée. A l'égard des puissances impaires de $\frac{dy}{dt}$, il est facile de voir qu'elles donneront dans la valeur de y des arcs de cercle; d'où il s'ensuit que la solution ne pourra avoir lieu que tant que t ne sera pas fort grande, & qu'ainsi il sera permis de se servir de telle méthode d'approximation qu'on voudra. Cependant comme il peut être quelquefois important de connoître la vraie forme de la valeur de y , qu'on chercheroit vainement par les méthodes ordinaires, je vais donner le moyen d'y parvenir.

L. Soit en général l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K' \frac{dy}{dt} + L + i(My^2 + M'y \frac{dy}{dt} + M'' \frac{dy^2}{dt^2}) + i^2(Ny^3 + N'y^2 \frac{dy}{dt} + N''y \frac{dy^2}{dt^2} + N''' \frac{dy^3}{dt^3}) + \&c. = 0.$$

On fera $\frac{dy}{dt} = \zeta$, & l'on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'\zeta + L + i(My^2 + M'y\zeta + M''\zeta^2) + i^2(Ny^3 + N'y^2\zeta + N''y\zeta^2 + N'''\zeta^3) + \&c. = 0.$$

On différenciera cette équation, & l'on y substituera ensuite, au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, au lieu de $\frac{dy}{dt}$, ζ , & à lieu de

$\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ou plutôt la valeur en y & ζ ; de cette manière on aura une nouvelle équation en ζ de la forme suivante

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + k\zeta + k'y + l + i(m\zeta^2 + m'y\zeta + m''\zeta^2) + i^2(ny^3 + n'y^2\zeta + n''y\zeta^2 + n'''\zeta^3) + \&c. = 0.$$

Toute la difficulté se réduira donc à intégrer ces deux équations ; sur quoi voyés ci-après l'Art. LII.

LI. Si l'équation proposée étoit du quatrième ordre, on la réduiroit à deux du second, en faisant $\frac{d^2y}{dt^2} - \zeta = 0$, & substituant ensuite ζ au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dz}{dt}$ au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, & $\frac{dz}{dt}$ au lieu de $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Mais si la proposée étoit du troisième ordre, alors il faudroit la réduire d'abord au quatrième par la différenciation, & ensuite à deux du second par la supposition de $\frac{d^2y}{dt^2} - \zeta = 0$; & ainsi du reste.

De l'intégration des équations.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + H\zeta + i(Ky^2 + Ly\zeta + M\zeta^2) + i^2(Ny^3 + Py^2\zeta + Qy\zeta^2 + R\zeta^3) + \&c. = 0 \quad (L)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + h\zeta + i(ky^2 + ly\zeta + m\zeta^2) + i^2(ny^3 + py^2\zeta + qy\zeta^2 + r\zeta^3) + \&c. = 0 \quad (M)$$

LII. Nous commencerons par chercher la valeur des quantités $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, & $\frac{dydz}{dt}$ qui entrent dans les différentielles secondes de y^2 , ζ^2 , $y\zeta$ &c.; or, comme nous nous proposons seulement de pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 , il suffira d'avoir égard, dans les valeurs dont il s'agit, aux termes de l'ordre de i , parce que les quantités y^2 , ζ^2 , $y\zeta$ &c. sont déjà elles mêmes multipliées par i dans les équations proposées.

Je multiplie d'abord l'équation (L) par $2 dy$, & j'en prends l'intégrale; j'ai en négligeant les termes affectés de i^2 ,

$$\frac{dy^2}{dt^2} + A + 2Fy + Gy^2 + 2Hfz dy + i\left(\frac{2K}{3}y^3 + 2Lfyz dy + 2Mfz^2 dy\right) = 0 \dots \dots \dots (N)$$

Je multiplie de même l'équation (M) par $2d\zeta$ & j'ai, après l'intégration,

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2gfy d\zeta + hz^2 + i(2kfy^2 d\zeta + 2lfyz d\zeta + \frac{2m}{3}z^3) = 0,$$

ou bien, en mettant $y\zeta - f\zeta dy$ au lieu de $fy d\zeta$, $y^2\zeta - 2fy\zeta dy$ au lieu de $fy^2 d\zeta$, & $\frac{1}{2}y\zeta^2 - \frac{1}{2}f\zeta^2 dy$ au lieu de $fy\zeta d\zeta$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2gy\zeta + hz^2 - 2gfy d\zeta + i(2ky^2\zeta + ly\zeta^2 + \frac{2m}{3}z^3 - 4kfy\zeta dy - lf\zeta^2 dy) = 0 \dots \dots \dots (O)$$

Enfin multipliant l'équation (L) par $d\zeta$ & l'équation (M) par dy , les ajoutant ensemble, & intégrant on aura

$$\frac{dydz}{dt^2} + C + fy + Fz + \frac{g}{2}y^2 + Gy\zeta + \frac{H}{2}\zeta^2 + (h - G)f\zeta dy + i\left(\frac{k}{3}y^3 + Ky^2\zeta + \frac{L}{2}y\zeta^2 + \frac{M}{3}\zeta^3 + (l - 2K)fy\zeta dy + (m - \frac{L}{2})f\zeta^2 dy\right) = 0 \dots \dots \dots (P)$$

Pour déterminer les constantes A, B, C , on supposera que, quand $t = 0$, on ait $y = \gamma, \zeta = \delta, \frac{dy}{dt} = \varepsilon, \frac{dz}{dt} = \eta, f\zeta dy = \Gamma, fy\zeta dy = \Delta, \& f\zeta^2 dy = \Lambda$, & l'on aura

$$A = -\varepsilon^2 - 2F\gamma - G\gamma^2 - 2H\Gamma - i\left(\frac{2K}{3}\gamma^3 + 2L\Delta + 2M\Lambda\right),$$

$$B = -\eta^2 - 2f\delta - 2g\gamma\delta - h\delta^2 + 2g\Gamma - i(2k\gamma^2\delta + l\gamma\delta^2 + \frac{2m}{3}\delta^3 - 4k\Delta - l\Lambda), \&$$

$$C = -\varepsilon\eta - f\gamma - F\delta - \frac{G}{2}\gamma^2 - G\gamma\delta - \frac{H}{2}\delta^2 - (h - G)\Gamma - i[\frac{k}{3}\gamma^3 + K\gamma^2\delta + \frac{L}{2}\gamma\delta^2 + \frac{M}{3}\delta^3 + (l - 2K)\Delta + (m - \frac{L}{2})\Delta].$$

Cela posé, je fais

$$y^2 = u, \quad y\zeta = u_1, \quad \zeta^2 = u_2, \quad \int \zeta dy = u_3,$$

$$y^3 = v, \quad y^2\zeta = v_1, \quad y\zeta^2 = v_2, \quad \zeta^3 = v_3,$$

$$\int y\zeta dy = v_4, \quad \int \zeta^2 dy = v_5, \quad \int y\zeta^2 dy = v_6, \quad \int \zeta^3 dy = v_7;$$

j'aurai, au lieu des équations (L) & (M), ces deux-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + H\zeta + i(Ku + Lu_1 + Mu_2) + i^2(Nv + Pv_1 + Qv_2 + Rv_3) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{d^2z}{dr^2} + f + gy + h\zeta + i(ku + lu_1 + mu_2) + i^2(nv + pv_1 + qv_2 + rv_3) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Maintenant on a 1.^o $\frac{d^2u}{dr^2} = 2y \frac{d^2y}{dr^2} + 2 \frac{dy^2}{dr^2}$; donc

2y (L) + 2(N) donnera, en négligeant les termes de l'ordre de i ,

$$\frac{d^2u}{dr^2} + 2A + 6Fy + 4Gy^2 + 2Hy\zeta + 4H\int\zeta dy + i(\frac{10K}{3}y^3 + 2Ly^2\zeta + 2M\zeta^2 + 4L\int y\zeta dy + 4M\int\zeta^2 dy) = 0,$$

& en faisant les substitutions précédentes,

$$\frac{d^2u}{dr^2} + 2A + 6Fy + 4Gu + 2Hu_1 + 4Hu_3 + i(\frac{10K}{3}v + 2Lv_1 + 2Mv_2 + 4Lv_4 + 4Mv_5) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

2.^o $\frac{d^2 u_1}{dt^2} = \zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dy dz}{dt^2}$; donc ζ (L) + y (M) + 2 (P) donnera

$$\left[\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2C + 3fy + 3F\zeta + 2gu + (3G + h)u_1 + 2Hu_2 + 2(h - G)u_3 + i \left\{ \frac{5k}{3}v + (3K + l)v_1 + (2L + m)v_2 + \frac{5M}{3}v_3 + (2l - 4K)v_4 + (2m - L)v_5 \right\} \right] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

3.^o $\frac{d^2 u_2}{dt^2} = 2\zeta \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz^2}{dt^2}$; donc 2 ζ (M) + 2 (O) donnera

$$\left[\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2B + 6f\zeta + 6gu_1 + 4hu_2 - 4gu_3 + i(6kv_1 + 4lv_2 + \frac{10m}{3}v_3 - 8kv_4 - 2lv_5) \right] = 0 \dots \dots \dots (5)$$

4.^o $\frac{d^2 u_3}{dt^2} = \zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy dz}{dt^2}$, donc ζ (L) + (P) donnera

$$\left[\frac{d^2 u_3}{dt^2} + C + fy + 2F\zeta + \frac{g}{2}u + 2Gu_1 + \frac{3H}{2}u_2 + (h - G)u_3 + i \left\{ \frac{k}{3}v + 2Kv_1 + \frac{3L}{2}v_2 + \frac{4M}{3}v_3 + (l - 2K)v_4 + (m - \frac{L}{2})v_5 \right\} \right] = 0 \dots \dots (6)$$

5.^o $\frac{d^2 v}{dt^2} = 3y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}$, donc 3 y^2 (L) + 6 y (N) donnera, en rejettant les termes affectés de i , à cause que la variable v est déjà elle même multipliée par i^2 dans les équations (1) & (2),

$$\left[\frac{d^2 v}{dt^2} + 6Ay + 15Fu + gGv + 3Hv_1 + 12Hv_6 \right] = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$6.^{\circ} \frac{d^2 v_1}{dt^2} = 2y\zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + y^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy^2}{dt^2} + 4y \frac{dy dz}{dt^2};$$

donc $2y\zeta(L) + y^2(M) + 2\zeta(N) + 4y(P)$ donnera, en négligeant par la même raison que ci-devant les termes de l'ordre de i ,

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + 4Cy + 2A\zeta + 5fu + 10Fu_1 + 3gv + (8G + h)v_1 + 4Hv_2 + 4(h - G)v_6 + 4Hv_7 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$7.^{\circ} \frac{d^2 v_2}{dt^2} = \zeta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2y\zeta \frac{d^2 z}{dt^2} + 2y \frac{dz^2}{dt^2} + 4\zeta \frac{dy dz}{dt^2},$$

donc $\zeta^2(L) + 2y\zeta(M) + 2y(O) + 4\zeta(P)$ donnera

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 2By + 4C\zeta + 10fu_1 + 5Fu_2 + 8gv_1 + (5G + 4h)v_2 + 3Hv_3 - 4gv_6 + 4(h - G)v_7 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

$$8.^{\circ} \frac{d^2 v_3}{dt^2} = 3\zeta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 6\zeta \frac{dz^2}{dt^2}, \text{ donc } 3\zeta^2(M) + 6\zeta(O)$$

donnera

$$\frac{d^2 v_3}{dt^2} + 6B\zeta + 15fu_2 + 15gv_2 + ghv_3 - 12gv_7 = 0 \dots \dots \dots (10)$$

$$9.^{\circ} \frac{d^2 v_4}{dt^2} = y\zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + \zeta \frac{dy^2}{dt^2} + y \frac{dy dz}{dt^2}; \text{ donc } y\zeta(L) + \zeta(N) + y(P) \text{ donnera}$$

$$\frac{d^2 v_4}{dt^2} + Cy + A\zeta + fu + 4Fu_1 + \frac{g}{2}v + 3Gv_1 + \frac{3H}{2}v_2 + (h - G)v_6 + 2Hv_7 = 0 \dots \dots (11)$$

$$10.^{\circ} \frac{d^2 v_5}{dt^2} = \zeta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy dz}{dt^2}; \text{ donc } \zeta^2(L) + 2\zeta(P)$$

donnera

$$\frac{d^2 v_5}{dt^2} + 2C\zeta + 2fu_1 + 3Fu_2 + gv_1 + 3Gv_2 + 2Hv_3 + 2(h - G)v_7 = 0 \dots \dots (12)$$

$$11.^\circ \frac{d^2 v_6}{dt^2} = (y \zeta + \int \zeta dy) \frac{dy}{dt} + 2 \zeta \frac{dy^2}{dt^2} + y \frac{dy dz}{dt^2};$$

donc $(y \zeta + \int \zeta dy)(L) + 2 \zeta (N) + y (P)$ donnera

$$\frac{d^2 v_6}{dt^2} + C y + 2 A \zeta + f u + 6 F u_1 + F u_3 + \frac{g}{2} v$$

$$+ 4 G v_1 + \frac{3 H}{2} v_2 + h v_6 + 5 H v_7 = 0. \quad (13)$$

$$12.^\circ \frac{d^2 v_7}{dt^2} = \zeta^2 \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \int \zeta dy + 3 \zeta \frac{dy dz}{dt^2};$$

donc $\zeta^2 (L) + (M) \int \zeta dy + 3 \zeta (P)$ donnera

$$\frac{d^2 v_7}{dt^2} + 3 C \zeta + 3 f u_1 + 4 F u_2 + f u_3 + \frac{3 g}{2} v_1$$

$$+ 4 G v_2 + \frac{5 H}{2} v_3 + g v_6 + (4 h - 3 G) = 0. \quad (14)$$

Ayant ainsi autant d'équations que de variables; l'intégration qui doit donner la valeur de y & de ζ est facile par la méthode de l'Art. XXVI.; de sorte que si on multiplie l'équation (1) par $e^{\rho t}$, l'équation (2.) par $\lambda e^{\rho t}$, l'équation (3) par $i \mu_1 e^{\rho t}$, l'équation (4) par $i \mu_2 e^{\rho t}$, l'équation (5) par $i \mu_3 e^{\rho t}$, l'équation (6) par $i^2 v_1 e^{\rho t}$, l'équation (7) par $i^2 v_2 e^{\rho t}$, l'équation (8) par $i^2 v_3 e^{\rho t}$, l'équation (9) par $i^2 v_4 e^{\rho t}$, l'équation (10) par $i^2 v_5 e^{\rho t}$, l'équation (11) par $i^2 v_6 e^{\rho t}$, l'équation (12) par $i^2 v_7 e^{\rho t}$, & qu'on achève le reste comme dans l'Art. XLVI. on aura, en faisant pour abrégé

$$\theta = y + \lambda \zeta + i(\mu u + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3)$$

$$+ i^2(v v + v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + v_4 v_4 +$$

$$v_5 v_5 + v_6 v_6 + v_7 v_7) \quad \&$$

$$x = F + \lambda f + i(2 \mu A + 2 \mu_1 C + 2 \mu_2 B + \mu_3 C)$$

on aura dis-je

$$\left(\frac{d\theta}{dt} - \rho \theta + \frac{x}{p}\right) e^{\rho t} = \text{const.} \quad \dots \quad (Q)$$

& ensuite

$\rho^2 +$

$$\rho^2 + G + g\lambda + i(6F\mu + 3f\mu_1 + f\mu_3) + i^2(6Av + 4Cv_1 + 2Bv_2 + Cv_4 + Cv_6) = 0$$

$$H + (\rho^2 + h)\lambda + i(3F\mu_1 + 6f\mu_2 + 2F\mu_3) + i^2(2Av_1 + 4Cv_2 + 6Bv_3 + Av_4 + 2Cv_5 + 2Av_6 + 3Cv_7) = 0$$

$$K + k\lambda + (\rho^2 + 4G)\mu + 2g\mu_1 + \frac{g}{2}\mu_3 + i(15Fv + 5fv_1 + fv_4 + fv_6) = 0$$

$$L + l\lambda + 2H\mu + (\rho^2 + 3G + h)\mu_1 + 6g\mu_2 + 2G\mu_3 + i(10Fv_1 + 10fv_2 + 4Fv_4 + 2fv_5 + 6Fv_6 + 3fv_7) = 0$$

$$M + m\lambda + 2H\mu_1 + (\rho^2 + 4h)\mu_2 + \frac{3H}{2}\mu_3 + i(5Fv_2 + 15fv_3 + 3Fv_5 + 4Fv_7) = 0$$

$$4H\mu + 2(h - G)\mu_1 - 4g\mu_2 + (\rho^2 + h - G)\mu_3 + i(Fv_6 + fv_7) = 0$$

$$N + n\lambda + \frac{10K}{3}\mu + \frac{5k}{3}\mu_1 + \frac{k}{3}\mu_3 + (\rho^2 + 9G)v + 3gv_1 + \frac{g}{2}v_4 + \frac{g}{2}v_6 = 0$$

$$P + p\lambda + 2L\mu + (3K + l)\mu_1 + 6k\mu_2 + 2K\mu_3 + 3Hv + (\rho^2 + 8G + h)v_1 + 8gv_2 + 3Gv_4 + gv_5 + 4Gv_6 + \frac{3g}{2}v_7 = 0$$

$$Q + q\lambda + 2M\mu + (2L + m)\mu_1 + 4l\mu_2 + \frac{3L}{2}\mu_3 + 4Hv_1 + (\rho^2 + 5G + 4h)v_2 + 15gv_3 + \frac{3H}{2}v_4 + 3Gv_5 + \frac{3H}{2}v_6 + 4Gv_7 = 0$$

$$R + r\lambda + \frac{5M}{3}\mu_1 + \frac{10m}{3}\mu_2 + \frac{4M}{3}\mu_3 + 3Hv_2 + (\rho^2 + 9h)v_3 + 2Hv_5 + \frac{5H}{2}v_7 = 0$$

$$4L\mu + (2l - 4K)\mu_1 - 8k\mu_2 + (l - 2K)\mu_3 + \rho^2 v_4 = 0$$

$$4M\mu + (2m - L)\mu_1 - 2l\mu_2 + (m - \frac{L}{2})\mu_3 + \rho^2 v_5 = 0$$

$$12Hv_1 + 4(h - G)v_2 - 4gv_3 + (h - G)v_4 + (\rho^2 + h)v_6 + gv_7 = 0$$

$$4Hv_1 + 4(h - G)v_2 - 12gv_3 + 2Hv_4 + 2(h - G)v_5 + hv_6 + (\rho^2 + 4h - 3G)v_7 = 0,$$

équations par lesquelles on déterminera les 14 inconnues $\rho, \lambda, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$, en ayant attention de pousser les valeurs des deux premières jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 , celles des quatre suivantes jusqu'aux quantités de l'ordre de i seulement, & enfin de rejeter dans les valeurs des sept dernières toutes les quantités affectés de i .

Or je remarque 1.^o que la quantité ρ ne paroissant que sous la forme quadratique, elle aura nécessairement deux valeurs, l'une positive & l'autre négative; de sorte que si on suppose que ρ désigne la racine positive, on pourra écrire partout indifféremment $+\rho$, & $-\rho$. 2.^o que si on représente les deux premières équations par

$$\rho^2 + G + g\lambda + i\alpha = 0 \quad \& \quad H + (\rho^2 + h)\lambda + i\beta = 0,$$

$$\rho^2 + (G + h + i\alpha)\lambda + (Gh + Hg + i(\alpha h - \beta g)) = 0 \quad (R)$$

d'où l'on tirera deux valeurs de ρ^2 .

Soit maintenant, lorsque $t = 0$, $\theta = D$, & $\frac{d\theta}{dt} = E$;

c'est-à-dire

$$D = \gamma + \lambda\delta + i(\mu\gamma^2 + \mu_1\gamma\delta + \mu_2\delta^2 + \mu_3\Gamma) + i^2(v\gamma^3 + v_1\gamma^2\delta + v_2\gamma\delta^2 + v_3\delta^3 + v_4\Delta + v_5\Lambda + v_6\gamma\Gamma + v_7\delta\Gamma) \quad \&$$

$$E = \varepsilon + \lambda\eta + i[2\mu\gamma\varepsilon + \mu_1(\delta\varepsilon + \gamma\eta) + 2\mu_2\delta v$$

$$+ \mu_3 \delta \epsilon] + i^2 [3 \nu_3 \gamma^2 \delta + \nu_1 (2 \gamma \delta \epsilon + \gamma^2 \eta) + \nu_2 (\delta^2 \epsilon + 2 \gamma \delta \eta) + 3 \nu_3 \delta^2 \eta + \nu_4 \gamma \delta \epsilon + \nu_5 \delta^2 \epsilon + \nu_6 (\Gamma \epsilon + \gamma^2 \delta \epsilon) + \nu_7 (\Gamma \eta + \gamma \delta^2 \epsilon)];$$

L'équation (Q) donnera, en divisant par $e^{\rho t}$,

$$\text{soit } \frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{x}{\rho} = (E - \rho D + \frac{x}{\rho}) e^{-\rho t}$$

& prenant la quantité ρ en $-$,

$$\frac{d\theta}{dt} + \rho\theta - \frac{x}{\rho} = (E + \rho D - \frac{x}{\rho}) e^{\rho t},$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{x}{\rho^2} + (D - \frac{x}{\rho^2}) \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} + E \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

ou bien

$$\theta = \frac{x}{\rho^2} + (D - \frac{x}{\rho^2}) \cos. t \sqrt{-\rho^2} + \frac{E}{\sqrt{-\rho^2}} \sin. t \sqrt{-\rho^2}.$$

Soient maintenant ρ'^2 & ρ''^2 les deux racines de l'équation (R), & θ' , θ'' , λ' , λ'' , μ' , μ'' &c. les valeurs correspondantes de θ , λ , μ &c.; on aura, en remettant au lieu de u , u_1 , u_2 &c. leurs valeurs y^2 , $y\zeta$, ζ^2 &c., ces deux équations

$$y^2 + \lambda' \zeta + i(\mu' y^2 + \mu'_1 y \zeta + \mu'_2 \zeta^2 + \mu'_3 \int \zeta dy) + i^2(\nu' y^3 + \nu'_1 y^2 \zeta + \nu'_2 y \zeta^2 + \nu'_3 \zeta^3 + \nu'_4 \int y \zeta dy + \nu'_5 \int \zeta^2 dy + \nu'_6 \int y \zeta dy + \nu'_7 \int \zeta^2 dy) = \theta',$$

$$y^2 + \lambda'' \zeta + i(\mu'' y^2 + \mu''_1 y \zeta + \mu''_2 \zeta^2 + \mu''_3 \int \zeta dy) + i^2(\nu'' y^3 + \nu''_1 y^2 \zeta + \nu''_2 y \zeta^2 + \nu''_3 \zeta^3 + \nu''_4 \int y \zeta dy + \nu''_5 \int \zeta^2 dy + \nu''_6 \int y \zeta dy + \nu''_7 \int \zeta^2 dy) = \theta'',$$

d'où l'on tirera par approximation les valeurs de y & de ζ .

Il est évident que pour que les valeurs de y & de ζ ne contiennent que des sinus & des cosinus, il faut que les racines de l'équation (R) soient toutes deux réelles & négatives; par conséquent il faut 2° que $(G + h + ia)^2 > 4[GH - Hg + i(\alpha h - \beta g)]$; 2° que $G + h > 0$; & $GH - Hg + i(\alpha h - \beta g) > 0$. Si ces trois conditions n'ont point lieu à la fois, alors les

valeurs de y & de z contiendront des exponentielles réelles, & par conséquent la solution ne sera bonne que tant que t ne sera pas fort grande.

On pourroit ajouter que les expressions de y & de z renfermeroient l'angle t , si les deux valeurs de ρ^2 étoient égales; car alors, supposant $\rho'' = \rho' + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante, on trouveroit que la seconde des deux équations ci-dessus se réduiroit à celle-ci

$$\frac{dN'}{d\rho'} z + i \left\{ \frac{d\mu'}{d\rho'} y^2 + \frac{d\mu'1}{d\rho'} y z + \frac{d\mu'2}{d\rho'} z^2 + \frac{d\mu'3}{d\rho'} \int z dy \right\} \\ + i^2 \left\{ \frac{d\nu'}{d\rho'} y^3 + \frac{d\nu'1}{d\rho'} y^2 z + \frac{d\nu'2}{d\rho'} y z^2 + \frac{d\nu'3}{d\rho'} z^3 + \right. \\ \left. \frac{d\nu'4}{d\rho'} \int y z dy + \frac{d\nu'5}{d\rho'} \int z^2 dy + \frac{d\nu'6}{d\rho'} y \int z dy + \frac{d\nu'7}{d\rho'} z \int dy \right\} \\ = \frac{d\rho''}{d\rho'} \dots$$

dans laquelle la quantité $\frac{d\theta'}{d\rho'}$ contient nécessairement des termes multipliés par l'angle t . Mais comme l'équation (R) n'est qu'approchée, quand il arriveroit que $(G + h + ia)^2 = 4 [Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)]$, ce qui est la condition des racines égales, on n'en pourroit conclure autre chose, si non que les deux valeurs de ρ^2 seroient égales aux quantités de l'ordre de i^3 près, & que par conséquent il faudroit pousser l'approximation jusqu'aux quantités de ce même ordre. Ce ne seroit qu'après avoir poussé l'approximation fort loin & avoir reconnu que les valeurs de ρ sont toujours égales, qu'on pourroit à la rigueur faire usage de l'équation que nous venons de donner.

LIII. On voit aisément que la méthode précédente est générale pour tel nombre d'équations qu'on voudra, pourvu que ces équations soient analogues aux équations (L) & (M) c'est-à-dire que les produits de deux di-

mensions soient affectés de i , ceux de trois soient affectés de i^2 , & ainsi de suite.

Cette méthode seroit surtout utile pour déterminer aussi près qu'on voudroit le mouvement d'un système quelconque de corps qui agiroient les uns sur les autres, & qui ne feroient que des très-petites oscillations autour de leurs points d'équilibre. Car nommant iy , i^2z &c. les espaces parcourus par ces corps dans leurs oscillations, on trouveroit des équations de la forme de celles dont je viens de parler; au reste nous avons déjà donné (Art. XXX.) la solution générale de ce problème pour le cas des oscillations infiniment petites.

LIV. Si les équations proposées contenoient des termes de la forme $i f z dy$, $i^2 f y z dy$, $i^2 f z^2 dy$, $i^2 y f z dy$, $i^2 z f z dy$, l'intégration n'auroit aucune difficulté de plus; il faudroit seulement avoir attention de changer les expressions $\int dy f z dy$ & $\int dz f z dy$ qui se trouveroient dans les équations (N), (O), (P) en leurs équivalentes $y f z dy - f y z dy$, & $z f z dy - f z^2 dy$.

LV. Si elles contenoient des termes de la forme $i \frac{dy^2}{dt^2}$, $i \frac{dy dz}{dt^2}$, $i \frac{dz^2}{dt^2}$, $i^2 y \frac{dy^2}{dt^2}$, $i^2 y \frac{dy dz}{dt^2}$ &c. on les feroit disparoitre par des procédés semblables à ceux que nous avons suivis dans l'Art. XLIX. Il en seroit de même de tous les termes qui contiendroient des produits de $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dz}{dt}$ de dimensions paires; mais s'il se trouvoit des produits de dimensions impaires de ces mêmes quantités, alors on feroit chacune d'elles égale à une nouvelle variable, & on acheveroit le reste comme dans l'Art. L.

LVI. Enfin si l'on avoit des équations du troisième ordre & au delà, on les réduiroit toujours au second par la méthode de l'Art. LI.

De l'intégration de l'équation

$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i(My \cos. Ht + N \frac{dy}{dt} \sin. Ht) = T(S)$
 dans laquelle T est une fonction quelconque de t .

LVII. Je remarque d'abord, que si T étoit $= 0$, l'équation seroit dans le cas de l'Art. LV., car il n'y auroit qu'à faire $\cos. Ht = z$, ce qui donneroit $\sin. Ht = \frac{dz}{H dt}$, & $\frac{d^2z}{dt^2} + H^2z = 0$. Or puisque l'indéterminée y ne n'y. passe pas le premier degré, il est clair qu'on pourra faire disparoître le terme tout connu T , par la méthode de l'Art. I. En effet si on multiplie l'équation proposée par $z dt$, & qu'on pratique les autres opérations que prescrit cette méthode, on aura les deux équations suivantes,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + K^2z + i \left[(M \cos. Ht - \frac{d \cdot N \sin. Ht}{dt}) z - N \sin. Ht \frac{dz}{dt} \right] = 0, \text{ \& } \frac{dy}{dt} z - y \frac{dz}{dt} = \int T z dt,$$

dont la première est réductible au cas de l'Art. LV., & dont l'autre étant intégrée donnera $y = \int \frac{dt}{z^2} \int T z dt$.

Au reste ces sortes d'équations peuvent encore s'intégrer par une méthode particulière & fort simple que je vais exposer.

Je fais $y \cos. Ht = u$, $y \cos. 2Ht = v$ &c. & $y \sin. Ht = U$, $y \sin. 2Ht = V$ &c.; ce qui me donne

$$\frac{dy}{dt} \cos. Ht = \frac{du}{dt} + HU, \quad \frac{dy}{dt} \cos. 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV \text{ \&c.}$$

$$\frac{dy}{dt} \sin. Ht = \frac{dU}{dt} - HU, \quad \frac{dy}{dt} \sin. 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2HV \text{ \&c.}$$

& ensuite

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cos. Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H \frac{dU}{dt} - H^2 u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cos. 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H \frac{dV}{dt} - 4H^2 v$$

&c.

$$\frac{d^2y}{dt^2} \sin. Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H \frac{du}{dt} - H^2 U$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \sin. 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H \frac{dv}{dt} - 4H^2 V$$

&c.

Cela posé, j'aurai d'abord au lieu de l'équation (S) celle-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + i [(M - HN) u + N \frac{dU}{dt}] = T (1)$$

De plus la même équation (S) étant multipliée successivement par $\cos. Ht$ & par $\sin. Ht$ donnera

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} \cos. Ht + K^2 y \cos. Ht + i [My \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. Ht \right) \\ + \frac{1}{2} N \frac{dy}{dt} \sin. 2Ht] = T \cos. Ht, \text{ \& } \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \sin. Ht + K^2 y \sin. Ht + i \left[\frac{1}{2} My \sin. 2Ht + \right.$$

$$\left. N \frac{dy}{dt} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2Ht \right) \right] = T \sin. Ht,$$

c'est-à-dire, en faisant les substitutions ci-dessus

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H \frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2) u + i \left[\frac{M}{2} y + \left(\frac{M}{2} - NH \right) v \right. \\ \left. + \frac{N}{2} \times \frac{dV}{dt} \right] = T \cos. Ht \quad (2)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H \frac{du}{dt} + (K^2 - H^2) U + i \left[\left(\frac{M}{2} - NH \right) V - \frac{N}{2} \times \frac{dv}{dt} \right] = T \sin. Ht \quad (3)$$

Si on vouloit n'avoir égard, dans la valeur de y , qu'aux quantités de l'ordre de i , on négligeroit dans les valeurs de u & de U , & par conséquent aussi dans les équations (2) & (3) tous les termes affectés de i , moyennant quoi ces équations ne contiendroient plus que les trois variables y , u & U , de sorte qu'avec l'équation (1) elles suffiroient pour résoudre le problème; mais si on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 , comme nous l'avons fait dans les problèmes précédens, alors on conservera tous les termes des équations (2) & (3), & on multipliera de nouveau l'équation (S) par $\cos. 2 H t$, & par $\sin. 2 H t$; ce qui donnera, après les substitutions, deux équations en v & en V , dans lesquelles on pourra négliger les termes affectés de i , parceque les quantités v & V sont déjà elles-mêmes multipliées par i dans les équations (2) & (3); ainsi l'on aura

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 4 H \frac{dV}{dt} + (K^2 - 4 H^2) v = T \cos. 2 H t \quad (4)$$

$$\frac{d^2 V}{dt^2} - 4 H \frac{dv}{dt} + (K^2 - 4 H^2) V = T \sin. 2 H t \quad (5)$$

& l'intégration de l'équation proposée sera réduite à celle de cinq équations (1), (2), (3), (4), & (5), lesquelles sont, comme l'on voit, dans le cas de l'Art. XXIX.

Ayant donc multiplié la première de ces équations par $\lambda e^{P t} dt$, la seconde par $\mu e^{P t} dt$, la troisième par $M e^{P t} dt$, la quatrième par $\nu e^{P t} dt$, & la cinquième par $N e^{P t} dt$, on les ajoutera ensemble, & on en prendra l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe \int les différences des variables y , u , U &c.; après-quoi on chassera les expressions intégrales $\int y e^{P t} dt$, $\int u e^{P t} dt$, $\int U e^{P t} dt$ &c. en égalant à zéro leurs coefficients, ce qui donnera

$$(\rho^2 + K^2) \lambda + i \left(\frac{M}{2} \mu - \frac{N}{2} M \rho \right) = 0$$

$$i(M - NH)\lambda + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mu + 2HM\rho = 0$$

$$-iN\lambda\rho - 2H\mu\rho + (\rho^2 + K^2 - H^2)M = 0$$

$$i\left(\frac{M}{2} - NH\right)\mu + \frac{iN}{2}M\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)v + 4HN\rho = 0$$

$$-\frac{iN}{2}\mu\rho + i\left(\frac{M}{2} - NH\right)M - 4Hv\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)N = 0.$$

De cette manière on aura l'équation intégrale

$$\left\{ \lambda \frac{dy}{dt} + \mu \frac{du}{dt} + M \frac{dU}{dt} + v \frac{dv}{dt} + N \frac{dV}{dt} + (-\lambda\rho + \frac{iN}{2}M)y + (-\mu\rho - 2HM)u + (iN\lambda + 2H\mu - M\rho)U + (-\frac{iN}{2}M - v\rho - 4HN)v + (\frac{iN}{2}\mu + 4Hv - N\rho)V \right\} e^{\rho t} = \int T (\lambda + \mu \cos Ht + M \sin Ht + v \cos 2Ht + N \sin 2Ht) e^{\rho t} dt.$$

Soit $\rho^2 = -R^2$, de sorte que $\rho = R\sqrt{-1}$, & $\mu = i\alpha\lambda$, $v = i^2\beta\lambda$, $M = iA\rho\lambda$, $N = i^2B\rho\lambda$, & l'on aura premièrement

$$-R^2 + K^2 + i^2\left(\frac{M}{2}\alpha + \frac{N}{2}R^2\alpha\right) = 0$$

$$M - NH + (-R^2 + K^2 - H^2)\alpha - 2HR^2A = 0$$

$$-N - 2H\alpha + (-R^2 + K^2 - H^2)A = 0$$

$$\left(\frac{M}{2} - NH\right)\alpha - \frac{N}{2}R^2A + (-R^2 + K^2 - 4H^2)\beta$$

$$- 4HR^2B = 0$$

$$-\frac{N}{2}\alpha + \left(\frac{M}{2} - NH\right)A - 4H\beta + (-R^2 + K^2 -$$

$$4H^2)B = 0,$$

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{K^2 + \frac{1}{2} i^2 M \alpha}{1 - \frac{1}{2} i^2 N A}$$

$$\alpha = \frac{(M - NH)(R^2 - K^2 + H^2) + 2 NHR^2}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4H^2R^2}$$

$$A = \frac{N(R^2 - K^2 + H^2) + 2(M - NH)H}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4H^2R^2}$$

$$\beta = \frac{(\frac{1}{2} M - NH)(R^2 - K^2 + 4H^2) + 2 NHR^2}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2} \alpha$$

$$= \frac{\frac{1}{2} N(R^2 - K^2 + 4H^2)R^2 + 4(\frac{1}{2} M - NH)HR}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2} A$$

$$B = \frac{(\frac{1}{2} M - NH)(R^2 - K^2 + 4H^2) + 2 NHR^2}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2} A$$

$$= \frac{\frac{1}{2} N(R^2 - K^2 + 4H^2) + 4(\frac{1}{2} M - NH)H}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2} \alpha$$

Et ensuite

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{dy}{dt} + i\alpha \frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2A)U \\ & + i^2\beta \frac{dv}{dt} + i^2\left(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2B\right)V \\ & - \left[\left(1 - \frac{iN}{2}A\right)y + i(\alpha + 2HA)u - iA \frac{dU}{dt} \right. \\ & \left. + i^2\left(\frac{N}{2}A + \beta + 4HB\right)v - i^2B \frac{dV}{dt} \right] R\sqrt{-1} \end{aligned} \right\} e^{Rt}V^{-1}$$

$$= \int T \left[1 + i\alpha \cos. Ht + i^2\beta \cos. 2Ht + (iA \sin. Ht + i^2B \sin. 2Ht) R\sqrt{-1} \right] e^{Rt}V^{-1} dt;$$

ou divisant par $e^{Rt}V^{-1}$, & changeant les exponentielles imaginaires en *sinus* & *cosinus*,

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dt} + i\alpha \frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2A)U \\
& + i^2\beta \frac{dv}{dt} + i^2\left(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2B\right)V \\
& - \left[\left(1 - \frac{iN}{2}A\right)y + i(\alpha + 2HA)u - iA \frac{dU}{dt} \right. \\
& \left. + i^2\left(\frac{N}{2}A + \beta + 4HB\right)v - i^2B \frac{dV}{dt}\right] R\sqrt{-1} \\
& = \text{cof. } R_t \int T \left[\left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \text{ cof. } R_t \right. \\
& \left. - i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) R \text{ sin. } R_t \right] dt \\
& + \text{sin. } R_t \int T \left[\left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \text{ sin. } R_t \right. \\
& \left. + i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) R \text{ cof. } R_t \right] dt \\
& - \text{sin. } R_t \int T \left[\left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \text{ cof. } R_t \right. \\
& \left. - i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) R \text{ sin. } R_t \right] dt \cdot \sqrt{-1} \\
& + \text{cof. } R_t \int T \left[\left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \text{ sin. } R_t \right. \\
& \left. + i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) R \text{ cof. } R_t \right] dt \cdot \sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Donc si on remet pour u , U , v , & V leurs valeurs, & qu'on compare les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on aura

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{iN}{2}A + i(\alpha + HA) \text{ cof. } H_t + i^2\left(\frac{N}{2}A + \beta + \right. \right. \\
& \left. \left. 2HB\right) \text{ cof. } 2H_t\right] y - i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) \frac{dy}{dt} \\
& = \text{sin. } R_t \int T \left[\left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \frac{\text{cof. } R_t}{R} \right. \\
& \left. - i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) \text{ sin. } R_t \right] dt \\
& - \text{cof. } R_t \int T \left[\left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \frac{\text{sin. } R_t}{R} \right. \\
& \left. + i(A \text{ sin. } H_t + iB \text{ sin. } 2H_t) \text{ cof. } R_t \right] dt, \\
& \& \left(1 + i\alpha \text{ cof. } H_t + i^2\beta \text{ cof. } 2H_t\right) \frac{dy}{dt} + i \left[(N + \right. \\
& \left. H\alpha + R^2A) \text{ sin. } H_t + \left(\frac{N}{2}\alpha + 2H\beta + R^2B\right) \text{ sin. } 2H_t \right] y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{cof. } R t \int T [(1 + i \alpha \text{ cof. } H t + i^2 \beta \text{ cof. } 2 H t) \text{ cof. } R t \\
&- i (A \text{ fin. } H t + i B \text{ fin. } 2 H t) R \text{ fin. } R t] dt \\
&+ \text{fin. } R t \int T [(1 + i \alpha \text{ cof. } H t + i^2 \beta \text{ cof. } 2 H t) \text{ fin. } R t \\
&+ i (A \text{ fin. } H t + i B \text{ fin. } 2 H t) R \text{ cof. } R t] dt .
\end{aligned}$$

Deux équations, à l'aide desquelles on éliminera $\frac{dy}{dt}$.

De l'intégration des équations

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + i (M y' \text{ cof. } H t + N \frac{dy'}{dt} \text{ fin. } H t) = T . \quad (T)$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + K'^2 y' + i (M' y' \text{ cof. } H t - N' \frac{dy'}{dt} \text{ fin. } H t) = T' . \quad (U)$$

LVIII. Soit fait, comme dans l' Art. préc. ,
 $y \text{ cof. } H t = u$, $y \text{ fin. } H t = U$, $y \text{ cof. } 2 H t = v$;
 $y \text{ fin. } 2 H t = V$ &c.

& de même

$y' \text{ cof. } H t = u'$, $y' \text{ fin. } H t = U'$, $y' \text{ cof. } 2 H t = v'$,
 $y' \text{ fin. } 2 H t = V'$ &c.

on aura

$$\frac{dy}{dt} \text{ cof. } H t = \frac{du}{dt} + H U, \quad \frac{dy}{dt} \text{ cof. } 2 H t = \frac{dv}{dt} + 2 H V,$$

$$\frac{dy}{dt} \text{ fin. } H t = \frac{dU}{dt} - H u, \quad \frac{dy}{dt} \text{ fin. } 2 H t = \frac{dV}{dt} - 2 H v;$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \text{ cof. } H t = \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 H \frac{dU}{dt} - H^2 u$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \text{ cof. } 2 H t = \frac{d^2 v}{dt^2} + 4 H \frac{dV}{dt} - 4 H^2 v$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \text{ fin. } H t = \frac{d^2 U}{dt^2} - 2 H \frac{du}{dt} - H^2 U$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \text{ fin. } 2 H t = \frac{d^2 V}{dt^2} - 4 H \frac{dv}{dt} - 4 H^2 V$$

& pareillement

$$\frac{dy'}{dt} \text{ cof. } Ht = \frac{du'}{dt} + HU', \quad \frac{dy'}{dt} \text{ cof. } 2Ht = \frac{dv'}{dt} + 2HV',$$

$$\frac{dy'}{dt} \text{ fin. } Ht = \frac{dU'}{dt} - H u', \quad \frac{dy'}{dt} \text{ fin. } 2Ht = \frac{dV'}{dt} - 2H v',$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ cof. } Ht = \frac{d^2u'}{dt^2} + 2H \frac{dU'}{dt} - H^2 u'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ cof. } 2Ht = \frac{d^2v'}{dt^2} + 4H \frac{dV'}{dt} - 4H^2 v'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ fin. } Ht = \frac{d^2U'}{dt^2} - 2H \frac{dU'}{dt} - H^2 U'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ fin. } 2Ht = \frac{d^2V'}{dt^2} - 4H \frac{dV'}{dt} - 4H^2 V'.$$

Cela posé, on aura d'abord, au lieu des équations (T) & (U), ces deux-ci.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i[(M - HN)u' + N \frac{dU'}{dt}] = T. \quad (1)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2y' + i[(M' - HN')u - N' \frac{dU}{dt}] = T'. \quad (2)$$

Ensuite les mêmes équations (T) & (U) étant multipliées successivement par cof. Ht & par fin. Ht donneront (après les substitutions) ces quatre autres équations

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H \frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)u + i\left[\frac{M}{2}y' + \left(\frac{M}{2} - NH\right)v' + \frac{N}{2} \cdot \frac{dV'}{dt}\right] = T \text{ cof. } Ht \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H \frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)U + i\left[\left(\frac{M}{2} - NH\right)V' + \frac{N}{2} \cdot \frac{dy'}{dt} - \frac{N}{2} \cdot \frac{dv'}{dt}\right] = T \text{ fin. } Ht \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{d^2u'}{dt^2} + 2H \frac{dU'}{dt} + (K'^2 - H^2)u' + i\left[\left(\frac{M'}{2}y + \left(\frac{M'}{2} + N'H\right)v - \frac{N'}{2} \cdot \frac{dV}{dt}\right)\right] = T' \text{ cof. } Ht \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{d^2 U'}{dt^2} - 2H \frac{du'}{dt} + (K'^2 - H^2)U' + i \left[\left(\frac{M'}{2} + N'H \right) V - \frac{N'}{2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{N'}{2} \cdot \frac{dv}{dt} \right] = T' \sin. Ht \dots \dots \dots (6)$$

Enfin multipliant encore l'une & l'autre des équations (T) & (U) par $\cos. 2Ht$ & par $\sin. 2Ht$, & négligeant les termes affectés de i , on aura

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 4H \frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \cos. 2Ht \dots (7)$$

$$\frac{d^2 V}{dt^2} - 4H \frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \sin. 2Ht \dots (8)$$

$$\frac{d^2 v'}{dt^2} + 4H \frac{dv'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)v' = T' \cos. 2Ht \dots (9)$$

$$\frac{d^2 V'}{dt^2} - 4H \frac{dV'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)V' = T' \sin. 2Ht \dots (10)$$

On aura donc en tout dix inconnues & dix équations, & le problème ne dépendra plus que de l'intégration de ces équations.

En suivant notre méthode on multipliera l'équation (1) par λ , l'équation (2) par λ' , l'équation (3) par μ , l'équation (4) par M , l'équation (5) par μ' , l'équation (6) par M' , l'équation (7) par ν , l'équation (8) par N , l'équation (9) par ν' , l'équation (10) par N' ; & après les avoir ajoutées ensemble on multipliera la somme par $e^{\rho t} dt$, & on en prendra l'intégrale; ce qui donnera (en faisant disparaître de dessous le signe \int les différences des variables y , u , V , u' &c. & égalant ensuite à zéro les coefficients des termes où ces mêmes variables se trouveront sous le signe)

$$\left. \begin{aligned} (\rho^2 + K^2) \lambda + i \left(\frac{M'}{2} \mu' + \frac{N'}{2} M' \rho \right) &= 0 \\ (\rho^2 + K'^2) \lambda' + i \left(\frac{M}{2} \mu - \frac{N}{2} M \rho \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (V)$$

$$\begin{aligned}
 & i(M' + N'H)\lambda' + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mu + 2HM\rho = 0 \\
 & iN'\lambda'\rho - 2H\mu\rho + (\rho^2 + K^2 - H^2)M = 0 \\
 & i(M - NH)\lambda + (\rho^2 + K'^2 - H^2)\mu' + 2HM'\rho = 0 \\
 & -iN\lambda\rho - 2H\mu'\rho + (\rho^2 + K'^2 - H^2)M' = 0 \\
 & i\left(\frac{M'}{2} + N'H\right)\mu' - \frac{iN'}{2}M'\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)v \\
 & + 4HN\rho = 0 \\
 & \frac{iN'}{2}\mu'\rho + i\left(\frac{M'}{2} + N'H\right)M' - 4Hv\rho + (\rho^2 + K^2 \\
 & - 4H^2)N = 0 \\
 & i\left(\frac{M}{2} - NH\right)\mu + \frac{iN}{2}M\rho + (\rho^2 + K'^2 - 4H^2)v' \\
 & + 4HN'\rho = 0 \\
 & -\frac{iN}{2}\mu\rho + i\left(\frac{M}{2} - NH\right)M - 4Hv'\rho + (\rho^2 + K'^2 \\
 & - 4H^2)N' = 0.
 \end{aligned} \tag{V}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } \left\{ \lambda \frac{dy}{dt} + \lambda' \frac{dy'}{dt} + \mu \frac{du}{dt} + M \frac{dU}{dt} + \mu' \frac{du'}{dt} \right. \\
 + M' \frac{dU'}{dt} + v \frac{dv}{dt} + N \frac{dV}{dt} + v' \frac{dv'}{dt} + N' \frac{dV'}{dt} \\
 + \left(-\lambda\rho - \frac{iN'}{2}M'\right)y + \left(-\lambda'\rho + \frac{iN}{2}M\right)y' \\
 + \left(-\mu\rho - 2HM\right)u + \left(-iN'\lambda' + 2H\mu - M\rho\right)U \\
 + \left(-\mu'\rho - 2HM'\right)u' + \left(iN\lambda + 2H\mu' - M'\rho\right)U' \\
 + \left(\frac{iN'}{2}M' - v\rho - 4HN\right)v + \left(-\frac{iN'}{2}\mu' + 4Hv - N\rho\right)V \\
 + \left(-\frac{iN}{2}M - v'\rho - 4HN'\right)v' + \left(\frac{iN}{2}\mu + 4Hv' - N'\rho\right)V' \left. \right\} e^{\rho t} \\
 = \int [T(\lambda + \mu \cos. Ht + M \sin. Ht + v \cos. 2Ht + \\
 N \sin. 2Ht) + T'(\lambda' + \mu' \cos. Ht + M' \sin. Ht + v' \\
 \cos. 2Ht + N' \sin. 2Ht)] e^{\rho t} dt \dots \dots \dots \tag{X}
 \end{aligned}$$

LIX. Qu'on multiplie la quatrième, la sixième, la huitième, & la dixième des équations (V) par $\pm \sqrt{-1}$,

& qu'on les ajoute ensuite chacune à sa précédente, on aura, au lieu des dix équations (V), les six suivantes

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) = 0,$$

$$(\rho^2 + K'^2)\lambda' + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right) = 0.$$

$$i[M' + N'(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda' + (K^2 - [H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu + M\sqrt{-1}) = 0$$

$$i[M - N(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda + (K'^2 - [H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu' + M'\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M' + N'[2H + \rho\sqrt{-1}]) (\mu' + M'\sqrt{-1}) + 2(K^2 - [2H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu + N\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M - N[2H + \rho\sqrt{-1}]) (\mu + M\sqrt{-1}) + 2(K'^2 - [2H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu' + N'\sqrt{-1}) = 0.$$

Les deux premières donnent, ou bien

$$-\rho^2 = K^2 + \frac{i}{\lambda} \left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho \right) \dots (Y)$$

$$\& \lambda' = -i \frac{M\mu - NM\rho}{2(\rho^2 + K^2)}, \text{ ou bien}$$

$$-\rho^2 = K'^2 + \frac{i}{\lambda'} \left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho \right)$$

$$\& \lambda = -i \frac{M\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K'^2)}.$$

Dans le premier cas, la troisième équation deviendra, en substituant la valeur de λ' ,

$$(K^2 - [H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu + M\sqrt{-1})$$

$$- i^2 [M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})] \frac{M\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K^2)} = 0,$$

laquelle donnera séparément, à cause de l'ambiguïté du signe, $\mu = 0$, & $M = 0$; de sorte qu'on aura aussi $\lambda' = 0$, $\nu' = 0$, & $N' = 0$; & l'on aura ensuite pour la détermination des quantités μ' , M' , ν , & N ,

$$\left. \begin{aligned} \mu' \pm M' \sqrt{-1} &= -i \frac{M - N(H \pm \rho \sqrt{-1})}{K^2 - (H \pm \rho \sqrt{-1})^2} \lambda \\ \nu \pm N \sqrt{-1} &= -i \frac{M' + N'(2H \pm \rho \sqrt{-1})}{2(K^2 - (2H \pm \rho \sqrt{-1})^2)} (\mu' \pm M' \sqrt{-1}) \end{aligned} \right\} (Z)$$

d'où l'on voit que les quantités μ' & M' feront de l'ordre de i , & les quantités ν & N de celui de i^2 .

Dans le second cas on trouvera d'abord $\mu' = 0$, $M' = 0$, & par conséquent $\lambda = 0$, $\nu = 0$, & $N = 0$; ensuite on aura

$$\begin{aligned} \mu \pm M \sqrt{-1} &= -i \frac{M' + N'(H \pm \rho \sqrt{-1})}{K^2 - (H \pm \rho \sqrt{-1})^2} \lambda' \quad \& \\ \nu' \pm N' \sqrt{-1} &= -i \frac{M - N(2H \pm \rho \sqrt{-1})}{2(K'^2 - (2H \pm \rho \sqrt{-1})^2)} (\mu \pm M \sqrt{-1}), \end{aligned}$$

d'où l'on tirera, μ , M , ν' , & N' .

Ayant ainsi les valeurs de tous les coefficients on achevera le calcul comme on a fait dans l'Art. préc., & l'on aura, à l'aide des deux valeurs de ρ^2 , deux équations finales qui serviront à trouver y & y' .

Il y a cependant un cas qui demande une discussion particulière; c'est celui où le coefficient H seroit presque égal à $K - K'$, la différence n'étant que de l'ordre de i ; nous allons l'examiner dans les Articles suivans.

Analyse du cas où H est presque égal à $K - K'$.

LX. Soit $K = h + ik$, $K' = h' + ik'$, & $H = h - h'$; en sorte que $H = K - K' + i(k - k')$.

Je fais $\rho \sqrt{-1} = h + im$, c'est-à-dire $\rho = -(h + im) \sqrt{-1}$; ce qui me donne $\rho^2 + K^2 = -2ih(m - k) - 2i^2(m^2 - k^2)$; & les équations (Y) & (Z) de l'Art. préc. se changeront en celles-ci

$$2h(m - k) + i(m^2 - k^2) \\ = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M'}{2} \mu' - \frac{N'(b + im)}{2} M' \sqrt{-1} \right) \quad (a)$$

$$\mu' \pm M' \sqrt{-1} = -i \frac{M - N(b - b' \pm (b + im))}{(b' + ik)^2 - (b - b' \pm (b + im))^2} \lambda \quad (b)$$

$$\nu \pm N \sqrt{-1} = -\frac{i}{2} \frac{M' + N'(2b - 2b' \pm (b + im))}{(b + ik)^2 - (2b - 2b' \pm (b + im))^2}$$

$$\chi (\mu' \pm M' \sqrt{-1}) \quad \dots \quad (c)$$

d'où l'on tirera les valeurs de m , μ' , M' , ν , & N .

L'équation (b) étant prise en $-$ donnera

$$\mu' - M' \sqrt{-1} = -i \frac{M + N(b' + im)}{(b' + ik)^2 - (b' + im)^2} \lambda.$$

Or $(b' + ik)^2 - (b' + im)^2 = 2ih'(k' - m) + i^2(k'^2 - m^2) = -i(m - k')(2h + i[m + k'])$; donc faisant cette substitution, & divisant ensuite le haut & le bas de la fraction par i , on aura

$$\mu' - M' \sqrt{-1} = \frac{M + N(b' + im)}{(m - k')(2b' + i(m + k'))} \lambda.$$

Equation, dans laquelle je remarque que la quantité i ne se trouve plus qu'au premier degré; de sorte que cette équation ne doit être regardée comme exacte qu'aux quantités de l'ordre de i^2 près. C'est pourquoi il faudra négliger dans la suite toutes les quantités de ce même ordre.

Prenons maintenant l'équation (b) en $+$, & nous aurons, en rejetant les termes de l'ordre de i^2 ,

$$\mu' + M' \sqrt{-1} = -i \frac{M - N(2b - b')}{b'^2 - (2b - b')^2} \lambda.$$

Donc

$$\mu' = \frac{1}{2} \left(\frac{M + N(b' + im)}{(m - k')(2b' + i(m + k'))} + i \frac{M - N(2b - b')}{4b(b - b')} \right) \lambda$$

$$M' = \frac{1}{2} \left(\frac{M + N(b' + im)}{(m - k')(2b' + i(m + k'))} - i \frac{M - N(2b - b')}{4b(b - b')} \right) \lambda$$

c'est-à-dire, en faisant

$$\alpha = \frac{Nm}{4b'(m-k')} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} + \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')} \&$$

$$A = \frac{Nm}{4b'(m-k)} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} - \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')},$$

$$\mu' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + i\alpha \right) \lambda$$

$$\& M' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + iA \right) \lambda \sqrt{-1}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (a) il viendra

$$2h(m-k) + i(m^2 - k^2) = \frac{M'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + i\alpha \frac{M'}{2}$$

$$+ \frac{N'(M+Nb)(b+im)}{8b'(m-k')} + iA \frac{N'b}{2},$$

ou multipliant par $\frac{m-k'}{2b}$ & réduisant,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+Nb)}{16bb'} \\ + i \left[(m^2 - k^2)(m-k) - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'} \right. \\ \left. - \frac{(\alpha M' + AN'b)(m-k')}{4b} \right] = 0$$

De sorte que, si l'on fait

$$\Delta = (m^2 - k^2)(m-k) - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'} \\ - \frac{(\alpha M' + AN'b)(m-k')}{4b},$$

on aura,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+Nb)}{16bb'} + i\Delta = 0. \quad (d)$$

équation d'où l'on tirera deux valeurs de m que j'appellerai m_1 & m_2 .

Si on néglige le terme $i\Delta$ on aura les premières valeurs approchées de m_1 & de m_2 ; & substituant ensuite

ces valeurs dans l'expression de Δ on aura les valeurs de m_1 & de m_2 aux quantités de l'ordre de i^2 près.

Enfin l'équation (c) donnera, en substituant les valeurs de μ' & de M' , & négligeant les termes de l'ordre de i^2 ,

$$v \pm N \sqrt{-1} = -i \frac{M+N(2b-2b'+b)}{b^2-(2b-2b' \pm b)^2} \\ \times \frac{M+Nb'}{8b'(m-k')} (1 \mp 1) \lambda$$

d'où, en faisant

$$\beta = - \frac{M+N(b-2b')}{4b'(b-b')} \times \frac{M+Nb'}{8b'(m-k')}$$

on aura

$$v = i\beta\lambda, \quad N = i\beta\lambda\sqrt{-1}.$$

A l'égard des autres coefficients, savoir λ' , μ , M , ν & N' ils seront tous $= 0$, comme nous l'avons vu dans l'Art. préc.

LXI. On fera maintenant ces différentes substitutions dans l'équation intégrale (X) de l'Art. LVIII., & l'on aura, en rejetant les termes de l'ordre de i^2

$$\left\{ \frac{dy}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} \left(\frac{du'}{dt} + \frac{dU'}{dt} \sqrt{-1} \right) \right. \\ + hy \sqrt{-1} + (h-2H) \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} (u' \sqrt{-1} - U') \\ + i \left(\alpha \frac{du'}{dt} + A \frac{dU'}{dt} \sqrt{-1} + \beta \left(\frac{dv}{dt} + \frac{dV}{dt} \sqrt{-1} \right) \right. \\ \left. + \left(m - \frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')} \right) y \sqrt{-1} \right. \\ + \left(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2HA \right) u' \sqrt{-1} \\ \left. + \left(N + 2H\alpha - \frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')} - hA \right) U' \right. \\ \left. + \left(\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + [h-4H]\beta \right) (v \sqrt{-1} - V) \right\} e^{-(h+im)t \sqrt{-1}}$$

$$= \int \left\{ T + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} T' (\cos. Ht + \sin. Ht \sqrt{-1}) \right. \\ \left. + i (\beta T (\cos. 2Ht + \sin. 2Ht \sqrt{-1}) \right. \\ \left. + T' (\alpha \cos. Ht + A \sin. Ht \sqrt{-1}) \right\} e^{-(h+in)t} \sqrt{-1} dt \quad (e)$$

Supposons que cette intégrale soit prise de telle manière qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$, & qu'alors on ait $y = f$, $\frac{dy}{dt} = g$, $y' = f'$, $\frac{dy'}{dt} = g'$, & par conséquent $u = f'$, $\frac{du}{dt} = g'$, $U' = 0$, $\frac{dU'}{dt} = Hf'$, $v = f$, $\frac{dv}{dt} = g$, $V = 0$, & $\frac{dV}{dt} = 2Hf$ (Art. LVIII.); il est clair qu'il faudra ajouter au second membre de l'équation précédente, la quantité

$$g + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} (g' + Hf' \sqrt{-1}) + hf \sqrt{-1} \\ + (h - 2H) \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} f' \sqrt{-1} \\ + i \left\{ \alpha g' + A H f' \sqrt{-1} + \beta (g + 2Hf \sqrt{-1}) \right. \\ \left. + (m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')}) f \sqrt{-1} \right. \\ \left. + (\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2HA) f' \sqrt{-1} \right. \\ \left. + (\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H] \beta) f \sqrt{-1} \right\}$$

c'est-à-dire, à cause de $H = h - h'$,

$$g + hf \sqrt{-1} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} (g' + h' f' \sqrt{-1}) \\ + i \left\{ \alpha g' + \beta g + (\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - HA) f' \sqrt{-1} \right. \\ \left. + (m - [h - 2h'] \beta) f \sqrt{-1} \right\}.$$

LXII. Pour rendre le calcul plus simple nous négligerons d'abord les termes de l'ordre de i ; moyennant quoi l'équation (e) deviendra (en mettant $h - h'$ au lieu de H , & $e^{(h-h')t\sqrt{-1}}$ au lieu de $\text{cof. } Ht + \text{fin. } Ht\sqrt{-1}$)

$$\left\{ \frac{dy}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} \left(\frac{dU'}{dt} + [h-2h']U' \right) \right. \\ \left. + \left(hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} \left[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u' \right] \right) \sqrt{-1} \right\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}} \\ = g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} g' + \left(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')} f' \right) \sqrt{-1} \\ + \int \left\{ T e^{-(h+im)t\sqrt{-1}} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} T' e^{-(h'+im)t\sqrt{-1}} \right\} dt \quad (f)$$

Si on multiplie cette équation par $e^{(h+im)t\sqrt{-1}}$, qu'en suite, après avoir réduit les exponentielles imaginaires en *sinus* & *cosinus*, on compare la partie imaginaire du premier membre à la partie imaginaire du second, & qu'on fasse pour abréger

$$\theta = \text{fin. } (h+im)t \int T \text{ cof. } (h+im)t dt \\ - \text{cof. } (h+im)t \int T \text{ fin. } (h+im)t dt, \\ \mathfrak{F} = \text{fin. } (h'+im)t \int T' \text{ cof. } (h'+im)t dt \\ - \text{cof. } (h'+im)t \int T' \text{ fin. } (h'+im)t dt,$$

on aura l'équation suivante

$$hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} \left[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u' \right] \\ = \left(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')} f' \right) \text{cof. } (h+im)t \\ + \left(g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} g' \right) \text{fin. } (h+im)t \\ + \theta + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} \mathfrak{F},$$

laquelle, (en mettant successivement m_1 & m_2 à la place de m , & dénotant par θ_1 & θ_2 , \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 les valeurs correspondantes de θ & de \mathfrak{F}) en fournira deux

autres, dont la seconde étant multipliée par $\frac{m_2 - k'}{b(m_1 - m_2)^2}$ & ensuite retranchée de la première aussi multipliée par $\frac{m_1 - k'}{b(m_1 - m_2)}$, on aura

$$\begin{aligned}
 y = & \left(\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} f + \frac{M + Nb'}{4b(m_1 - m_2)} f' \right) \cos. (h + im_1) t \\
 & + \left(\frac{m_1 - k'}{b(m_1 - m_2)} g + \frac{M + Nb'}{4bb'(m_1 - m_2)} g' \right) \sin. (h + im_1) t \\
 & - \left(\frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} f + \frac{M + Nb'}{4b(m_1 - m_2)} f' \right) \cos. (h + im_2) t \\
 & - \left(\frac{m_2 - k'}{b(m_1 - m_2)} g + \frac{M + Nb'}{4bb'(m_1 - m_2)} g' \right) \sin. (h + im_2) t \\
 & + \frac{m_1 - k'}{b(m_1 - m_2)} \theta_1 - \frac{m_2 - k'}{b(m_1 - m_2)} \theta_2 + \frac{M + Nb'}{4bb'(m_1 - m_2)} (\vartheta_1 - \vartheta_2) (g)
 \end{aligned}$$

LXIII. Il faudroit maintenant faire un calcul semblable pour trouver la valeur de y' , en employant les autres formules de l'Art. LIX.; mais sans entrer dans un nouveau détail à cet égard, il suffira de considérer que les équations proposées (T) & (U), dans lesquelles $H = h - h'$, sont telles que l'une se change en l'autre, en marquant seulement d'un trait les lettres y, K, M, N, h, T , & effaçant celui des lettres $y', K', M', N', h', & T'$; d'où il s'ensuit que pour avoir l'expression de y' il ne faudra que mettre dans celle de y , $f', g', h', k', M', N', T'$, au lieu de f, g, h, k, M, N, T , & *viceversa*.

A l'égard des valeurs de m , on remarquera qu'en négligeant le terme $i\Delta$, elles seront les mêmes pour les deux cas, puisque les quantités M, N, h, k , & M', N', h', k' entrent de la même manière dans l'équation (d) de l'Art. LX.

LXIV. Ayant trouvé les premières valeurs de y & de y' , si on veut avoir une plus grande précision & tenir compte aussi des quantités de l'ordre de i , on nommera

ces valeurs y & y' , & on désignera de même par u' , U' , v , & V les valeurs correspondantes des quantités u , U , v , & V ; ensuite on supposera $y = y + iy'$, $u = u + iu'$, $U = U + iU'$, & l'on fera ces substitutions dans l'équation (e) de l'Art. LXI., en négligeant les termes de l'ordre de i^2 ; après quoi on effacera tous les termes qui ne seront point affectés de i , parceque ces termes se détruiront d'eux mêmes, en vertu de l'équation (f), & l'on divisera les autres par i . De cette manière on aura

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{dy}{dt} + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} \left(\frac{du'}{dt} + [h - 2h'] U' \right) \right. \\ & + \left(h y' + \frac{M + Nb'}{4b'(m-k')} \left(\frac{dU'}{dt} - [h - 2h'] u' \right) \right) \sqrt{-1} \\ & + \alpha \frac{dv}{dt} + \beta \frac{dV}{dt} + \left(N + 2H\alpha - \frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} - hA \right) U' \\ & - \left(\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H] \beta \right) V \\ & + \left(A \frac{dU'}{dt} + \beta \frac{dV}{dt} + \left(m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} \right) y \right. \\ & + \left(\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2HA \right) u' \\ & \left. + \left(\frac{N'(M + Nb')}{8b'(m-k')} + [h - 4H] \beta \right) v \right\} \sqrt{-1} \left. \right\} e^{-(h+im)t} \sqrt{-1} \\ & = \alpha g' + \beta g + \left(\left(\frac{(M + Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - HA \right) f' \right. \\ & + \left. \left(m - [h - 2h'] \beta \right) f \right) \sqrt{-1} \\ & + \int \left\{ \beta T (\cos. 2Ht + \sin. 2Ht \sqrt{-1}) \right. \\ & \left. + T' (\alpha \cos. Ht + A \sin. Ht \sqrt{-1}) \right\} e^{-(h+im)t} \sqrt{-1} dt. \end{aligned}$$

On traitera cette équation comme on a fait ci-devant l'équation (f), & supposant pour abregé

$$\phi = \sin. (h + im) t f T \cos. (2h' - h + im) t dt$$

$$- \cos. (h + im) t f T \sin. (2h' - h + im) t dt,$$

$$\chi = \sin. (h + im) t f T' \cos. (h' + im) t dt$$

$$- \cos. (h + im) t f T' \sin. (h' + im) t dt,$$

$$\psi = \sin. (h + im) t f T' \cos. (2h - h' + im) t dt$$

$$- \cos. (h + im) t f T' \sin. (2h - h' + im) t dt,$$

& de plus

$$\gamma = m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m - k')}$$

$$\delta = \frac{(M + Nb')m}{4b'(m - k')} + h\alpha - 2HA$$

$$\epsilon = \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m - k')} + (h - 4H)\beta$$

$$\zeta = \alpha g' + \beta g$$

$$\eta = \left[\frac{(M + Nb')m}{4b'(m - k')} + h\alpha - HA \right] f' + [m - (h - 2h)\beta] f,$$

on trouvera

$$y = \frac{m_1 - k'}{b(m_1 - m_2)} \left\{ \eta_1 \cos. (h + im_1)t + \zeta_1 \sin. (h + im_1)t \right.$$

$$+ A_1 \frac{dU'}{dt} + \beta_1 \frac{dV'}{dt} + \gamma_1 y + \delta_1 u' + \epsilon_1 v$$

$$\left. + \beta_1 \phi_1 + \frac{\alpha_1 + A_1}{2} \chi_1 + \frac{\alpha_1 - A_1}{2} \psi_1 \right\}$$

$$- \frac{m_2 - k'}{b(m_1 - m_2)} \left\{ \eta_2 \cos. (h + im_2)t + \zeta_2 \sin. (h + im_2)t \right.$$

$$+ A_2 \frac{dU'}{dt} + \beta_2 \frac{dV'}{dt} + \gamma_2 y + \delta_2 u' + \epsilon_2 v$$

$$\left. + \beta_2 \phi_2 + \frac{\alpha_2 + A_1}{2} \chi_2 + \frac{\alpha_2 - A_1}{2} \psi_2 \right\};$$

$\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ &c. étant les valeurs de η, ζ &c. qui répondent à m_1 & m_2 .

Si on vouloit encore pousser la précision plus loin il faudroit alors reprendre les calculs de l'Art. LVIII., & y

avoir égard aux quantités de l'ordre de i^3 que nous y avons négligées.

LXV. Soit $T = AP$, A étant une quantité constante, & P une fonction de P telle que $\frac{d^2P}{dt^2} + a^2P = 0$; on aura donc $\int T \text{ cof. } (h + im) t dt = A \int P \text{ cof. } (h + im) t dt$, & $\int P \text{ cof. } (h + im) t dt = -\frac{1}{a^2} \int \frac{d^2P}{dt^2} \text{ cof. } (h + im) t dt =$ (en intégrant par parties) $-\frac{dP}{a^2 dt} \text{ cof. } (h + im) t - \frac{b + im}{a^2} P \text{ fin. } (h + im) t + \frac{(b + im)^2}{a^2} \int P \text{ cof. } (h + im) t dt$; donc supposant que l'intégrale $\int P \text{ cof. } (h + im) t dt$ soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$, & qu'alors on ait $\frac{dP}{dt} = \alpha$, on aura

$$\int P \text{ cof. } (h + im) t dt = [(h + im) P \text{ fin. } (h + im) t + \frac{dP}{dt} \text{ cof. } (h + im) t - \alpha] \frac{1}{(b + im)^2 - a^2}.$$

On trouvera de même, en prenant β pour ce que devient P lorsque $t = 0$

$$\int P \text{ fin. } (h + im) t dt = [-(h + im) P \text{ cof. } (h + im) t + \frac{dP}{dt} \text{ fin. } (h + im) t + (h + im) \beta] \frac{1}{(b + im)^2 - a^2}.$$

De sorte qu'on aura (Art. LXII.)

$$\theta = \frac{A}{(b + im)^2 - a^2} [(h + im) P - \alpha \text{ fin. } (h + im) t - \beta (h + im) \text{ cof. } (h + im) t].$$

Pareillement si on a $T' = A'P'$, & $\frac{d^2P'}{dt^2} + a'^2P' = 0$,

& que α' , β' soient les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$ & de P' quand $t = 0$, on trouvera

$$\mathfrak{J} = \frac{A'}{(b' + im) - a^2} [(h' + im) P \operatorname{cof.} (h - h') t + \frac{d^2 P}{dt^2} \operatorname{fin.} (h - h') t - a' \operatorname{fin.} (h' + im) t - \beta' (h' + im) \operatorname{cof.} (h' + im) t] .$$

Donc si on a

$$T = AP + BQ + CR + \&c. \quad \&$$

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + a^2 P = 0, \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + b^2 Q = 0, \quad \frac{d^2 R}{dt^2} + c^2 R = 0 \quad \&c.$$

& de même

$$T' = A'P' + B'Q' + C'R' + \&c., \quad \&$$

$$\frac{d^2 P'}{dt^2} + a'^2 P' = 0, \quad \frac{d^2 Q'}{dt^2} + b'^2 Q' = 0, \quad \frac{d^2 R'}{dt^2} + c'^2 R' = 0 ;$$

& qu'on fasse

$$\Theta = \frac{A}{b^2 - a^2} P + \frac{B}{b^2 - b^2} Q + \frac{C}{b^2 - c^2} R + \&c.$$

$$\Theta' = \frac{A'}{b'^2 - a'^2} P' + \frac{B'}{b'^2 - b'^2} Q' + \frac{C'}{b'^2 - c'^2} R' + \&c.$$

& de plus

$$F = f - \Lambda, \quad G = g - \Gamma, \quad F' = f' - \Lambda', \quad G' = g' - \Gamma',$$

($\Lambda, \Gamma, \Lambda', \& \Gamma'$ étant les valeurs de $\Theta, \frac{d\Theta}{dt}, \Theta' \& \frac{d\Theta'}{dt}$,

lorsque $t = 0$) la formule (g) de l'Art. LXII. donnera, en négligeant les termes de l'ordre de i ,

$$y = \left\{ \frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} F + \frac{M + Nb'}{4b'(m_1 - m_2)} F' \right\} \operatorname{cof.} (h + im_1) t$$

$$+ \left\{ \frac{m_1 - k'}{b(m_1 - m_2)} G + \frac{M + Nb'}{4bb'(m_1 - m_2)} G' \right\} \operatorname{fin.} (h + im_1) t$$

$$- \left\{ \frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} F + \frac{M + Nb'}{4b'(m_1 - m_2)} F' \right\} \operatorname{cof.} (h + im_2) t$$

$$- \left\{ \frac{m_2 - k'}{b(m_1 - m_2)} G + \frac{M + Nb'}{4bb'(m_1 - m_2)} G' \right\} \operatorname{fin.} (h + im_2) t$$

$$+ \Theta \dots \dots \dots (h)$$

Par là on aura la valeur de y lorsque les fonctions T , & T' seront exprimées par des suites quelconques de différens *sinus* & *cosinus* d'angles multiples de t .

Il faut observer que si a étoit égal ou presque égal à h , il ne seroit pas permis de négliger les termes affectés de i dans l'expression de θ ; & l'on trouveroit alors dans la valeur de y des termes dont les coëfficiens seroient très-grands; il en faudra dire autant du cas où a' ne seroit que très-peu différent de h' ; nous en laissons le détail au Lecteur.

Mais si a étoit exactement égal à $h + im$, le dénominateur $a^2 - (h + im)^2$ de l'expression de θ deviendrait $= 0$, & comme cette quantité n'est point infinie, le numérateur correspondant seroit aussi égal à zéro dans ce cas là; faisant donc $h + im = a + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante on trouveroit

$$\theta = - \frac{A}{2a} [\alpha t \cos. at + \beta (\cos. at - at \sin. at) - P - a \frac{dP}{da}];$$

de sorte que la formule (h) contiendrait des termes multipliés par l'angle t . Il en seroit de même si $a' = h' + im$. Au reste, ces deux cas sont susceptibles de remarques analogues à celle que nous avons faite à la fin de l'Art. LII.

LXVI. Comme les quantités m_1 & m_2 sont les racines d'une équation du second degré (Art. LX.) il peut arriver qu'elles soient égales ou imaginaires; ainsi il ne sera pas inutile de nous arrêter ici à discuter ces deux cas.

1.° Si $m_2 = m_1$, je fais $m_2 = m_1 + \omega$ (ω étant une quantité évanouissante) ce qui me donne $\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} =$

$$\frac{m_1 - k'}{\omega}, \frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} = \frac{m_1 - k'}{\omega} + 1, \frac{M + N b'}{m_1 - m_2} =$$

$\frac{M+Nb'}{b}$, $\text{cof. } (h + im_2)t \equiv \text{cof. } (h + im_1)t - it\omega$
 $\text{fin. } (h + im_1)t$, & $\text{fin. } (h + im_2)t \equiv \text{fin. } (h + im_1)t$
 $+ it\omega \text{ cof. } (h + im_1)t$; donc faisant ces substitutions
dans la formule (h) on aura, après avoir effacé ce qui
se détruit,

$$y = F \text{ cof. } (h + im_1)t + \frac{G}{b} \text{ fin. } (h + im_1)t$$

$$+ i \left[(m_1 - k') F + \frac{M+Nb'}{4b} F' \right] t \text{ fin. } (h + im_1)t$$

$$- i \left[\frac{m_1 - k'}{b} G + \frac{M+Nb'}{4bb'} G' \right] t \text{ cof. } (h + im_1)t$$

$$+ \odot.$$

Mais il faut bien remarquer que pour que cette équation ait lieu il faut que les valeurs de m soient égales rigoureusement, & sans rien négliger (*Voyés l'Artic. cité ci-dessus*).

2.° Si m_1 & m_2 sont imaginaires, enforte que $m_1 = \mu + \nu\sqrt{-1}$, & $m_2 = \mu - \nu\sqrt{-1}$; on aura $\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} = \frac{\mu - k'}{2\nu\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}$, $\frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} = \frac{\mu - k'}{2\nu\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}$, $\frac{M+Nb'}{m_1 - m_2} = \frac{M+Nb'}{2\nu\sqrt{-1}}$; ensuite on trouvera

$$\text{cof. } (h + im_1)t \equiv \text{cof. } (h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$+ \text{fin. } (h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\nu\sqrt{-1}},$$

$$\text{fin. } (h + im_1)t \equiv \text{fin. } (h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$- \text{cof. } (h + i\mu)t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\nu\sqrt{-1}}, \text{ \& de même}$$

$$\text{cof. } (h + i m_2) t \equiv \text{cof. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i \nu t} + e^{-i \nu t}}{2}$$

$$- \text{fin. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i \nu t} - e^{-i \nu t}}{2 \sqrt{-1}},$$

$$\text{fin. } (h + i m_2) t \equiv \text{fin. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i \nu t} + e^{-i \nu t}}{2}$$

$$+ \text{cof. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i \nu t} - e^{-i \nu t}}{2 \sqrt{-1}}.$$

Ces substitutions faites, on verra que les imaginaires se détruiront dans la formule (h), & qu'elle deviendra

$$y = \left\{ F \text{ cof. } (h + i \mu) t + \frac{G}{b} \text{ fin. } (h + i \mu) t \right\} \times \frac{e^{i \nu t} + e^{-i \nu t}}{2} \\ - \left\{ \left(\frac{\mu - k'}{\nu} F + \frac{M + N h'}{4 h \nu} F' \right) \text{ fin. } (h + i \mu) t - \left(\frac{\mu - k'}{h \nu} G \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{M + N h'}{4 h h' \nu} G' \right) \text{ cof. } (h + i \mu) t \right\} \times \frac{e^{i \nu t} - e^{-i \nu t}}{2} + \odot.$$

Ainsi dans le cas où l'équation (d) a ses deux racines imaginaires, la valeur de y contient nécessairement des exponentielles toutes réelles, & qui croissent à l'infini à mesure que t croit.

Application de la solution précédente à la Théorie de Jupiter & de Saturne.

LXVII. Soit I la masse du Soleil, J celle de Jupiter, r le rayon vecteur de l'orbite de cette planète projetée sur le plan de l'écliptique (plan que nous regarderons comme absolument fixe & immobile), φ l'angle décrit par le rayon r , pendant le tems t , & q la tangente de la latitude héliocentrique de Jupiter.

Soit de même J' la masse de Saturne, r' le rayon vecteur de son orbite réduit au plan de l'écliptique, φ' l'an-

gle décrit par ce rayon durant le même tems t , & q' la tangente de la latitude héliocentrique de Saturne.

Enfin soit la perpendiculaire menée du centre de Jupiter sur le plan de l'écliptique p , la perpendiculaire menée du centre de Saturne sur le même plan p' , la distance de Jupiter au Soleil, c'est-à-dire le rayon mené du Soleil à Jupiter u , la distance de Saturne au Soleil u' , & la distance de Jupiter à Saturne v , enforte que $p = r q$, $p' = r' q'$, $u = \sqrt{(r^2 + p^2)} = r \sqrt{(1 + q^2)}$, $u' = r' \sqrt{(1 + q'^2)}$, & $v = \sqrt{([r \sin. (\varphi - \varphi')]^2 + [r' - r \cos. (\varphi - \varphi')]^2 + (p - p')^2)} = \sqrt{(r^2(1 + q^2) - 2 r r' [\cos. (\varphi - \varphi') + q q'] + r'^2(1 + q'^2))}$, & supposant

$$R = J \left(\frac{r - r' \cos. (\varphi - \varphi')}{v^3} + \frac{r' \cos. (\varphi - \varphi')}{u'^3} \right),$$

$$Q = J \left(\frac{r'}{v^3} - \frac{r'}{u'^3} \right) r \sin. (\varphi - \varphi'),$$

$$P = J \left(\frac{p - p'}{v^3} + \frac{p'}{u'^3} \right),$$

$$R' = J \left(\frac{r' - r \cos. (\varphi' - \varphi)}{v^3} + \frac{r \cos. (\varphi' - \varphi)}{u^3} \right),$$

$$Q' = J \left(\frac{r}{v^3} - \frac{r}{u^3} \right) r' \sin. (\varphi' - \varphi),$$

$$P' = J \left(\frac{p' - p}{v^3} + \frac{p}{u^3} \right),$$

on aura les six équations suivantes (*Voy. Artt. XIV. & XVI. du Mém. intit. Application de la méthode précédente &c.*, imprimé dans le Vol. préc.)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r d\varphi^2}{dt^2} + (I + J) \frac{r}{u^3} + R = 0$$

$$\frac{d \cdot (r^2 d\Phi)}{dt^2} + Q = 0$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J) \frac{p}{u^2} + P = 0$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - \frac{r' d\Phi^2}{dt^2} + (I + J) \frac{r'}{u^2} + R' = 0$$

$$\frac{d \cdot (r'^2 d\Phi')}{dt^2} + Q' = 0$$

$$\frac{d^2 p'}{dt^2} + (I + J) \frac{p'}{u'^2} + P' = 0,$$

dont les trois premières représentent le mouvement de Jupiter dérangé par Saturne, & les trois autres celui de Saturne dérangé par Jupiter.

D'où l'on voit, que quand on aura calculé les dérangemens de Jupiter, les mêmes formules serviront à calculer ceux de Saturne, puisqu'il n'y aura qu'à changer r' , Φ' , p' , u' , & J' en r , Φ , p , u , & J , & *viceversa*.

LXVIII. Puisque $p = rq$, l'équation $\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J) \frac{p}{u^2} + P = 0$, deviendra (en divisant par r) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{2dqdr}{r dt^2} + q \frac{d^2 r}{r dt^2} + (I + J) \frac{q}{u^2} + \frac{P}{r} = 0$, & mettant au lieu de $\frac{d^2 r}{r dt^2}$ sa valeur tirée de la première équation, on aura après avoir effacé ce qui se détruit,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + q \frac{d\Phi^2}{dt^2} + \frac{2dqdr}{r dt^2} + \frac{P - Rq}{r} = 0.$$

Ensuite l'équation $\frac{d \cdot (r^2 d\Phi)}{dt^2} + Q = 0$ donnera $\frac{r^2 d\Phi}{dt} = c - \int Q dt$, c étant une constante arbitraire; d'où l'on tire $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{c - \int Q dt}{r^2}$.

Donc

Donc les équations du mouvement de Jupiter seront à cause de $u = r\sqrt{(1+q^2)}$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{(c - \int Q dt)^2}{r^3} + \frac{I+J}{r^2(1+q^2)^{\frac{1}{2}}} + R &= 0 \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + q \frac{(c - \int Q dt)^2}{r^3} + \frac{2dq dr}{r dt^2} + \frac{P - Rq}{r} &= 0 \\ \frac{d\phi}{dt} - \frac{c - \int Q dt}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\} (i)$$

LXIX. Les équations (i) donneront r , q , & ϕ en t ; d'où l'on connoitra le lieu de la planète à chaque instant. Si on vouloit de plus avoir l'orbite qu'elle décrit, on n'auroit qu'à éliminer le tems t au moyen de l'équation $\frac{d \cdot (r^2 d\phi)}{dt^2} + Q = 0$; laquelle étant multipliée par

$$2r^2 d\phi, \text{ \& ensuite intégrée donne } \left(\frac{r^2 d\phi}{dt}\right)^2 + 2 \int Q r^2 d\phi = C, \text{ (} C \text{ étant une constante arbitraire); d'où l'on tire}$$

$$dt = \frac{r^2 d\phi}{\sqrt{C - 2 \int Q r^2 d\phi}}.$$

Et cette valeur étant substituée dans les deux premières des équations (i), on aura, en prenant $d\phi$ constant au lieu de dt , & faisant $\frac{1}{r} = s$, $Rr^2 + Q \frac{dr}{d\phi} = U$, & $r^3 (P - Rq + Q \frac{dq}{r d\phi}) = V$, les équations suivantes

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} + s - \frac{(I+J)(1+q^2)^{-\frac{1}{2}} + U}{C - 2 \int Q r^2 d\phi} = 0$$

$$\frac{d^2 q}{d\phi^2} + q + \frac{V}{C - 2 \int Q r^2 d\phi} = 0.$$

LXX. Supposons que les forces perturbatrices R , Q , P soient nulles, enforte que l'orbite soit décrite en vertu

de la seule force $\frac{I+J}{u^2}$ tendante au centre du Soleil, & les équations que nous venons de trouver deviendront

$$\frac{d^2s}{d\phi^2} + s - \frac{I+J}{C(1+q^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \& \quad \frac{d^2q}{d\phi^2} + q = 0,$$

lesquelles étant intégrées donneront

$$q = \varepsilon \sin. (\phi - \alpha), \quad \& \quad s = \frac{I+J}{D} \sqrt{1+q^2} + \eta \cos. (\phi - \omega)$$

$\varepsilon, \alpha, \eta,$ & ω étant des constantes arbitraires, & $D = C(1 + \varepsilon^2)$.

La première de ces deux formules nous montre que l'orbite est toute dans un plan fixe passant par le centre des rayons r , & coupant ce plan de manière que ε soit la tangente de l'inclinaison, & α le lieu du nœud ascendant.

La seconde fait voir que l'orbite est une ellipse dont le foyer est dans le centre même des rayons vecteurs r ; & pour en déterminer l'espace & la position on considérera, que si on nomme Φ , & A les angles dont ϕ , & α sont les projections, on aura ($\Phi - A$ étant l'argument de latitude, & $\phi - \alpha$ sa projection) $\frac{\cos. (\phi - \alpha)}{\cos. (\Phi - A)} =$

$$\sqrt{1+q^2}, \quad \& \quad \frac{\sin. (\phi - \alpha)}{\sin. (\Phi - A)} = \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}; \quad \& \quad \text{par conséquent } \cos. (\phi - \alpha) = \sqrt{1+q^2} \times \cos. (\Phi - A)$$

$$\& \sin. (\phi - \alpha) = \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \times \sin. (\Phi - A); \quad \text{donc}$$

$$\cos. (\phi - \omega) = \cos. (\phi - \alpha + \alpha - \omega) = \cos. (\phi - \alpha) \times \cos. (\alpha - \omega) - \sin. (\phi - \alpha) \times \sin. (\alpha - \omega) =$$

$$\left[\cos. (\alpha - \omega) \times \cos. (\Phi - A) - \frac{\sin. (\alpha - \omega)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \sin. (\Phi - A) \right]$$

$$\sqrt{1+q^2}; \quad \& \quad \text{faisant, pour plus de simplicité, } \cos.$$

$$(\alpha - \omega) = E \cos. (A - B) \quad \& \quad \frac{\sin. (\alpha - \omega)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = E \sin.$$

(A - B), ce qui donne $E = \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon^2 \cos.(\alpha - \omega)^2}{1 + \varepsilon^2}\right)}$,

& $\text{tang.}(A - B) = \frac{\text{tang.}(\alpha - \omega)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$, on aura $\cos.(\Phi - \omega)$

$= E \cos.(\Phi - B) \chi \sqrt{1 + q^2}$; donc $\frac{s}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{I + J}{D} + \eta E \cos.(\Phi - B)$.

Or $s = \frac{1}{r}$, & $r \sqrt{1 + q^2} = u$ rayon vecteur de l'orbite réelle; donc l'équation de cette orbite sera

$$u = \frac{1}{\frac{I + J}{D} + \eta E \cos.(\Phi - B)},$$

laquelle est visiblement celle d'une ellipse dont $\frac{I + J}{D}$ est le

paramètre & ηE l'excentricité. A l'égard de la position du grand axe de cette ellipse, il est clair que $\Phi = B$ donnera le lieu du périhélie, & pour avoir l'angle correspondant φ , que nous nommerons β , on observera que

$\text{tang.}(\varphi - \alpha) = \frac{\text{tang.}(\Phi - A)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$; de sorte qu'on aura tang.

$$(\beta - \alpha) = \frac{\text{tang.}(B - A)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = \frac{\text{tang.}(\omega - \alpha)}{1 + \varepsilon^2}.$$

LXXI. Imaginons maintenant que l'effet des forces perturbatrices consiste à faire varier les quantités ε , α , η , & ω ; en sorte que l'orbite soit représentée par une ellipse qui change continuellement d'espace & de position; nous aurons donc

$$1.^\circ q = \varepsilon \sin.(\varphi - \alpha), \text{ \& } \frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon \cos.(\varphi - \alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$$

$\sin.(\varphi - \alpha) - \frac{d\alpha}{d\varphi} \varepsilon \cos.(\varphi - \alpha)$; or puisque on a deux indéterminées ε & α , dont l'une peut être tout ce qu'on

voudra, nous suppoferons $\sin. (\varphi - \alpha) d\epsilon = \epsilon \cos. (\varphi - \alpha) d\alpha$;
 ce qui donnera $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = \epsilon \cos. (\varphi - \alpha)$, de forte que la

variation instantanée de la latitude fera la même que si le
 plan de l'orbite ne changoit point de position. Donc
 $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -\epsilon \sin. (\varphi - \alpha) + \frac{d\epsilon}{d\varphi} \cos. (\varphi - \alpha) + \frac{d\alpha}{d\varphi} \epsilon$

$\sin. (\varphi - \alpha) =$ (en mettant, pour $d\epsilon$, $\frac{\epsilon \cos. (\varphi - \alpha) d\alpha}{\sin. (\varphi - \alpha)}$)
 $-\epsilon \sin. (\varphi - \alpha) + \frac{\epsilon d\alpha}{\sin. (\varphi - \alpha) d\varphi}$. Donc on aura au
 lieu de l'équation

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2 \int Q r^2 d\varphi} = 0,$$

ces deux-ci

$$\frac{\epsilon d\alpha}{\sin. (\varphi - \alpha) d\varphi} + \frac{V}{\frac{D}{1 + \epsilon^2} - 2 \int Q r^2 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} - \frac{d\alpha}{\text{tang.} (\varphi - \alpha)} = 0,$$

par lesquelles on connoitra le mouvement de la ligne des
 nœuds, & la variation de l'inclinaison de l'orbite.

2.° On aura $s = \frac{I+J}{D} \sqrt{(1+q^2)} + \eta \cos. (\varphi - \omega)$;

d'où l'on tire $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{qdq}{d\varphi \sqrt{(1+q^2)}} - \eta \sin. (\varphi - \omega)$

$+ \frac{d\eta}{d\varphi} \cos. (\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi} \eta \sin. (\varphi - \omega)$. Supposons

ici à l'imitation de ce que nous venons de faire plus
 haut, $\cos. (\varphi - \omega) d\eta = -\eta \sin. (\varphi - \omega) d\omega$, de ma-

nière que l'on ait simplement $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{qdq}{d\varphi \sqrt{(1+q^2)}} - \eta \sin. (\varphi - \omega)$, c'est-à-dire que la variation instan-

tanée du rayon $r = \frac{1}{s}$, soit la même que si l'ellipse demeurait constante, & différenciant cette valeur de $\frac{ds}{d\phi}$,

$$\text{on trouvera } \frac{d^2s}{d\phi^2} = \frac{I+J}{D} \left(\frac{dq^2 + q^2 d^2q}{d\phi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2 dq^2}{d\phi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$- \eta \operatorname{cof.}(\phi - \omega) - \frac{d\eta}{d\phi} \operatorname{fin.}(\phi - \omega) + \frac{d\omega}{d\phi} \eta \operatorname{cof.}(\phi - \omega);$$

$$\text{or } \frac{dq^2}{d\phi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2 dq^2}{d\phi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq^2}{d\phi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\left(\text{à cause de } \frac{dq^2}{d\phi^2} + q^2 = \varepsilon^2 \right) \frac{\varepsilon^2 - q^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 + \varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}}; \text{ de plus } \frac{d^2q}{d\phi^2} = -q - \frac{V}{C-2fQr^2 d\phi}, \text{ donc}$$

$$\frac{q^2 dq^2}{d\phi^2 \sqrt{(1+q^2)}} = -\frac{q^2}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C-2fQr^2 d\phi}$$

$$= -\sqrt{(1+q^2)} + \frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C-2fQr^2 d\phi};$$

$$\text{donc on aura (à cause de } d\eta = -\frac{\eta \operatorname{fin.}(\phi - \omega)}{\operatorname{cof.}(\phi - \omega)} d\omega) \frac{d^2s}{d\phi^2}$$

$$= \frac{I+J}{D} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{(1+q^2)} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C-2fQr^2 d\phi} \right)$$

$$- \eta \operatorname{cof.}(\phi - \omega) + \frac{\eta d\omega}{d\phi \operatorname{cof.}(\phi - \omega)}. \text{ De sorte que l'équation}$$

$$\frac{d^2s}{d\phi^2} + s = \frac{(I+J)(1+q^2)^{\frac{3}{2}} + V}{C-2fQr^2 d\phi} = 0$$

se changera en ces deux-ci

$$\frac{U + \frac{I+J}{D} \left(2 \frac{1+n}{(1+q)^2} \int Q r^2 d\phi + \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} V \right)}{\frac{n d\omega}{\cos(\phi-\omega) d\phi}} = \frac{\frac{D}{1+n} - 2 \int Q r^2 d\phi}{D} = 0$$

$$\frac{du}{n} + \text{tang.} (\phi - \omega) d\phi = 0;$$

lesquelles serviront à trouver η , & ω .

Au reste dès qu'on aura trouvé r , & q en ϕ , ou bien r , q , & ϕ en t , on pourra, si l'on veut, trouver tout de suite les valeurs de α , ε , ω , & η ; car les équations $q = \varepsilon \sin. (\phi - \alpha)$ & $\frac{dq}{d\phi} = \varepsilon \cos. (\phi - \alpha)$ donneront

$$\varepsilon = \sqrt{[q^2 + \left(\frac{dq}{d\phi}\right)^2]}, \quad \& \quad \text{tang.} (\phi - \alpha) = \frac{q d\phi}{dq}.$$

Et de même les équations $s = \frac{I+J}{D} \sqrt{1+q^2} + \eta \cos.$

$$(\phi - \omega), \quad \& \quad \frac{ds}{d\phi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q dq}{d\phi \sqrt{1+q^2}} - \eta \sin. (\phi - \omega),$$

donneront, en faisant pour abréger $S = \frac{I+J}{D} \sqrt{1+q^2}$
 $= u,$

$$\eta = \sqrt{[u^2 + \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2]}, \quad \& \quad \text{tang.} (\phi - \omega) = - \frac{du}{u d\phi}.$$

LXXII. Les observations nous apprennent que le mouvement de Jupiter autour du Soleil est à peu près circulaire & uniforme, & que le plan de son orbite ne fait qu'un très-petit angle avec celui de l'écliptique; d'où il s'en suit que si on nomme a la distance moyenne de Jupiter au Soleil, & h sa vitesse angulaire moyenne, on pourra supposer

$$r = a(1 + iy), \quad \phi = ht + ix, \quad q = iz,$$

y, x, z étant des quantités variables, & i un coefficient

très-petit ; où il faut remarquer que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme tout constant ; autrement a & h ne seroient plus les valeurs moyennes de r & de $\frac{d\phi}{dt}$ contre l'hypothèse.

Cela posé , si on fait ces substitutions dans les équations (i) de l'Art. LXVIII. , & qu'on divise la première par a , on aura, en poussant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre de i^3 ,

$$i \frac{a^2 y}{dt^2} - \frac{(c - \int Q dt)^2}{a^2} (1 - 3iy + 6i^2 y^2 - 10i^3 y^3) + \frac{I+J}{a^2} (1 - 2iy + 3i^2 y^2 - \frac{3}{2} i^2 \zeta^2 - 4i^3 y^3 + 3i^3 y \zeta^2) + \frac{R}{a} = 0,$$

$$i \frac{a^2 z}{dt^2} + i \frac{(c - \int Q dt)^2}{a^2} \zeta (1 - 4iy + 10i^2 y^2) + 2i^2 \left(\frac{dz dy}{dt^2} - iy \frac{dz dy}{dt^2} \right) + \frac{P - Rq}{r} = 0,$$

$$h + i \frac{dx}{dt} - \frac{c - \int Q dt}{a^2} (1 - 2iy + 3i^2 y^2 - 4i^3 y^3) = 0.$$

On voit d'abord par ces équations que les quantités $-\frac{(c - \int Q dt)^2}{a^2} + \frac{I+J}{a^2} + \frac{R}{a}$, $\frac{P - Rq}{r}$, & $h - \frac{c - \int Q dt}{a^2}$ doivent être chacune très-petites de l'ordre de i , pour que les hypothèses que nous avons faites puissent subsister.

Supposons donc

$$\left. \begin{aligned} \frac{c - \int Q dt}{a^2} &= h + iX \\ \frac{I+J}{a^2} + \frac{R}{a} &= h^2 + iY \\ \frac{P - Rq}{r} &= iZ, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (k)$$

& les équations précédentes étant divisées par i deviendront, en faisant $b = \frac{I+J}{a^3}$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (3h^2 - 2b)y + Y - 2hX$$

$$- i(6h^2 - 3b)y^2 - \frac{3}{2}ibz^2 + 6ihyX - iX^2$$

$$+ i^2(10h^2 - 4b)y^3 + 3i^2byz^2 - 12i^2hy^2X + 3i^2yX^2 = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + h^2z + Z$$

$$- 4ih^2zy + 2i\frac{dzdy}{dt^2} + 2ihzX$$

$$+ 10i^2h^2zy^2 - 2i^2\frac{dzdy}{dt^2}y - 8i^2hzyX + i^2zX^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + 2hy - X$$

$$- 3ihy^2 + 2iyX$$

$$+ 4i^2hy^3 - 3i^2y^2X = 0.$$

Si l'on nomme de même a' la distance moyenne de Saturne au Soleil, h' sa vitesse angulaire moyenne, & qu'on suppose

$$r = a'(1 + iy'), \quad \phi = h't + ix', \quad q = iz',$$

on aura les mêmes équations que ci-devant, en marquant seulement les lettres d'un trait.

LXXIII. Il faut maintenant faire les mêmes substitutions dans les valeurs de P , Q , R , & premièrement dans celle de $\frac{1}{v}$ qui entre dans la valeur de ces quantités, mais pour rendre le calcul plus simple nous n'aurons égard dans cette opération qu'aux termes de l'ordre de i ; une plus grande précision étant d'ailleurs inutile dans la présente Recherche.

Mettons d'abord $a'(1 + iy')$ à la place de r , & $a'(1 + iy')$ à la place de r' , & nous aurons, en négli-

négligeant les termes q^2 , qq' , & q'^2 qui seroient du second ordre, & faisant pour plus de simplicité $\phi - \phi' = \theta$,

$$v = \sqrt{[a^2(1 + 2iy) - 2aa'(1 + iy + iy') \cos. \theta + a'^2(1 + 2iy')]}, \text{ savoir}$$

$$v = \sqrt{[a^2 - 2aa' \cos. \theta + a'^2 + 2i(a^2y + a'^2y') - 2iaa'(y + y') \cos. \theta]},$$

d'où l'on tire par les séries

$$\frac{1}{v^3} = [a^2 - 2aa' \cos. \theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$- 3i[a^2y + a'^2y' - aa'(y + y') \cos. \theta] \times [a^2 - 2aa' \cos. \theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}.$$

Or les quantités $[a^2 - 2aa' \cos. \theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}}$ & $[a^2 - 2aa' \cos. \theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}$ étant irrationnelles, il est nécessaire de les réduire à une forme rationnelle, sans quoi l'intégration des équations proposées ne réussiroit point.

Pour cela je remarque qu'en faisant $a' = \alpha a$, la question se réduit à changer en une fonction rationnelle une quantité de cette forme $(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s}$, dans laquelle α est une fraction moindre que l'unité. Or puisque $1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2 = [1 - \alpha(\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1})] \times [1 - \alpha(\cos. \theta - \sin. \theta \sqrt{-1})]$, on élèvera la quantité $1 - \alpha(\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1})$ à la puissance $-s$; ce qui donnera, à cause de $(\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1})^m = \cos. m\theta \pm \sin. m\theta \sqrt{-1}$,

$$[1 - \alpha(\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1})]^{-s} = 1 + s\alpha(\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}) + \frac{s(s+1)}{2} \alpha^2(\cos. 2\theta \pm \sin. 2\theta \sqrt{-1})$$

$$+ \frac{s(s+1)(s+2)}{2 \cdot 3} \alpha^3(\cos. 3\theta \pm \sin. 3\theta \sqrt{-1}) + \&c.$$

De sorte que si l'on fait

$$P = 1 + s \alpha \operatorname{cof.} \theta + \frac{s(s+1)}{2} \alpha^2 \operatorname{cof.} 2 \theta \\ + \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3} \alpha^3 \operatorname{cof.} 3 \theta + \&c.$$

$$Q = s \alpha \operatorname{fin.} \theta + \frac{s(s+1)}{2} \alpha^2 \operatorname{fin.} 2 \theta \\ + \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3} \alpha^3 \operatorname{fin.} 3 \theta + \&c.$$

on aura

$$[1 - \alpha (\operatorname{cof.} \theta + \operatorname{fin.} \theta \sqrt{-1})]^{-s} = P + Q \sqrt{-1}, \&c$$

$$[1 - \alpha (\operatorname{cof.} \theta - \operatorname{fin.} \theta \sqrt{-1})]^{-s} = P - Q \sqrt{-1}.$$

$$\text{Donc } (1 - 2\alpha \operatorname{cof.} \theta + \alpha^2)^{-s} = P^2 + Q^2.$$

Or si on fait les carrés des deux séries P & Q , & qu'on ajoute ensemble les termes qui auront le même coé-
ficient, en faisant attention que $\operatorname{cof.} m \theta \times \operatorname{cof.} n \theta +$
 $\operatorname{fin.} m \theta \times \operatorname{fin.} n \theta = \operatorname{cof.} (m - n) \theta$, on trouvera
 $(1 - 2\alpha \operatorname{cof.} \theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \operatorname{cof.} \theta + C \operatorname{cof.} 2 \theta$
 $+ D \operatorname{cof.} 3 \theta + \&c.$

les coéfiens A , B , C &c. étant exprimés de la ma-
nière suivante

$$A = 1 + s^2 \alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\right)^2 \alpha^6 \\ + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = s \alpha + s \times \frac{s(s+1)}{2} \alpha^3 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3} \alpha^5 \\ + \&c.$$

$$\frac{C}{2} = \frac{s(s+1)}{2} \alpha^2 + s \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3} \alpha^4 + \frac{s(s+1)}{2} \\ \times \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{2.3.4} \alpha^6 + \&c.,$$

& ainsi de suite.

Au reste quand on aura déterminé par ces séries les
deux premiers coéfiens A & B , on trouvera tous les
suivans d'une manière très-simple & très-facile; car si on
prend les différentielles logarithmiques de l'équation

$(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta + \&c.$
 & qu'après avoir multiplié les deux membres en croix, on compare terme à terme, on aura, comme M. Euler l'a trouvé le premier dans ses *Recherches sur le mouvement de Saturne*,

$$C = \frac{(1 + \alpha^2)B - 2s\alpha A}{(2-s)\alpha}$$

$$D = \frac{2(1 + \alpha^2)C - (1+s)\alpha B}{(3-s)\alpha}$$

$$E = \frac{3(1 + \alpha^2)D - (2+s)\alpha C}{(4-s)\alpha}$$

&c.

Connoissant ainsi tous les coefficients de la série qui représente $(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s}$, on trouvera tout de suite ceux de la série qui exprime $(1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2)^{-s-1}$; car dénotant ces derniers par P, Q, R &c. il faudra que la série $P + Q \cos. \theta + R \cos. 2\theta + \&c.$ étant multipliée par $1 - 2\alpha \cos. \theta + \alpha^2$ devienne égale à la série $A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta + \&c.$ La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes, $A = (1 + \alpha^2)P - \alpha Q$, & $B = (1 + \alpha^2)Q - 2\alpha P - \alpha R$. Or R est donné en P & Q de la même manière que C est donné en A & B, de sorte qu'on aura, en mettant $s + 1$ à la place de s ,

$$R = \frac{(1 + \alpha^2)Q - 2(s+1)\alpha P}{(1-s)\alpha}$$

Donc substituant cette valeur de R on aura deux équations en A, B, P, & Q, d'où l'on tirera

$$P = \frac{(1 + \alpha^2)A + \frac{s-1}{s}\alpha B}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$Q = \frac{\frac{s-1}{s}(1 + \alpha^2)B + 4\alpha A}{(1-\alpha^2)^2}$$

Ensuite on aura

$$S = \frac{2(1 + \alpha^2)R - (2 + s)\alpha Q}{(2 - s)\alpha}$$

$$T = \frac{3(1 + \alpha^4)S - (3 + s)\alpha R}{(3 - s)\alpha}$$

&c.

Tout se réduit donc à trouver les valeurs de A & de B, lorsque $s = \frac{3}{2}$; or les séries ci-dessus donnent pour ce cas

$$A = 1 + \frac{9}{4}\alpha^2 + \frac{9 \cdot 25}{4 \cdot 16}\alpha^4 + \frac{9 \cdot 25 \cdot 49}{4 \cdot 16 \cdot 36}\alpha^6 + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 4}\alpha^3 + \frac{9 \cdot 25 \cdot 7}{4 \cdot 16 \cdot 6}\alpha^5 + \&c.$$

lesquelles, à cause de $\alpha = \frac{5}{9}$ environ, dans la théorie de Jupiter & de Saturne, seront assés convergentes pour qu'on puisse se contenter d'un petit nombre de termes.

Pour faciliter le calcul de ces deux séries, lesquelles peuvent aussi être d'usage dans plusieurs autres occasions, je vais donner ici les logarithmes des différentes puissances de α qui entrent dans les valeurs de A & de $\frac{B}{2}$.

<i>log. des</i> <i>coëfficiens</i>		<i>log. des</i> <i>coëfficiens</i>		<i>log. des</i> <i>coëfficiens</i>	
α	0.1760913	α^2	0.3521825	α^3	0.4490925
α^4	0.5460025	α^5	0.6129493	α^6	0.6798961
α^7	0.7310486	α^8	0.7822012	α^9	0.8235939
α^{10}	0.8649865	α^{11}	0.8997486	α^{12}	0.9345108
α^{13}	0.9644740	α^{14}	0.9944372	α^{15}	1.0207661

<i>log. des</i> <i>coëfficiens</i>		<i>log. des</i> <i>coëfficiens</i>		<i>log. des</i> <i>coëfficiens</i>	
α^{16}	1.0470951	α^{17}	1.0705762	α^{18}	1.0940573
α^{19}	1.1152466	α^{20}	1.1364359	α^{21}	1.1557410
α^{22}	1.1750462	α^{23}	1.1927749	α^{24}	1.2105037
α^{25}	1.2268941	α^{26}	1.2432845	α^{27}	1.2585245
α^{28}	1.2737645	α^{29}	1.2880049	α^{30}	1.3022454
α^{31}	1.3156093	α^{32}	1.3289733	α^{33}	1.3415624
α^{34}	1.3541515	α^{35}	1.3660508	α^{36}	1.3779500
α^{37}	1.3892310	α^{38}	1.4005120	α^{39}	1.4112359
α^{40}	1.4219598	&c.	&c.	&c.	&c.

En examinant cette table il est aisé de voir que les différences des logarithmes forment une progression décroissante ; d'où il s'ensuit que , si après avoir pris la somme d'un nombre quelconque de termes de l'une ou de l'autre série , on en regarde le reste comme une progression géométrique, l'erreur sera toujours moindre que la somme de cette progression ; ainsi il sera aisé de juger de la quantité de l'approximation.

LXXIV. Supposons donc

$$(a^2 - 2 a a' \cos. \theta + a'^2)^{-\frac{1}{2}} = A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2 \theta + D_1 \cos. 3 \theta + \&c. \quad \&$$

$$(a^2 - 2 a a' \cos. \theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = P_1 + Q_1 \cos. \theta + R_1 \cos. 2 \theta + S_1 \cos. 3 \theta + \&c. \quad \&$$

& nous aurons

$$\frac{1}{v^3} = A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2\theta + D_1 \cos. 3\theta + \&c.$$

$$- 3iy \left\{ a^2 P_1 - a a' \frac{Q_1}{2} + (a^2 Q_1 - a a' P_1 - a a' \frac{R_1}{2}) \cos. \theta + (a^2 R_1 - a a' \frac{Q_1 + S_1}{2}) \cos. 2\theta + \&c. \right\}$$

$$- 3iy' \left\{ a'^2 P_1 - a a' \frac{Q_1}{2} + (a'^2 Q_1 - a a' P_1 - a a' \frac{R_1}{2}) \cos. \theta + (a'^2 R_1 - a a' \frac{Q_1 + S_1}{2}) \cos. 2\theta + \&c. \right\}$$

ou bien, en faisant pour abreger,

$$P_2 = 3 (a a' \frac{Q_1}{2} - a^2 P_1)$$

$$Q_2 = 3 (a a' \frac{2P_1 + R_1}{2} - a^2 Q_1)$$

$$R_2 = 3 (a a' \frac{Q_1 + S_1}{2} - a^2 R_1)$$

$$S_2 = 3 (a a' \frac{R_1 + T_1}{2} - a^2 S_1)$$

&c.

$$P_3 = 3 (a a' \frac{Q_1}{2} - a'^2 P_1)$$

$$Q_3 = 3 (a a' \frac{2P_1 + R_1}{2} - a'^2 Q_1)$$

$$R_3 = 3 (a a' \frac{Q_1 + S_1}{2} - a'^2 R_1)$$

$$S_3 = 3 (a a' \frac{R_1 + T_1}{2} - a'^2 S_1)$$

&c.

$$\frac{1}{v^3} = A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2\theta + D_1 \cos. 3\theta + \&c.$$

$$+ iy (P_2 + Q_2 \cos. \theta + R_2 \cos. 2\theta + S_2 \cos. 3\theta + \&c.)$$

$$+ iy' (P_3 + Q_3 \cos. \theta + R_3 \cos. 2\theta + S_3 \cos. 3\theta + \&c.)$$

LXXV. Cela posé, on aura d'abord

$$\begin{aligned} \frac{r}{v^3} &= a (A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2\theta + D_1 \cos. 3\theta + \&c.) \\ &+ iya [A_1 + P_2 + (B_1 + Q_2) \cos. \theta + (C_1 + R_2) \cos. 2\theta \\ &+ (D_1 + S_2) \cos. 3\theta + \&c.] \\ &+ iy'a (P_3 + Q_3 \cos. \theta + R_3 \cos. 2\theta + S_3 \cos. 3\theta + \&c.) \\ &\text{Et de même} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r'}{v^3} &= a' (A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2\theta + D_1 \cos. 3\theta + \&c.) \\ &+ iy a' (P_2 + Q_2 \cos. \theta + R_2 \cos. 2\theta + S_2 \cos. 3\theta + \&c.) \\ &+ iy' a' [A_1 + P_3 + (B_1 + Q_3) \cos. \theta + (C_1 + R_3) \cos. 2\theta \\ &+ (D_1 + S_3) \cos. 3\theta + \&c.] \end{aligned}$$

Donc multipliant cette dernière quantité par $\cos. \theta$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{r'}{v^3} \cos. \theta &= a' \left[\frac{B_1}{2} + \left(A_1 + \frac{C_1}{2} \right) \cos. \theta + \frac{B_1 + D_1}{2} \cos. 2\theta \right. \\ &+ \&c.] \\ &+ iy a' \left[\frac{Q_2}{2} + \left(P_2 + \frac{R_2}{2} \right) \cos. \theta + \frac{Q_2 + S_2}{2} \cos. 2\theta \right. \\ &+ \&c.] \\ &+ iy' a' \left[\frac{B_1 + Q_3}{2} + \left(A_1 + P_3 + \frac{C_1 + R_3}{2} \right) \cos. \theta \right. \\ &+ \left. \frac{B_1 + Q_3 + D_1 + S_3}{2} \cos. 2\theta + \&c. \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{r'}{v^3} = \frac{1}{r^2 (1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = (\text{en négligeant les termes}$$

de l'ordre de i^2) $\frac{1 - 2iy'}{a^2}$, & par conséquent

$$\frac{r'}{v^3} \cos. \theta = \frac{1}{a^2} \cos. \theta - 2iy' \frac{1}{a^2} \cos. \theta.$$

Donc si on fait

$$A_2 = a^3 A_1 - a^2 a' \frac{B_1}{2}$$

$$B_2 = a^3 B_1 - a^2 a' \frac{2A_1 + C_1}{2} + \frac{a^2}{a^2}$$

$$C_2 = a^3 C_1 - a^2 a' \frac{B_1 + D_1}{2}$$

$$D_2 = a^3 D_1 - a^2 a' \frac{C_1 + E_1}{2}$$

&c.

$$P_4 = a^3 (A_1 + P_2) - a^2 a' \frac{Q_2}{2}$$

$$Q_4 = a^3 (B_1 + Q_2) - a^2 a' \frac{2P_2 + R_2}{2}$$

$$R_4 = a^3 (C_1 + R_2) - a^2 a' \frac{Q_2 + S_2}{2}$$

$$S_4 = a^3 (D_1 + S_2) - a^2 a' \frac{R_2 + T_2}{2}$$

&c.

$$P_5 = a^3 P_3 - a^2 a' \left(\frac{B_1}{2} + \frac{Q_3}{2} \right)$$

$$Q_5 = a^3 Q_3 - a^2 a' \left(\frac{2A_1 + C_1}{2} + \frac{2P_3 + R_3}{2} \right) - \frac{2a^2}{a^2}$$

$$R_5 = a^3 R_3 - a^2 a' \left(\frac{B_1 + D_1}{2} + \frac{Q_3 + S_3}{2} \right)$$

$$S_5 = a^3 S_3 - a^2 a' \left(\frac{C_1 + E_1}{2} + \frac{R_3 + T_3}{2} \right)$$

&c.

on aura (*Art. LXVII.*)

$$R = \frac{J'}{a^2} (A_2 + B_2 \cos. \theta + C_2 \cos. 2\theta + D_2 \cos. 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a^2} y (P_4 + Q_4 \cos. \theta + R_4 \cos. 2\theta + S_4 \cos. 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a^2} y' (P_5 + Q_5 \cos. \theta + R_5 \cos. 2\theta + S_5 \cos. 3\theta + \&c.)$$

Maintenant on aura

$\frac{J'}{a^2}$ fin.

$$\begin{aligned} \frac{r'}{v^3} \sin. \theta &= a' \left[\left(A_1 - \frac{C_1}{2} \right) \sin. \theta + \frac{B_1 - D_1}{2} \sin. 2 \theta + \&c. \right] \\ + iy a' &\left[\left(P_2 - \frac{R_2}{2} \sin. \theta + \frac{Q_2 - S_2}{2} \sin. 2 \theta + \&c. \right) \right] \\ + iy' a' &\left[\left(A_1 + P_3 - \frac{C_1 + R_3}{2} \sin. \theta + \left(\frac{B_1 + Q_3}{2} - \frac{D_1 + S_3}{2} \right) \sin. 2 \theta + \&c. \right) \right] \& \end{aligned}$$

$$\frac{r'}{u^3} \sin. \theta = \frac{1}{a^2} \sin. \theta - 2 iy' \frac{1}{a^2} \sin. \theta.$$

Donc si on multiplie ces deux quantités par $r = a(i + iy)$,
& qu'on fasse

$$A_3 = a^2 a' \frac{2A_1 - C_1}{2} - \frac{a^2}{a^2}$$

$$B_3 = a^2 a' \frac{B_1 - D_1}{2}$$

$$C_3 = a^2 a' \frac{C_1 - E_1}{2}$$

&c.

$$P_6 = a^2 a' \left(\frac{2A_1 - C_1}{2} + \frac{2P_2 - R_2}{2} \right) - \frac{a^2}{a^2}$$

$$Q_6 = a^2 a' \left(\frac{B_1 - D_1}{2} + \frac{Q_2 - S_2}{2} \right)$$

$$R_6 = a^2 a' \left(\frac{C_1 - E_1}{2} + \frac{R_2 - T_2}{2} \right)$$

&c.

$$P_7 = a^2 a' \left(\frac{2A_1 - C_1}{2} + \frac{2P_3 - R_3}{2} \right) + \frac{2a^2}{a^2}$$

$$Q_7 = a^2 a' \left(\frac{B_1 - D_1}{2} + \frac{Q_3 - S_3}{2} \right)$$

$$R_7 = a^2 a' \left(\frac{C_1 - E_1}{2} + \frac{R_3 - T_3}{2} \right)$$

&c.

on aura (*Art. cité*)

Miscel. TOM. III.

u u

$$Q = \frac{J'}{a} (A_3 \sin. \theta + B_3 \sin. 2\theta + C_3 \sin. 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a} y (P_6 \sin. \theta + Q_6 \sin. 2\theta + R_6 \sin. 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a} y' (P_7 \sin. \theta + Q_7 \sin. 2\theta + R_7 \sin. 3\theta + \&c.)$$

Enfin on a $\frac{p-p'}{v^2} = i (\zeta \frac{r}{v} - \zeta' \frac{r'}{v'})$ & $\frac{p'}{u^2} = i \zeta' \frac{1}{r'^2(1+q^2)}$;

d'où, en négligeant les termes de l'ordre de i^2 , on aura

$$P = i J' [(\zeta a - \zeta' a') (A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2\theta + \&c.) + \frac{z'}{a^2}].$$

De sorte que si on fait

$$A_4 = a^3 A_1 - A_2$$

$$B_4 = a^3 B_1 - B_2$$

$$C_4 = a^3 C_1 - C_2$$

&c.

$$A_5 = \frac{a^2}{a^2} - a^2 a' A_1$$

$$B_5 = - a^2 a' B_1$$

$$(C_5 = - a^2 a' C_1)$$

&c.

on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$\frac{P-Rq}{r}$$

$$= i \frac{J'}{a^2} \zeta (A_4 + B_4 \cos. \theta + C_4 \cos. 2\theta + D_4 \cos. 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a^2} \zeta' (A_5 + B_5 \cos. \theta + C_5 \cos. 2\theta + D_5 \cos. 3\theta + \&c.)$$

Et il ne restera plus, pour achever les substitutions, qu'à mettre au lieu de θ , c'est-à-dire au lieu de $\varphi - \varphi'$ sa valeur $(h - h')t + i(x - x')$, ou bien, (en faisant $h - h' = H$) $Ht + i(x - x')$, ce qui est très-facile; car il

n'y aura qu'à mettre partout dans les expressions précédentes, Ht , à la place de θ , & ajouter ensuite à la valeur de R la quantité

$$-i \frac{J}{a^2} (x-x') \times (B_2 \sin. Ht + {}_2C_2 \sin. {}_2Ht + {}_3D_2 \sin. {}_3Ht + \&c.)$$

& à celle de Q la quantité

$$i \frac{J'}{a} (x-x') \times (A_3 \cos. Ht + {}_2B_3 \cos. {}_2Ht + {}_3C_3 \cos. {}_3Ht + \&c.).$$

LXXVI. On fait que les masses de Jupiter & de Saturne sont très-petites, par rapport à celle du Soleil, en sorte qu'on ne peut supposer $\frac{J}{I} = im$ & $\frac{J'}{I} = im'$; donc

puisque $b = \frac{I+J}{a^2}$ (Art. LXXII.) on aura $J' = i \frac{m'}{1+im} a^2 b$

où, faisant $\frac{m'}{1+im} b = n$, $J' = i a^2 n$; d'où il s'ensuit

que les quantités P , Q , R sont très-petites de l'ordre de i , & qu'ainsi pour satisfaire aux équations (k) de

l'Art. cité, il est nécessaire de supposer $\frac{e}{a^2}$ presque égal à

$$h, \& \frac{I+J}{a^2}, \text{ ou bien } b \text{ presque égal à } h^2.$$

Soit donc $\frac{e}{a^2} - h = if$ & $b - h^2 = ig$, & les équations

(k) donneront, après avoir substitué les valeurs de

R , Q , & $\frac{P-Rq}{r}$ trouvées ci-dessus, & divisé le tout par i ,

$$X = f + \frac{n}{H} (A_3 \cos. Ht + \frac{1}{2} B_3 \cos. {}_2Ht + \&c.)$$

$$- i n \int y (P_6 \sin. Ht + Q_6 \sin. {}_2Ht + \&c.) dt$$

$$+ i n \int y' (P_7 \sin. Ht + Q_7 \sin. {}_2Ht + \&c.) dt$$

$$+ i n \int (x-x') \times (A_3 \cos. Ht + B_3 \cos. {}_2Ht + \&c.) dt,$$

$$\begin{aligned}
 Y &= g + n (A_2 + B_2 \cos. Ht + C_2 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
 &\quad + in y (P_4 + Q_4 \cos. Ht + R_4 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
 &\quad + in y' (P_5 + Q_5 \cos. Ht + R_5 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
 &\quad - in (x - x') \chi (B_2 \sin. Ht + C_2 \sin. 2 Ht + \&c.), \\
 Z &= in \zeta (A_4 + B_4 \cos. Ht + C_4 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
 &\quad + in \zeta' (A_5 + B_5 \cos. Ht + C_5 \cos. 2 Ht + \&c.).
 \end{aligned}$$

LXXVII. Ayant ainsi les valeurs de X , Y , & Z , il ne s'agira plus que de les substituer dans les équations de l'Art. LXXII. Or si on met $h^2 + ig$ au lieu de b , qu'on néglige les quantités affectées de $i^2 n$ & de in^2 (parceque n est aussi une quantité fort petite comme on le verra plus bas), & qu'après avoir ajouté ensemble les coefficients des termes analogues on fasse

$$A_6 = B_2 - \frac{2(b + if)}{H} A_3$$

$$B_6 = C_2 - \frac{2(b + if)}{2H} B_3$$

&c.

$$A_7 = B_4 + \frac{2b}{H} A_3$$

$$B_7 = C_4 + \frac{2b}{2H} B_3$$

&c.

$$P_8 = Q_4 + \frac{6b}{H} A_3$$

$$Q_8 = R_4 + \frac{6b}{2H} B_3$$

&c.

& ensuite

$$\begin{aligned}
 \Phi &= A_6 \cos. Ht + B_6 \cos. 2 Ht + \&c. \\
 &\quad + iy (P_8 \cos. Ht + Q_8 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
 &\quad + iy' (P_5 + Q_5 \cos. Ht + R_5 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
 &\quad + 2ihfsy (P_6 \sin. Ht + Q_6 \sin. 2 Ht + \&c.) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 i h f y' (P_7 \sin. Ht + Q_7 \sin. 2 Ht + \&c.) dt \\
& - i (x - x') \times (B_2 \sin. Ht + C_2 \sin. 2 Ht + \&c.) \\
& + 2 i h f (x - x') \times (A_3 \cos. Ht + B_3 \cos. 2 Ht + \&c.) dt, \\
\psi & = \zeta (A_7 \cos. Ht + B_7 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
& + \zeta' (A_5 + B_5 \cos. Ht + C_5 \cos. 2 Ht + \&c.) \\
\Xi & = - \frac{1}{H} (A_3 \cos. Ht + \frac{B_3}{2} \cos. 2 Ht + \&c.) \\
& + \frac{2i}{H} y (A_3 \cos. Ht + \frac{B_3}{2} \cos. 2 Ht + \&c.) \\
& + i f y (P_6 \sin. Ht + Q_6 \sin. 2 Ht + \&c.) dt \\
& + i f y' (P_7 \sin. Ht + Q_7 \sin. 2 Ht + \&c.) dt \\
& + i f (x - x') \times (A_3 \cos. Ht + B_3 \cos. 2 Ht + \&c.) dt,
\end{aligned}$$

on aura les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g + 3if^2 + nP_4)]y + g \\
- 2hf - if^2 + nA_2 - 3i[h^2 + i(4hf - g)]y^2 \\
- \frac{3}{2} i(h^2 + ig)\zeta^2 + 6i^2 h^2 y^3 + 3i^2 h^2 y \zeta^2 + \\
n\Phi = 0 \dots \dots \dots (l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dt^2} + [h^2 + i(2hf + if^2 + nA_4)]\zeta - 4i(h^2 + \\
2ihf)\zeta y + 2i \frac{dz dy}{dt^2} + 10i^2 h^2 \zeta y^3 - 2i^2 y \frac{dz dy}{dt^2} + \\
in\psi = 0 \dots \dots \dots (m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} + 2(h + if)y - f - 3i(h + if)y^2 + 4i^2 h y^3 + \\
n\Xi = 0 \dots \dots \dots (n)
\end{aligned}$$

Telles sont les équations du mouvement de Jupiter, en tant qu'il est altéré par l'action de Saturne.

On trouvera des équations semblables pour le mouvement de Saturne dérangé par Jupiter ; il ne faudra pour cela que mettre y', z', x' à la place de x, y, z & viceversa, & marquer toutes les autres lettres d'un trait, à l'except

tion de H , laquelle étant $= h - h'$, deviendra $h' - h$, c'est-à-dire simplement négative.

LXXVIII. Je remarque maintenant que les équations (l) & (m) peuvent se réduire à cette forme plus simple
 $\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + n Y = 0$, & $\frac{d^2 z}{dt^2} + L^2 z + i n Z = 0$,
 en supposant

$$y = y + \alpha + i(\beta y^2 + \gamma \zeta^2) + i^2(\delta y^3 + \varepsilon y \zeta^2 + \eta \zeta \frac{dy dz}{dt^2}), \quad \&$$

$$z = \zeta + i(\mu \zeta y + \nu \frac{dz dy}{dt^2}) + i^2(\pi \zeta^3 + \rho \zeta y^2 + \sigma y \frac{dz dy}{dt^2}).$$

Pour le prouver, & déterminer en même tems les valeurs de α, β, γ &c. μ, ν, π &c., je prends d'abord les différentielles secondes de y & de z , j'ai

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 y}{dt^2} + i\beta(2y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy^2}{dt^2}) + i\gamma(2\zeta \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz^2}{dt^2}) + i^2\delta(3y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}) + i^2\varepsilon(\zeta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta y \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &+ 2y \frac{dz^2}{dt^2} + 4\zeta \frac{dy dz}{dt^2}) + i^2\eta(2 \frac{dz^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy dz}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &+ \zeta \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \zeta \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\zeta \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2 z}{dt^2} + i\mu(y \frac{d^2 z}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dz dy}{dt^2}) + i\nu(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &+ \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}) + i^2\pi(3\zeta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 6\zeta \frac{dz^2}{dt^2}) \\ &+ i^2\rho(y^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\zeta y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy^2}{dt^2} + 4y \frac{dz dy}{dt^2}) + \\ &i^2\sigma(2 \frac{dy^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + 3 \frac{dz dy}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + y \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \\ &+ 2y \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}). \end{aligned}$$

Ensuite je substitue à la place de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$, $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations (1) & (m), en négligeant les quantités qui seroient affectés de i^3 , ou de $i^2 n$; & pour avoir les valeurs de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ (car les autres se déduisent aisément des équations citées) je multiplie l'équation (1) par $2 dy$, & l'équation (m) par $2 dz$, & ensuite je les intègre; ce qui me donne (en négligeant les quantités de l'ordre de i^2 & de in , parce que $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ ne se trouvent que dans des termes déjà affectés de i)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2(g - 2hf - if^2 + nA_2) + A - 2ih^2y^3 - 3ih^2fz^2dy + 2n\int\Phi dy = 0,$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + (h^2 + 2ihf)z^2 + B - 8ih^2fyzdz + 4i\int\frac{dz^2}{dt^2}dy + 2in\int\Psi dz = 0,$$

A , & B étant des constantes.

(Je conserve exprés le terme $2in\int\Psi dz$ parce que la quantité Ψ contient un terme de cette forme B_5z' col. Ht , lequel étant multiplié par dz , & ensuite intégré, après avoir substitué les valeurs de z & de z' en t , se trouvera divisé par des quantités de l'ordre de i).

Or l'équation (m) donne, en rejetant tous les termes affectés de i , $\frac{d^3z}{dt^3} + h^2z = 0$; & par conséquent

$$\int z \frac{d^3z}{dt^3} dy + h^2 \int z^2 dy = 0; \text{ mais } \int z \frac{d^3z}{dt^3} dy = z \frac{dy dz}{dt^2}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \left(\frac{dz^2}{dt^2} dy + z \frac{dy}{dt} dz \right) = \text{(en mettant au lieu de} \\
& \frac{dz^2}{dt^2} \text{ \& de } \frac{dy}{dt} \text{ leurs valeurs approchées } - h^2 z^2 - B \text{ \&} \\
& - h^2 y - g + 2 h f, \text{ car on peut négliger ici tous les} \\
& \text{termes affectés de } i \text{ \& de } n) z \frac{dy dz}{dt^2} + h^2 \int z^2 dy + B y \\
& + h^2 \int y z dz + \frac{g - 2 h f}{2} z^2 = \text{(à cause de } \int y z dz = \\
& \frac{1}{2} y z^2 - \frac{1}{2} \int z^2 dy) z \frac{dy dz}{dt^2} + \frac{h^2}{2} \int z^2 dy + B y + \frac{h^2}{2} y z^2 \\
& + \frac{g - 2 h f}{2} z^2. \text{ Donc on aura } \frac{3}{2} h^2 \int z^2 dy + \frac{h^2}{2} y z^2 + \\
& z \frac{dy dz}{dt^2} + B y + \frac{g - 2 h f}{2} z^2 = 0; \text{ d'où l'on tire } \int z^2 dy \\
& = - \frac{1}{3} y z^2 - \frac{2}{3 h^2} z \frac{dy dz}{dt^2} - \frac{2 B}{3 h^2} y - \frac{g - 2 h f}{3 h^2} z^2.
\end{aligned}$$

Donc si on met cette valeur dans la première des deux équations ci-dessus, & qu'on substitue dans la seconde à la place de $\int \frac{dz^2}{dt^2} dy$, $- h^2 \int z^2 dy - B y$, & à la place de $\int \Psi dz$, $B \int \text{ cof. } H t z' dz$, on aura après les réductions

$$\begin{aligned}
& \frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6 h f - 2 g)] y^2 + 2 [g - 2 h f - \\
& i(f^2 - B) + n A_2] y + A + i(g - 2 h f) z^2 - \\
& 2 i h^2 y^3 + i h^2 y z^2 + 2 i z \frac{dy dz}{dt^2} + 2 n \int \Phi dy = 0 \quad (o) \\
& \frac{dz^2}{dt^2} + [h^2 + 2 i h f] z^2 + B - 4 i B y - 4 i h^2 y z^2 \\
& + 2 i n B \int \text{ cof. } H t z' dz = 0 \dots \dots \dots (p)
\end{aligned}$$

Ces substitutions faites, on trouvera, en ordonnant les termes

$$\frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{d t^2} = & [- h^2 - i(6 h f - 2 g + 3 i f^2 + n P_4) \\
& - 6 i \beta (g - 2 h f - i f^2 + \frac{2}{3} i B + n A_2) + 8 i^2 \gamma B \\
& - 6 i^2 \delta A - 2 i^2 \varepsilon B + 2 i^2 \eta h^2 B] y \\
& - (g - 2 h f - i f^2 + n A_2) - 2 i \beta A - 2 i \gamma B \\
& + 2 i^2 \eta (g - 2 h f) B \\
& + [3 i h^2 + 3 i^2 (4 h f - g) - 4 i \beta (h^2 + i(6 h f - g)) - 15 i^2 \delta (g - 2 h f)] y^2 \\
& + [\frac{3}{2} i (h^2 + i g) - 2 i^2 \beta (g - 2 h f) - 4 i \gamma (h^2 + 2 i h f) \\
& - i^2 \varepsilon (g - 2 h f) + 4 i^2 \eta h^2 (g - 2 h f)] \zeta^2 \\
& + [- 6 i^2 h^2 + 10 i^2 \beta h^2 - 9 i^2 \delta h^2] y^3 \\
& + [- 3 i^2 h^2 + i^2 \beta h^2 + 16 i^2 \gamma h^2 - 5 i^2 \varepsilon h^2 + 4 i^2 \eta h^4] y \zeta^2 \\
& + [- 4 i^2 \beta - 4 i^2 \gamma + 4 i^2 \varepsilon - 5 i^2 \eta h^2] \zeta \frac{d y d z}{d t^2} \\
& + n [- \Phi - 2 i \beta \Phi y - 4 i \beta \Phi dy - 4 i^2 \gamma B \int \cos. H t \zeta' d \zeta], \\
\frac{d^2 z}{d t^2} = & [- h^2 - i(2 h f + i f^2 + n A_4) - i \mu (g - 2 h f \\
& - i f^2 + n A_2) + 2 i \nu (g - 2 h f - i f^2 + n A_2) \chi \\
& (h^2 + 2 i h f) - 3 i^2 \nu h^2 (2 A + B) - 6 i^2 \pi B - 2 i^2 \rho A \\
& + 2 i^2 \sigma h^2 A] \zeta \\
& + [4 i (h^2 + 2 i h f) - 2 i \mu (h^2 + i(4 h f - g)) + \\
& 2 i \nu (h^2 + i(6 h f - 2 g)) \chi (h^2 + 2 i h f) - 20 i^2 \nu h^2 (g - 2 h f) \\
& - 6 i^2 \rho (g - 2 h f) + 6 i^2 \sigma h^2 (g - 2 h f)] \zeta y \\
& + [- 2 i + 2 i \mu - i \nu (2 h^2 + i(20 h f - 8 g)) \\
& - 3 i^2 \sigma (g - 2 h f)] \frac{d y d z}{d t^2} \\
& + [\frac{3}{2} i^2 \mu h^2 - 6 i^2 \nu h^4 - 9 i^2 \pi h^2] \zeta^3 \\
& + [- 10 i^2 h^2 + 7 i^2 \mu h^2 - 20 i^2 \nu h^4 - 5 i^2 \rho h^2 + \\
& 4 i^2 \sigma h^4] y^2 \zeta
\end{aligned}$$

$$+ [2 i^2 - 2 i^2 \mu + 16 i^2 v h^2 + 4 i^2 \rho - 5 i^2 \sigma h^2] y \frac{dy dz}{d t^2}$$

$$+ n [-i \Psi - i \mu \zeta \Phi - i v \frac{d \Phi dz}{d t^2} + 2 i v h^2 \zeta \Phi].$$

Je mets donc ces valeurs de y , z , $\frac{d^2 y}{d t^2}$ & $\frac{d^2 z}{d t^2}$ dans les équations $\frac{d^2 y}{d t^2} + K^2 y + n Y = 0$, & $\frac{d^2 z}{d t^2} + L^2 z + i n Z = 0$, & ensuite j'égalé à zéro les termes homogènes; ce qui me donne les équations suivantes

$$- h^2 - i (6 h f - 2 g + 3 i f^2 + n P_4) - 6 i \beta (g - 2 h f - i f^2 + \frac{2}{3} i B + n A_2) + 8 i^2 \gamma B - 6 i^2 \delta A - 2 i^2 \varepsilon B + 2 i^2 \eta h^2 B + K^2 = 0,$$

$$- (g - 2 h f - i f^2 + n A_2) - 2 i \beta A - 2 i \gamma B + 2 i^2 \eta (g - 2 h f) B + \alpha K^2 = 0,$$

$$3 h^2 + 3 i (4 h f - g) - 4 \beta (h^2 + i (6 h f - 2 g)) - 15 i \delta (g - 2 h f) + \beta K^2 = 0,$$

$$\frac{3}{2} (h^2 + i g) - 2 i \beta (g - 2 h f) - 4 \gamma (h^2 + 2 i h f) - i \varepsilon (g - 2 h f) + 4 i \eta h^2 (g - 2 h f) + \gamma K^2 = 0,$$

$$- 6 h^2 + 10 \beta h^2 - 9 \delta h^2 + \delta K^2 = 0,$$

$$- 3 h^2 + \beta h^2 + 16 \gamma h^2 - 5 \varepsilon h^2 + 4 \eta h^4 + \varepsilon K^2 = 0,$$

$$- 4 \beta - 4 \gamma + 4 \varepsilon - 5 \eta h^2 + \eta K^2 = 0,$$

$$- \Phi - 2 i \beta \Phi y - 4 i \beta \int \Phi dy - 4 i^2 \gamma B \int \cos. H t \zeta dz + Y = 0,$$

$$- h^2 - i (2 h f + i f^2 + n A_4) - i \mu (g - 2 h f - i f^2 + n A_2) + 2 i v (g - 2 h f - i f^2 + n A_2) \times (h^2 + 2 i h f) - 3 i^2 v h^2 (2 A + B) - 6 i^2 \pi B - 2 i^2 \rho A + 2 i^2 \sigma h^2 A + L^2 = 0,$$

$$4 (h^2 + 2 i h f) - 2 \mu [h^2 + i (4 h f - g)] + 2 v [h^2 + i (6 h f - 2 g)] \times [h^2 + 2 i h f] - 20 i v h^2 (g - 2 h f) - 6 i \rho (g - 2 h f) + 6 i \sigma h^2 (g - 2 h f) + \mu L^2 = 0,$$

$$-2 + 2\mu - \nu [2h^2 + i(20hf - 8g)] - 3i\sigma(g - 2hf) + \nu L^2 = 0,$$

$$\frac{3}{2}\mu h^2 - 6\nu h^4 - 9\pi h^2 + \pi L^2 = 0,$$

$$-10h^2 + 7\mu h^2 - 20\nu h^4 - 5\rho h^2 + 4\sigma h^4 + \rho L^2 = 0,$$

$$2 - 2\mu + 16\nu h^2 + 4\rho - 5\sigma h^2 + \sigma L^2 = 0,$$

$$- \mathcal{F} - (\mu - 2\nu h^2) \zeta \Phi - \nu \frac{d\Phi dz}{dt^2} + Z = 0;$$

par où l'on déterminera les valeurs des coefficients K^2 , α , β , γ , δ , ε , η , L^2 , μ , ν , π , ρ , σ , ainsi que celles de Y & de Z ; en ayant soin de pousser les valeurs de K^2 , L^2 , & α jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 & de in , celles de β , γ , μ , ν jusqu'aux quantités de l'ordre de i & de n seulement, & enfin de négliger dans les autres toutes les quantités affectées de i & de n .

LXXIX. Si on regarde la quantité α comme connue, & qu'on s'en serve pour déterminer g , on aura

$$g = \alpha K^2 + 2hf - nA_2 + i(f^2 - 2\beta A - 2\gamma B) + 2i^2\eta\alpha K^2 B;$$

ensuite, supposant $K = h + ik$ & $L = h + il$, on trouvera

$$k = f + 2h\alpha + \frac{i}{2b}(4hfa + 15h^2\alpha^2 - 5A - B)$$

$$+ \frac{n}{2b}(P_4 + 2A_2),$$

$$l = f + 2h\alpha + \frac{i}{2b}(4hfa + 15h^2\alpha^2 - 5A - B)$$

$$+ \frac{n}{2b}A_4,$$

$$\beta = 1 + \frac{i}{2}\alpha, \gamma = \frac{1}{2} + i\alpha\eta h^2, \delta = \frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{3}{2}$$

$$+ \eta h^2,$$

$$\mu = i(15 + 2\sigma h^2)\alpha, \nu = -\frac{2}{b^2} + i\left(\frac{4f}{b^2} + \frac{6 + \sigma b^2}{b^2}\alpha\right),$$

$$\pi = \frac{3}{2}, \rho = \frac{15}{2} + \sigma h^2 \quad \&c$$

$$Y = \Phi + 2i\beta\Phi y + 4i\beta\int\Phi dy + 4i^2\gamma B\int\cos.Ht\zeta' dz,$$

$$Z = \Psi + (\mu - 2\nu h^2)\Phi\zeta + \nu\frac{d\Phi dz}{dt}.$$

Et l'on remarquera qu'il restera encore deux indéterminées η & σ , lesquelles pourront être supposées égales à tout ce qu'on voudra, selon ce qu'on jugera plus commode.

A l'égard des quantités α & f , il faudra les prendre de telle manière que les deux conditions exprimées dans l'Art. LXXII. aient lieu, c'est-à-dire que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne renferment aucun terme tout constant; ainsi ce ne sera qu'après avoir trouvé les expressions générales de y & de $\frac{dx}{dt}$ en t , qu'on pourra déterminer les constantes α & f .

Au reste comme il n'est pas absolument nécessaire que la quantité a représente exactement la distance moyenne de la planète, on pourra, si l'on veut, se contenter de remplir la seconde des deux conditions dont nous venons de parler, & pour lors on aura encore une nouvelle indéterminée α à volonté.

Enfin pour déterminer A & B on substituera d'abord dans les équations (o) & (p) les valeurs de y & ζ en t , & on fera ensuite des équations séparées des termes dans lesquels t n'entre pas, les autres étant censés se détruire d'eux-mêmes. Or, en mettant au lieu de y & ζ leurs valeurs approchées $y = \alpha$ & z , & négligeant tous les termes affectés de i , ainsi que ceux qui contiennent des sinus & des cosinus, on a (à cause de $g - 2hf = \alpha h^2$ à très-peu près)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + h^2 y^2 - \alpha h^2 + A = 0, \quad \&$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + h^2 z^2 + B = 0.$$

De forte qu'en ne prenant, dans les valeurs de y^2 , $\frac{dy^2}{dt^2}$, z^2 & $\frac{dz^2}{dt^2}$, que les termes constans & omettant les autres, on aura

$$A = \alpha^2 h^2 - h^2 y^2 - \frac{dy^2}{dt^2} \quad \&$$

$$B = - h^2 z^2 - \frac{dz^2}{dt^2}.$$

LXXX. Pour mettre nos formules sous une forme plus commode & plus simple, nous ferons $\alpha = 0$, $\eta = 0$, & $\sigma = -\frac{11}{2b^2}$; moyennant quoi nous aurons

$$y + i(y^2 + \frac{1}{2} z^2) + i^2(\frac{1}{2} y^3 + \frac{3}{2} y z^2) = y \quad \&$$

$$\zeta - 2i(1 - \frac{2if}{b}) \frac{dz dy}{b^2 dt^2} + i^2(\frac{3}{2} z^3 + 2 \zeta y^2 - \frac{11}{2} y \frac{dy dz}{b^2 dt^2}) = z;$$

d'où l'on tire, en ne poussant la précision que jusques aux quantités de l'ordre de i^2 ,

$$y = y - i(y^2 + \frac{1}{2} z^2) + i^2(\frac{3}{2} y^3 - \frac{1}{2} y z^2 - 2z \frac{dy dz}{b^2 dt^2}) \quad \dots \quad (q)$$

$$\zeta = z + 2i(1 - \frac{2if}{b}) \frac{dz dy}{b^2 dt^2} - i^2(\frac{3}{2} z^3 + 2 z y^2 - y \frac{dz dy}{b^2 dt^2} + 2z \frac{dz^2}{b^2 dt^2} - 4 \frac{dy d \cdot (dz dy)}{b^2 dt^2}),$$

ou bien (en mettant pour $\frac{d^2 y}{dt^2}$ & $\frac{d^2 z}{dt^2}$ leurs valeurs approchées — $h^2 y$ & — $h^2 z$),

$$\zeta = z + 2i \left(1 - \frac{2if}{b} \right) \frac{dz dy}{b^2 dt^2} - i^2 \left(\frac{3}{2} z^3 + 2 z y^2 + \frac{5}{2} y \frac{dz dy}{b^2 dt^2} + 2 z \frac{dz^2}{b^2 dt^2} + 4 z \frac{dy^2}{b^2 dt^2} \right) \dots (r)$$

Et si on substitue cette valeur de y dans l'équation (n) de l'Art. LXXXVII., on aura

$$\frac{dx}{dt} = -2(h + if)y + f + i(h + if)(\zeta y^2 + z^2) - i^2 h (13 y^3 + 2 y z^2 - 4 z \frac{dy dz}{b^2 dt^2}) - n \zeta \dots (s)$$

équation facile à intégrer dès qu'on aura les valeurs de y & z en t . On se souviendra seulement qu'il faudra, avant l'intégration, faire $= 0$ tous les termes constants.

De plus, si on veut avoir l'expression du rayon vecteur u de l'orbite réelle, on fera $u = a(1 + iv)$, & comme $u = r\sqrt{1 + q^2}$, on trouvera $v = y + \frac{i}{2} \zeta^2 + \frac{i^2}{2} y \zeta^2$; & mettant au lieu de y & ζ leurs valeurs en y & z ,

$$v = y - iy^2 + \frac{3}{2} i^2 y^3.$$

Ainsi le problème ne dépendra plus que de l'intégration des équations

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + n Y = 0 \dots (t)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + L^2 z + in Z = 0 \dots (u)$$

LXXXI. Si on fait $n = 0$, on aura le cas ordinaire où l'orbite est une ellipse immobile.

On trouvera donc pour ce cas

$y = \Delta \cos. (Kt - A)$, & $z = \Lambda \sin. (Lt - E)$,
 Δ , Λ , A & E étant des constantes.

Donc 1.^o $A = -h^2 \Delta^2$, & $B = -h^2 \Lambda^2$ (Art. LXXIX.);
 2.^o si on substitue ces valeurs de y & de z dans le second
 membre de l'équation (s), & qu'après avoir développé
 les puissances des *sinus* & des *cosinus* on égale à zéro tous
 les termes constans, on aura, aux quantités de l'ordre de
 i^2 près, $f + ih \left(\frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 \right) = 0$; d'où

$$f = -ih \left(\frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 \right).$$

De sorte qu'on trouvera, (à cause de $\alpha = 0$ & de
 $n = 0$) $k = 0$, & $l = 0$, & par conséquent $K = h$
 & $L = h$ (Art. LXXIX.).

Si on n'eut pas supposé $\alpha = 0$, on eut eu $A = h^2$
 ($\alpha^2 - \Delta^2$), $B = -h^2 \Lambda^2$, & $2(h + if)\alpha + f +$
 $5ih \left(\frac{1}{2} \Delta^2 + \alpha \right) + \frac{ib}{2} \Lambda^2 = 0$; d'où $f = -2h\alpha -$
 $ih\alpha^2 - \frac{ib}{2} (5\Delta^2 + \Lambda^2)$, & l'on trouveroit, après les
 substitutions, que tous les termes des valeurs de k & de
 l se détruiraient d'eux mêmes, de manière que ces
 quantités seroient aussi nulles, comme elles le doivent
 être dans ce cas; ce qui pourroit servir, s'il en étoit
 besoin, à confirmer la bonté de nos formules.

Il ne s'agira donc plus que de mettre, dans les équations
 de l'Art. préc., $\Delta \cos. (ht - A)$ à la place de y
 & $\Lambda \sin. (ht - E)$ à la place de z ; ce qui n'aura
 aucune difficulté; d'ailleurs ce cas est si connu des Géomètres
 qu'il seroit superflu de nous y arrêter. Je me contenterai
 d'observer;

1.^o Que les Apfides de l'orbite se trouveront aux points
 où $dy = 0$, & par conséquent où $\sin. (ht - A) = 0$;

ce qui donnera pour l'aphélie $\cos. (ht - A) = 1$ & $v = \Delta - i\Delta^2 + \frac{3}{2}i^2\Delta^3$, & pour le périhélie $\cos. (ht - A) = -1$ & $v = -\Delta - i\Delta^2 - \frac{3}{2}i^2\Delta^3$; d'où il s'enfuit que le demi-axe de l'ellipse sera $= a(1 - i^2\Delta^2)$

& l'excentricité $= i\Delta \frac{1 + \frac{3}{2}i^2\Delta^2}{1 - i^2\Delta^2} = i\Delta(1 + \frac{5}{2}i^2\Delta^2)$
 $= i\Delta$ à très-peu près;

2.^o Que par conséquent l'angle $ht - A$ représentera l'anomalie moyenne, & A le lieu de l'aphélie;

3.^o Que les limites, c'est-à-dire les plus grandes latitudes feront aux points où $dz = \frac{2izdy}{1-2iy}$, & par conséquent

(en négligeant les quantités de l'ordre de i^2) aux points où $\frac{\cos.(bt - E)}{\sin.(bt - E)} = 2i \frac{dy}{bd t}$, c'est-à-dire où $\cos.(ht - E)$

$= 2i \frac{dy}{bd t}$; d'où la plus grande valeur de z fera

$\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2}i^2h^2\Lambda^2)$; de sorte qu'on aura pour la tangente de l'inclinaison de l'orbite $i\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2}i^2h^2\Lambda^2) = i\Lambda$ à très-peu près;

4.^o Que, comme $\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y = 0$, on aura $\frac{dy}{dt} = -$

$h^2 \int y dt =$ (à cause de $\frac{dx}{dt} = -2hy$, en négligeant les termes affectés de i) $\frac{b}{2}x$; donc on aura dans les limites

$\frac{\cos.(bt - E)}{\sin.(bt - E)} = ix$; & par conséquent $\cos.(ht - E) - ix \sin.(ht - E) = 0$, ou bien $\cos.(ht + ix - E) = 0$,
 c'est-

c' est-à-dire cos. $(\phi - E) = 0$; ce qui montre que E est le lieu du nœud ascendant, & qu'ainsi l'angle $h t - E$ dénote la distance moyenne de la planète au nœud.

LXXXII. Il est bon de remarquer que si on vouloit résoudre le problème de l'Art. LXXVIII. d'une manière plus générale, en donnant à tous les termes des équations (1) & (m) des coefficients indéterminés, on trouveroit, après en avoir fait le calcul, deux équations de condition entre ces mêmes coefficients; de sorte que la solution ne pourroit avoir lieu que quand ces équations seroient identiques d'elles mêmes; or c' est précisément ce qui arrive dans notre cas, & c' est-là la raison pourquoi il reste deux coefficients indéterminés η & σ . Au reste il est facile de voir que cet inconvénient ne vient que de ce que nous avons conservé la quantité $\frac{dy dz}{dr}$ au lieu d'y substituer

sa valeur tirée des équations (1) & (m) comme nous l'avons pratiqué dans l'Art. LII. Ainsi il sera très-aisé d'y remédier, & de donner par-là à notre méthode toute la généralité dont elle est susceptible.

LXXXIII. Revenons maintenant à notre sujet, & voyons comment il faut s'y prendre pour intégrer les équations (t) & (u). Pour cela on commencera par mettre dans les expressions de Y & Z, à la place de $y, z,$ & x leurs valeurs approchées $y, z,$ & $-z h f y d t$ tirées des équations (q), (r), (s), & de même à la place de y', z', x' , les valeurs correspondantes $y', z',$ & $-z h' f y' d t$; puis on cherchera, par l'intégration, les valeurs de $y, z,$ & de y', z' , en y négligeant d'abord tous les termes affectés de i & n ; & ces premières valeurs étant ensuite substituées dans Y & Z serviront à déterminer plus exactement les mêmes quantités y, z, y', z' .

Or il semble d'abord qu'on pourroit se contenter de prendre pour premières valeurs approchées de y & z celles

que nous avons trouvées plus haut (*Art. LXXXI.*), favoir
 $y = \Delta \operatorname{cof.} (Kt - A)$, $z = \Lambda \operatorname{fin.} (Lt - E)$,
 & par conséquent auffi

$$y' = \Delta' \operatorname{cof.} (K't - A'), \quad z' = \Lambda' \operatorname{fin.} (L't - E').$$

Mais ces valeurs étant substituées dans les quantités Y & Z ; on verra, après le développement des produits des différens *sinus* & *cosinus*, qu'on aura des termes de cette forme $\operatorname{cof.} [(ht + ik')t - A']$ & $\operatorname{fin.} [(ht + il')t - E']$, lesquels étant de l'ordre de i^n dans les équations différentielles se trouveront divisés, après l'intégration, par des quantités du même ordre; de sorte qu'ils appartiendront auffi aux premières valeurs de y & z .

Le terme $i Q_5 y' \operatorname{cof.} Ht$, par exemple, qui se trouve dans la quantité Φ donnera par la substitution de la valeur de y' le terme $\frac{i Q_5}{2} \Delta' \operatorname{cof.} [(h + ik')t - A']$, à cause de $K' = h' + ik'$ & de $H = h - h'$; de sorte que la quantité Y contiendra le terme $\frac{i^n Q_5}{2} \Delta' \operatorname{cof.} [(h + ik')t - A']$, lequel étant intégré (*Art. XLII.*) donnera dans la valeur de y le nouveau terme

$$\frac{i^n Q_5}{2((b + ik')^2 - K^2)} \Delta \operatorname{cof.} [(h + ik')t - A'];$$

or $(h + ik')^2 - K^2 =$ (en mettant $h + ik$ au lieu de K , & négligeant les termes de l'ordre de i^2) $2i(k' - k)h$;

de plus on a, à cause de $\alpha = 0$ & $f = \frac{i}{b} (\frac{5}{2} A + \frac{1}{2} B)$

(*Art. LXXXI.*), $k = \frac{n}{2b} (P_4 + 2A_2)$ (*Art. LXXIX.*),

& de même $k' = \frac{n'}{2b'} (P'_4 + 2A'_2)$; donc le terme dont il s'agit deviendra

$$\frac{Q_5}{2 \frac{n'b}{n'b'} (P'_4 + 2A'_2) - 2 (P_4 + 2A_2)} \Delta \operatorname{cof.} [(h + ik')t - A'],$$

lequel appartient, comme l'on voit, à la première valeur de y .

On trouvera de même dans la première valeur de y' un terme contenant $\text{cof.} [(h' + ik)t - A]$, & qui étant substitué dans le même terme $i n Q_5 y' \text{cof.} Ht$ de la quantité Y donnera un terme de cette forme $\text{cof.} [(h + ik)t - A]$, savoir $\text{cof.} (Kt - A)$; de sorte que la nouvelle valeur de y renfermera un arc de cercle (*Art. XLII*).

Le même inconvénient aura lieu, comme il est aisé de s'en assurer, par rapport à tous les termes de Y & de Z qui renferment y' , ou z' multipliés par $\text{cof.} Ht$, ou par $\text{fin.} Ht$. Tels sont dans la quantité Y les termes $i (Q_5 y' \text{cof.} Ht + 2 h P_7 f y' \text{fin.} Ht dt - 2 h' B_2 f y' dt \times \text{fin.} Ht + 4 h h' A_3 \iint y' dt \times \text{cof.} Ht dt)$, & dans la quantité Z le terme $B_5 z' \text{cof.} Ht$. Ainsi il sera nécessaire d'avoir égard à ces termes dans la première approximation des valeurs de y & z .

On aura donc en premier lieu l'équation suivante en y

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + i n (Q_5 y' \text{cof.} Ht + 2 h P_7 f y' \text{fin.} Ht dt - 2 h' B_2 f y' dt \times \text{fin.} Ht + 4 h h' A_3 \iint y' dt \times \text{cof.} Ht dt) = 0,$$

ou bien, parceque $\iint y' dt \times \text{cof.} Ht dt = \frac{1}{H} f y' dt \times \text{fin.} Ht - \frac{1}{H} f y' \text{fin.} Ht dt,$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + i n [Q_5 y' \text{cof.} Ht + (\frac{4 h h'}{H} A_3 - 2 h' B_2) f y' dt \times \text{fin.} Ht - (\frac{4 h h'}{H} A_3 - 2 h P_7) f y' \text{fin.} Ht dt] = 0.$$

Or on a, aux quantités de l'ordre de n près, $\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y = 0$; donc on aura aussi, dans la même hypothèse, $\frac{d^2 y'}{dt^2} + K'^2 y' = 0$; donc 1.° $\frac{d y'}{dt} + K'^2 \int y' dt = 0$, d'où $\int y' dt = -\frac{d y'}{K'^2 dt}$; 2.° $\int \frac{d^2 y'}{dt^2} \sin. H t dt + K'^2 \int y' \sin. H t dt = 0$; mais $\int \frac{d^2 y'}{dt^2} \sin. H t dt = \frac{d y'}{dt} \sin. H t - H y' \cos. H t - H^2 \int y' \sin. H t dt$; donc $\frac{d y'}{dt} \sin. H t - H y' \cos. H t + (K'^2 - H^2) \int y' \sin. H t dt$; par conséquent $\int y' \sin. H t dt = \left[\frac{d y'}{dt} \sin. H t - H y' \cos. H t \right] : [H^2 - K'^2]$. Donc substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + in \left[(Q_5 + \frac{4 b b'}{H^2 - K'^2} A_3 - \frac{2 b H}{H^2 - K'^2} P_7) y' \cos. H t + \left(\frac{2 b}{H^2 - K'^2} P_7 - \frac{4 b b' H}{(H^2 - K'^2) K'^2} A_3 + \frac{2 b'}{K'^2} B_2 \right) \frac{d y'}{dt} \sin. H t \right] = 0.$$

Ensuite on aura cette équation en z

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + L^2 z + in B_5 z' \cos. H t = 0.$$

On trouvera de même des équations semblables en y' & z' , suivant la remarque de l'Art. LXXVII., & l'on aura ainsi quatre équations, lesquelles s'intégreront, comme l'on voit, par la méthode de l'Art. LVIII.

LXXXIV. Puisque $H = h - h'$ (Art. LXXXV.) & $K = h + ik$, $L = h + il$ (Art. LXXIX.), & de même $K = h' + ik'$, $L' = h' + il'$, on aura le cas de l'Art. LX.

Donc 1.° si on fait

$$M = n \left(Q_5 + \frac{4 b b'}{H^2 - K'^2} A_3 - \frac{2 b H}{H^2 - K'^2} P_7 \right)$$

$$N = n \left(\frac{2 b}{H^2 - K'^2} P_7 - \frac{4 b b' H}{(H^2 - K'^2) K'^2} A_3 + \frac{2 b'}{K'^2} B_2 \right),$$

& de même

$$M' = n' \left(Q'_5 + \frac{4 b' b}{H^2 - K^2} A'_3 + \frac{2 b' H}{H^2 - K^2} P'_7 \right)$$

$$N' = n' \left(\frac{2 b'}{H^2 - K^2} P'_7 + \frac{4 b' b H}{(H^2 - K^2) K^2} A'_3 + \frac{2 b}{K^2} B'_2 \right),$$

ensuite

$$P = \frac{M + N b'}{4 b}, \quad P' = \frac{M' + N' b}{4 b'}$$

& qu'on appelle m_1 , m_2 les racines de l'équation $(m - k)(m - k') - P P' = 0$, enforte que

$$m_1 = \frac{k + k' + \sqrt{((k - k')^2 + 4 P P')}}{2},$$

$$m_2 = \frac{k + k' - \sqrt{((k - k')^2 + 4 P P')}}{2},$$

on trouvera (*Art. LXII. & LXV.*) que la première valeur approchée de y fera de cette forme

$$\begin{aligned} y = & \frac{(m_1 - k') F + P F'}{m_1 - m_2} \operatorname{cof.} (h + i m_1) t \\ & + \frac{(m_1 - k') G + P G'}{m_1 - m_2} \operatorname{fin.} (h + i m_1) t \\ & - \frac{(m_2 - k') F + P F'}{m_1 - m_2} \operatorname{cof.} (h + i m_2) t \\ & - \frac{(m_2 - k') G + P G'}{m_1 - m_2} \operatorname{fin.} (h + i m_2) t. \quad (v) \end{aligned}$$

2.° Si on fait de même

$$Q = \frac{n B_5}{4 b}, \quad Q' = \frac{n' B'_5}{4 b'}$$

& qu'on nomme n_1 , n_2 les racines de l'équation
 $(n - l) \times (n - l') - Q Q' = 0$, enforte que

$$n_1 = \frac{l + l' + \sqrt{((l - l')^2 + 4 Q Q')}}{2}$$

$$n_2 = \frac{l + l' - \sqrt{((l - l')^2 + 4 Q Q')}}{2},$$

on aura

$$\begin{aligned} z = & \frac{(n_1 - l') B + Q B'}{n_1 - n_2} \cos. (h + i n_1) t \\ + & \frac{(n_1 - l') C + Q C'}{n_1 - n_2} \sin. (h + i n_1) t \\ - & \frac{(n_2 - l') B + Q B'}{n_1 - n_2} \cos. (h + i n_2) t \\ - & \frac{(n_2 - l') C + Q C'}{n_1 - n_2} \sin. (h + i n_2) t \quad . \quad (x) \end{aligned}$$

(F , F' , G , G' , B , B' , C , C' étant des constantes qu'il faudra déterminer par les observations).

Telles sont les premières valeurs approchées de y & z ; & pour avoir celles de y' & z' , il n'y aura qu'à marquer simplement d'un trait toutes les lettres qui ne le font point, & *viceversa*.

Si on vouloit maintenant pousser l'approximation plus loin, & déterminer plus exactement les quantités y , z , y' , z' , on substituerait d'abord les valeurs qu'on vient de trouver, dans les termes de Y & de Z que nous avons négligés; après quoi il n'y auroit plus qu'à suivre la méthode qui a été exposée dans l'Art. LXIV.

Le peu de tems qui me reste ne me permettant pas d'entrer dans ce détail, je me contenterai d'avoir établi les principes nécessaires pour résoudre le problème dont il s'agit; & je me bornerai à examiner ici, d'après les formules données ci-dessus, les inégalités des mouvemens de Jupiter & de Saturne qui font varier l'excentricité &

position de l'aphélie de ces deux Planètes, aussi bien que l'inclinaison & le lieu du nœud de leurs orbites, & qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvemens; inégalités que les observations ont fait connoître depuis long-tems, mais que personne jusqu'ici n'a encor entrepris de déterminer avec toute l'exacritude qu'on peut exiger dans un sujet si important.

LXXXV. Soit $m_1 + m_2 = 2\mu h$ & $m_1 - m_2 = 2\nu h$, enforte que

$$\mu = \frac{k+k'}{2b}, \text{ \& } \nu = \frac{\sqrt{((k-k')^2 + 4PP')}}{2b};$$

supposons de plus

$$F_1 = \frac{(k-k')F + 2PF'}{2h\nu}$$

$$G_1 = \frac{(k-k')G + 2PG'}{2h\nu},$$

& nous aurons au lieu de l'équation (v) celle-ci

$$y = F \cos. (1 + i\mu)ht \times \cos. i\nu ht$$

$$- F_1 \sin. (1 + i\mu)ht \times \sin. i\nu ht$$

$$+ G \sin. (1 + i\mu)ht \times \cos. i\nu ht$$

$$+ G_1 \cos. (1 + i\mu)ht \times \sin. i\nu ht.$$

Soit maintenant

$$F = \delta \cos. \alpha, \quad G = \delta \sin. \alpha,$$

$$F_1 = \delta_1 \cos. \alpha_1, \quad G_1 = \delta_1 \sin. \alpha_1,$$

on aura

$$y = \delta \cos. [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \cos. i\nu ht$$

$$- \delta_1 \sin. [(1 + i\mu)ht - \alpha_1] \times \sin. i\nu ht.$$

Soit encore

$$\alpha_1 = \alpha + \eta, \text{ \& } \delta_1 = \beta\delta,$$

on aura $\sin. [(1 + i\mu)ht - \alpha_1] = \sin. [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \cos. \eta - \cos. [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \sin. \eta$; donc

$$y = \delta (\cos. i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. i\nu ht) \cos. [(1 + i\mu)ht - \alpha]$$

$$- \delta \beta \cos. \eta \sin. i\nu ht \sin. [(1 + i\mu)ht - \alpha].$$

Enfin soit $\frac{\text{cot. } i\nu ht + \beta \text{ fin. } \eta \text{ fin. } i\nu ht}{\beta \text{ cot. } \eta \text{ fin. } i\nu ht} = \frac{\text{cot. } \psi}{\text{fin. } \psi}$, c'est-à-dire

$$\text{cot. } \psi = \frac{\text{cot. } i\nu ht.}{\beta \text{ cot. } \eta} + \text{tang. } \eta,$$

& nous aurons

$$y = \delta \sqrt{[(\text{cot. } i\nu ht + \beta \text{ fin. } \eta \text{ fin. } i\nu ht)^2 + (\beta \text{ cot. } \eta \text{ fin. } i\nu ht)^2]}$$

$$\times \text{cot. } [(1 + i\mu) ht + \psi - \alpha]$$

ou bien, en faisant

$$\Delta = \delta \sqrt{\left[\frac{1+\beta^2}{2} + \frac{1-\beta^2}{2} \text{cot. } 2i\nu ht + \beta \text{ fin. } \eta \text{ fin. } 2i\nu ht\right]}$$

$$\& A = \alpha - \psi - i\mu ht,$$

$$y = \Delta \text{cot. } (ht - A).$$

De même, si on fait $n_1 + n_2 = 2\rho h$, $n_1 - n_2 = 2\sigma h$, en sorte que

$$\rho = \frac{l+l'}{2b}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{((l-l')^2 + 4QQ')}}{2b},$$

ensuite

$$B_1 = \frac{(l-l')B + 2QB'}{2h\sigma}$$

$$C_1 = \frac{(l-l')C + 2QC'}{2h\sigma},$$

& de plus

$$B = -\lambda \text{ fin. } \varepsilon, \quad C = \lambda \text{ cot. } \varepsilon,$$

$$B_1 = -\lambda_1 \text{ fin. } \varepsilon_1, \quad C_1 = \lambda_1 \text{ cot. } \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \omega, \quad \lambda_1 = \gamma \lambda,$$

$$\text{cot. } \zeta = \frac{\text{cot. } i\sigma ht}{\gamma \text{cot. } \omega} + \text{tang. } \omega,$$

enfin

$$\Lambda = \lambda \sqrt{\left[\frac{1+\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2} \text{cot. } 2i\sigma ht + \gamma \text{ fin. } \omega \text{ fin. } 2i\sigma ht\right]}$$

$$\& E = \varepsilon - \zeta - i\rho ht,$$

on aura par l'équation (x)

$$z = \Lambda \text{ fin. } (ht - E).$$

Voilà donc les valeurs de y & de z réduites à la même forme que celles de l'Art. LXXI. ; d'où il est aisé de conclure que l'orbite de Jupiter est un ellipse, dans laquelle l'excentricité est $i\Delta$, le lieu de l'aphélie A , la tangente de l'inclinaison à l'ecliptique $i\Lambda$, & le lieu du nœud ascendant E . Il en sera de même de l'orbite de Saturne, en marquant seulement les lettres d'un trait.

LXXXVI. Il faudroit présentement substituer ces valeurs de y & de z dans les équations (q) , (r) , & (s) de l'Art. LXXX. , pour en déduire les expressions des quantités y , z , & x , & par conséquent celles de r , q , & ϕ (Art. LXXII.); mais sans entrer dans ce détail, il suffira de remarquer

1.° Que les quantités μ , ν , ρ , & σ étant de l'ordre de n , comme on le verra ci-après, les variations des quantités Δ , Λ , A , & E seront de l'ordre de $i n$; d'où il s'ensuit que les expressions de y & de z seront à très-peu près les mêmes (c'est-à-dire aux quantités de l'ordre de $i^2 n$ près), que si ces quantités étoient constantes. De sorte que pour avoir le rayon vecteur de l'orbite, ainsi que la tangente de l'inclinaison, pour un instant quelconque, il n'y aura qu'à calculer l'un & l'autre par les méthodes ordinaires, d'après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A , & E regardés comme constans.

2.° Que, si on dénote par $(\frac{dx}{dt})$ la valeur de $\frac{dx}{dt}$, en supposant Δ , Λ , A , & E constantes, on aura (abstraction faite du terme $n\Xi$ qu'on doit négliger ici)

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + f + i(h + if) \times \left(\frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2\right) = 0,$$

parceque, dans l'hypothèse de Δ & Λ constantes, les termes tous constans $f + i(h + if) \times \left(\frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2\right)$ doivent être supposés $= 0$, comme nous l'avons fait

(*Art. LXXXI.*); or dans le cas présent où les quantités Δ & Λ sont en partie constantes, & en partie variables, on fera simplement $f + i [h + if] \times [\frac{5}{4} \delta^2 (1 + \beta^2) + \frac{1}{4} \lambda^2 (1 + \gamma^2)] = 0$, & on conservera dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$ les termes variables qui entrent dans Δ^2 & de Λ^2 , savoir $\delta^2 (\frac{1 - \beta^2}{2} \cos. 2 i \nu h t + \beta \sin. \eta \sin. 2 i \nu h t)$, & $\lambda^2 (\frac{1 - \gamma^2}{2} \cos. 2 i \sigma h t + \gamma \sin. \omega \sin. 2 i \sigma h t)$; de sorte que l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre de i^3 ,

$$f = - \frac{i b}{4} [5 \delta^2 (1 + \beta^2) + \lambda^2 (1 + \gamma^2)],$$

& ensuite

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{5 i b}{2} \delta^2 \left(\frac{1 - \beta^2}{2} \cos. 2 i \nu h t + \beta \sin. \eta \sin. 2 i \nu h t \right) + \frac{i b}{2} \lambda^2 \left(\frac{1 - \gamma^2}{2} \cos. 2 i \sigma h t + \gamma \sin. \omega \sin. 2 i \sigma h t \right).$$

Pour intégrer cette équation, soit (x) la valeur de x , dans la supposition de Δ , Λ , A , & E constantes, & dénotons par $d(x)$ la différentielle de (x) en faisant ces quantités seules variables, il est clair que la valeur complète de $\frac{d(x)}{dt}$ fera $\left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{d(x)}{dt}$; de manière qu'on aura, en intégrant, $(x) = \int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt + \int d(x)$, & par conséquent $\int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = (x) - \int d(x)$. Mais comme les différences des quantités Δ , Λ , A , & E , sont de l'ordre de $i n$, la quantité $\int d(x)$ fera aussi du même ordre, & par conséquent elle pourra être négligée, du moins dans

la recherche présente ; on aura donc simplement $\int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$
 $= (x)$; donc

$$x = (x) + \frac{5\delta^2}{4\nu} \left[\frac{1-\beta^2}{2} \sin. 2i\nu ht - \beta \sin. \eta (\cos. 2i\nu ht - 1) \right]$$

$$+ \frac{\lambda^2}{4\sigma} \left[\frac{1-\gamma^2}{2} \sin. 2i\sigma ht - \gamma \sin. \omega (\cos. 2i\sigma ht - 1) \right],$$

& par conséquent

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu} \left[\frac{1-\beta^2}{2} \sin. 2i\nu ht - \beta \sin. \eta$$

$$(\cos. 2i\nu ht - 1) \right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma} \left[\frac{1-\gamma^2}{2} \sin. 2i\sigma ht - \gamma \sin. \omega$$

$$(\cos. 2i\sigma ht - 1) \right],$$

où l'on remarquera que ht est l'angle du mouvement moyen, & $i(x)$ l'équation du centre calculée à l'ordinaire, & combinée avec la réduction à l'écliptique.

Or comme les coefficients $i\nu$ & $i\sigma$ sont extrêmement petits, il est visible que, tant que l'angle ht ne sera pas fort grand, on aura à très-peu près $\sin. 2i\nu ht = 2i\nu ht$, $\cos. 2i\nu ht = 1$, & $\sin. 2i\sigma ht = 2i\sigma ht$, $\cos. 2i\sigma ht = 1$, & par conséquent

$$\varphi = \left[1 + \frac{5}{4} i^2 \delta^2 (1 - \beta^2) + \frac{1}{4} i^2 \lambda^2 (1 - \gamma^2) \right] ht + i(x);$$

de sorte que le mouvement moyen sera augmenté en raison de $1 + \frac{5}{4} i^2 \delta^2 (1 - \beta^2) + \frac{1}{4} i^2 \lambda^2 (1 - \gamma^2)$ à 1.

Si donc on veut que le terme ht représente le moyen mouvement *apparent* de la Planète, c'est-à-dire celui qui résulte des observations de sa révolution, il faudra faire simplement $f = -\frac{i b}{2} (5 \delta^2 + \lambda^2)$; & l'on aura pour lors

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{5ib}{2} \delta^2 \left[\frac{1-\beta^2}{2} (\cos. 2i\nu ht - 1) + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht \right] + \frac{ib}{2} \lambda^2 \left[\frac{1-\gamma^2}{2} (\cos. 2i\sigma ht - 1) + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht \right];$$

d'où l'on trouvera

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu} \left[\frac{1-\beta^2}{2} (\sin. 2i\nu ht - 2i\nu ht) - \beta \sin. \eta (\cos. 2i\nu ht - 1) \right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma} \left[\left(\frac{1-\gamma^2}{2} \sin. 2i\sigma ht - 2i\sigma ht \right) - \gamma \sin. \omega (\cos. 2i\sigma ht - 1) \right].$$

Ainsi, tant que les angles $2i\nu ht$ & $2i\sigma ht$ seront fort petits, ce qui aura lieu pendant un certain nombre de révolutions, on aura à très-peu près $\varphi = ht + i(x)$; c'est-à-dire que la longitude de la Planète sera aussi la même que celle qu'on trouveroit par les méthodes ordinaires d'après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A , & E supposés constans.

LXXXVII. Pour faire maintenant usage de nos formules, on remarquera

1.° Que $n = \frac{m'}{1+im} b$ (Art. LXXVI.) = $m'h^2$ à très-peu près, enforte que $in = im'h^2 = \frac{J}{I} h^2$, & $in' = \frac{J}{I} h'^2$.

2.° Que l'on aura par l'Art. LXXIX. $A = h^2 (\alpha^2 - \Delta^2)$ & $B = -h^2 \Lambda^2$, c'est-à-dire, en ne prenant, comme on le doit, que les termes constans des valeurs de Δ^2 & de Λ^2 ,

$$A = h^2 \left[\alpha^2 - \frac{1}{2} \delta^2 (1 + \beta^2) \right] \text{ \& } B = -\frac{1}{2} h^2 \lambda^2 (1 + \gamma^2);$$

ce qui donnera, à cause de $\alpha = 0$, & de $f = -\frac{ib}{4}$

$$\times \left[5 \delta^2 \right]$$

$$\chi [5 \delta^2 (1 + \beta^2) + \lambda^2 (1 + \gamma^2)], k = \frac{n}{2b} (P_4 + 2A_2)$$

& $l = \frac{n}{2b} A_4$; de sorte qu'on aura

$$ik = \frac{J}{2I} h (P_4 + 2A_2), il = \frac{J}{2I} h A_4$$

& de même

$$ik' = \frac{J}{2I} h' (P'_4 + 2A'_2), il' = \frac{J}{2I} h' A'_4.$$

Si on vouloit employer l'autre valeur de f , savoir $-\frac{ib}{2} (5 \delta^2 + \lambda^2)$, il faudroit alors mettre dans les valeurs de A & de B , δ^2 au lieu de Δ^2 , & λ^2 au lieu de Λ^2 , & l'on trouveroit les mêmes expressions de k & de l que ci-devant.

3.° Que $\frac{I+J}{a^3} = b = h^2 + ig$ (*Art. LXXVI.*) = h^2 à très-peu près, parceque g est déjà une quantité très-petite (*Art. LXXIX.*). Donc on aura aussi $\frac{I+J'}{a'^3} = h'^2$, & par conséquent $\frac{I+J'}{I+J} \chi \frac{a^3}{a'^3} = \frac{b'^2}{b^2}$, ou bien, à cause que les masses J & J' de Jupiter & de Saturne sont très-petites par rapport à celle du Soleil I , $\frac{a^3}{a'^3} = \frac{b'^2}{b^2}$, de sorte qu'on aura $\frac{a}{a'} = \left(\frac{b'}{b} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Cela posé, on commencera par déterminer, suivant la méthode de l'Art. LXXIII. les coefficients A, B, C &c., & P, Q, R &c.; après quoi on cherchera les valeurs des quantités $A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, P_4, P_7,$ & Q_5 , ainsi que celles de A'_2, A'_3, A'_4 &c. qui entrent dans les expressions de k, l, P, Q , & de k', l' ,

P' , Q' . Or en faisant $s = \frac{3}{2}$, & $\frac{a}{a'} = a$ (je mets ici a au lieu de a' , parceque j'aurai occasion dans la suite de faire servir cette dernière lettre à un autre usage) on aura par l'Art. cité $(1 - 2a \cos. \theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} = A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta + \&c.$; donc, ayant supposé (Art. LXXIV.) $(a^2 - 2aa' \cos. \theta + a'^2)^{-\frac{1}{2}} = A_1 + B_1 \cos. \theta + C_1 \cos. 2\theta + \&c.$, on aura $A_1 = \frac{A}{a^3}$, $B_1 = \frac{B}{a^3}$, $C_1 = \frac{C}{a^3}$ &c. On trouvera de même $P_1 = \frac{P}{a^3}$, $Q_1 = \frac{Q}{a^3}$, $R_1 = \frac{R}{a^3}$ &c., & l'on remarquera que les quantités A_1 , B_1 , C_1 &c., P_1 , Q_1 , R_1 &c. restent nécessairement les mêmes, en changeant a en a' & a' en a , de sorte qu'on aura aussi $A'_1 = \frac{A}{a'^3}$, $B'_1 = \frac{B}{a'^3}$ &c., $P'_1 = \frac{P}{a'^3}$, $Q'_1 = \frac{Q}{a'^3}$ &c. Faisant donc ces substitutions dans les formules de l'Art. LXXV., & mettant par tout a au lieu de $\frac{a}{a'}$, on trouvera d'abord

$$A_2 = a^3 A - a^2 \frac{B}{2}$$

$$A_3 = a^2 \frac{2A - C}{2} - a^2$$

$$A_4 = a^3 A - A_2 = a^2 \frac{B}{2}$$

$$B_2 = a^3 B - a^2 \frac{2A + C}{2} + a^2$$

$$B_3 = -a^2 B,$$

ensuite on aura (Art. LXXIV.)

$$P_2 = \frac{3}{a^3} \left(a \frac{Q}{2} - a^2 P \right)$$

$$Q_2 = \frac{3}{a^3} \left(a \frac{2P + R}{2} - a^2 Q \right)$$

$$R_2 = \frac{3}{a^2} \left(a \frac{Q+S}{2} - a^2 R \right)$$

&c.

$$P_3 = \frac{3}{a^3} \left(a \frac{Q}{2} - P \right)$$

$$Q_3 = \frac{3}{a^3} \left(a \frac{2P+R}{2} - Q \right)$$

$$R_3 = \frac{3}{a^3} \left(a \frac{Q+S}{2} - R \right)$$

&c.

ou bien, en faisant pour plus de simplicité

$$p = 3 \left(a \frac{Q}{2} - a^2 P \right)$$

$$q = 3 \left(a \frac{2P+R}{2} - a^2 Q \right)$$

$$r = 3 \left(a \frac{Q+S}{2} - a^2 R \right)$$

&c.

$$p_1 = 3 \left(a \frac{Q}{2} - P \right)$$

$$q_1 = 3 \left(a \frac{2P+R}{2} - Q \right)$$

$$r_1 = 3 \left(a \frac{Q+S}{2} - R \right)$$

&c.

on aura

$$P_2 = \frac{p}{a^2}, \quad Q_2 = \frac{q}{a^2}, \quad R_2 = \frac{r}{a^2} \quad \&c.$$

$$P_3 = \frac{p_1}{a^3}, \quad Q_3 = \frac{q_1}{a^3}, \quad R_3 = \frac{r_1}{a^3} \quad \&c.$$

De là on trouvera, par les formules de l'Art. LXXV.,

$$P_4 = a^3 (A + p) - a^2 \frac{q}{2},$$

$$P_7 = a^2 \left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p_1-r_1}{2} + 2a^2, \& \right.$$

$$Q_5 = a^3 q_1 - a^2 \left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p_1+r_1}{2} \right) - 2a^2.$$

On trouvera de même les autres quantités A'_2 , B'_3 &c.; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans les formules des Art. cités, a' au lieu de a & a au lieu de a' , & marquer ensuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, après les substitutions,

$$A'_2 = A - a \frac{B}{2}$$

$$A'_3 = a \frac{2A-C}{2} - \frac{1}{a^2}$$

$$A'_4 = A - A'_2 = a \frac{B}{2}$$

$$B'_2 = B - a \frac{2A+C}{2} + \frac{1}{a^2}$$

$$B'_5 = -aB,$$

& ensuite

$$P'_2 = \frac{p_1}{a^3}, Q'_2 = \frac{q_1}{a^3}, R'_2 = \frac{r_1}{a^3} \&c.$$

$$P'_3 = \frac{p}{a^3}, Q'_3 = \frac{q}{a^3}, R'_3 = \frac{r}{a^3} \&c.$$

d'où

$$P'_4 = A + p_1 - a \frac{q_1}{2}$$

$$P'_7 = a \left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p-r}{2} \right) + \frac{2}{a^2}$$

$$Q'_5 = q - a \left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p+r}{2} \right) - \frac{2}{a^2}.$$

Enfin on trouvera par l'Art. LXXXIV., en mettant à la place de H , $h - h'$, à la place de K & de K' leurs valeurs approchées h & h' , & la place de i & de i' , $\frac{J'}{I} h^2$ & $\frac{J}{I} h'^2$,

$$iP = \frac{J'}{4I} h (Q_5 - 4A_3 - 2P_7 + 2B_2)$$

$$iP' = \frac{J}{4I} h' (Q'_5 - 4A'_3 - 2P'_7 + 2B'_2)$$

$$iQ = \frac{J'}{4I} h B_5 \quad \& \quad iQ' = \frac{J}{4I} h' B'_5.$$

Par ces valeurs de iP , iP' , iQ , iQ' , & par les valeurs de ik , ik' , il , il' trouvées ci-dessus, on trouvera les valeurs de $i\mu$, $i\nu$, $i\rho$, $i\sigma$ (*Art. LXXXV.*) & ces mêmes valeurs étant ensuite multipliées par $\frac{b}{h}$, on aura celles de $i\mu'$, $i\nu'$, $i\rho'$, $i\sigma'$.

Maintenant on aura par le même *Art.*

$$\begin{aligned} \text{rang. } \alpha_1 &= \frac{G_1}{F_1} = \frac{(k-k')G + 2PG'}{(k-k')F + 2PF'} \\ &= \frac{(k-k')\delta \sin. \alpha + 2P\delta' \sin. \alpha'}{(k-k')\delta \cos. \alpha + 2P\delta' \cos. \alpha'} \quad \& \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \sqrt{[(F_1)^2 + (G_1)^2]} = \sqrt{[(k-k')^2 \delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta'(\sin. \alpha \times \sin. \alpha' + \cos. \alpha \times \cos. \alpha') + 4P^2\delta'^2]} : 2hv.$$

Soit $\alpha' - \alpha = A$, c'est-à-dire $\alpha' = \alpha + A$, & l'on aura

$$\begin{aligned} \text{rang. } \alpha_1 &= \frac{((k-k')\delta + 2P\delta' \cos. A) \sin. \alpha + 2P\delta' \sin. A \cdot \cos. \alpha}{((k-k')\delta + 2P\delta' \cos. A) \cos. \alpha - 2P\delta' \sin. A \cdot \sin. \alpha} \\ \delta_1 &= \frac{\sqrt{((k-k')^2 \delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta' \cos. A + 4P^2\delta'^2)}}{2hv}; \end{aligned}$$

Donc si on fait

$$\begin{aligned} (k-k')\delta + 2P\delta' \cos. A &= \delta s \cos. u \\ \& \quad 2P\delta' \sin. A &= \delta s \sin. u \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} 1.^{\circ} \text{ rang. } \alpha_1 &= \frac{\cos. u \cdot \sin. \alpha + \sin. u \cdot \cos. \alpha}{\cos. u \cdot \cos. \alpha - \sin. u \cdot \sin. \alpha} = \frac{\sin. (u + \alpha)}{\cos. (u + \alpha)} \\ &= \text{tang. } (u + \alpha); \text{ donc } \alpha_1 = u + \alpha, \text{ \& par consé-} \\ &\text{quent } \eta = u. \end{aligned}$$

$$2.^\circ \delta s = \sqrt{[(k - k')\delta + 2P\delta' \text{ cof. } A]^2 + (2P'\delta' \text{ fin. } A)^2} = 2h\nu\delta_1 = 2h\nu\beta\delta; \text{ donc}$$

$$\beta = \frac{s}{2h\nu}.$$

Donc, si on fait pour plus de simplicité $\frac{\delta'}{\delta} = b$, on aura

$$\beta = \frac{\sqrt{[(k - k' + 2Pb \text{ cof. } A)^2 + (2Pb \text{ fin. } A)^2]}{2h\nu},$$

$$\text{fin. } \eta = \frac{Pb \text{ fin. } A}{h\nu\beta}, \text{ cof. } \eta = \frac{k - k' + 2Pb \text{ cof. } A}{2h\nu\beta}.$$

Et pour avoir les valeurs de β' , fin. η' , & cof. η' , il n'y aura qu'à mettre k' au lieu de k , α' au lieu de α , δ' au lieu de δ , & *viceversa*, & marquer ensuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, à cause de

$$b = \frac{\delta'}{\delta} \text{ \& } A = \alpha' - \alpha,$$

$$\beta' = \frac{\sqrt{[(k' - k + \frac{2P'}{b} \text{ cof. } A)^2 + (\frac{2P'}{b} \text{ fin. } A)^2]}{2h'\nu'}$$

$$\text{fin. } \eta' = -\frac{P' \text{ fin. } A}{bh'\nu'\beta'}, \text{ cof. } \eta' = \frac{k' - k + \frac{2P'}{b} \text{ cof. } A}{2h'\nu'\beta'}.$$

Si on fait de même $\epsilon' - \epsilon = E$, & $\frac{\lambda'}{\lambda} = c$, on trouvera par des procédés semblables

$$\gamma = \frac{\sqrt{[(l - l' + 2Qc \text{ cof. } E)^2 + (2Qc \text{ fin. } E)^2]}{2h\sigma}$$

$$\text{fin. } \omega = \frac{Qc \text{ fin. } E}{h\sigma\gamma}, \text{ cof. } \omega = \frac{l - l' + 2Qc \text{ cof. } E}{2h\sigma\gamma};$$

& ensuite

$$\gamma' = \frac{\sqrt{[(l' - l + \frac{2Q'}{c} \text{ cof. } E)^2 + (\frac{2Q'}{c} \text{ fin. } E)^2]}{2h'\sigma'}$$

$$\text{fin. } \omega' = - \frac{Q' \text{ fin. } E}{ch'\sigma'\gamma'}, \quad \text{cof. } \omega' = \frac{l-l + \frac{2Q'}{c} \text{ cof. } E}{2h'\sigma'\gamma'};$$

LXXXVIII. Pour déterminer maintenant les constantes δ , λ , α , ε , & δ' , λ' , α' , ε' , on remarquera qu'en supposant $t = 0$, on a $\Delta = \delta$, $\Lambda = \lambda$, $A = \alpha$, $E = \varepsilon$, & par conséquent aussi $\Delta' = \delta'$, $\Lambda' = \lambda'$, $A' = \alpha'$, & $E' = \varepsilon'$. On cherchera donc les élémens de la théorie de Jupiter & de Saturne pour une certaine époque, par exemple pour le commencement de l'année 1750., & l'on fera

$i\delta =$ à l'excentricité de Jupiter,

$i\lambda =$ à la tangente de l'inclinaison de son orbite par rapport à l'écliptique,

$\alpha =$ à la longitude de l'aphélie,

$\varepsilon =$ à la longitude du nœud ascendant,

& de même

$i\delta' =$ à l'excentricité de Saturne,

$i\lambda' =$ à la tangente de son inclinaison à l'écliptique,

$\alpha' =$ à la longitude de l'aphélie,

$\varepsilon' =$ à la longitude du nœud.

À l'égard des constantes h & h' , on les déterminera à l'aide des mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne : car on aura

$$\frac{h}{h'} = \frac{\text{mouv. moy. Jup.}}{\text{mouv. moy. Sat.}}$$

LXXXIX. Voilà toutes les quantités qu'il est nécessaire de connoître pour déterminer les perturbations de Jupiter & de Saturne, en vertu de leur action réciproque. Nous allons remettre ici sous les yeux du Lecteur les principales altérations du mouvement de ces deux Planètes.

Soient T & T' les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne comptés depuis l'époque, pour laquelle on a déterminé les élémens de ces deux Planètes, & on trouvera

1.° Qu'au bout du tems, qui répond au mouvement

moyen T , l'excentricité de Jupiter se trouvera augmentée en raison de

$$\sqrt{\left[\frac{1+\beta^2}{2} + \frac{1-\beta^2}{2} \cos. 2i\sigma T + \beta \sin. \eta \times \sin. 2i\nu T \right]} \text{ à } 1.$$

2.^o Que la tangente de l'inclinaison de l'orbite sera pareillement augmentée en raison de

$$\sqrt{\left[\frac{1+\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2} \cos. 2i\sigma T + \gamma \sin. \omega \times \sin. 2i\sigma T \right]} \text{ à } 1.$$

3.^o Que le lieu de l'aphélie se trouvera moins avancé d'un arc égal à

$$i\mu T + \text{arc. cõt.} \left(\frac{\cot. i\nu T}{\beta \cos. \eta} + \text{tang.} \eta \right).$$

4.^o Que le lieu du nœud sera aussi moins avancé d'un arc égal à

$$i\rho T + \text{arc. cõt.} \left(\frac{\cot. i\sigma T}{\gamma \cos. \omega} + \text{tang.} \omega \right).$$

5.^o Que le mouvement de Jupiter par rapport à l'écliptique sera altéré d'une quantité égale à

$$\frac{5i\delta^2}{4\nu} \left[\frac{1-\beta^2}{2} (\sin. 2i\nu T - 2i\nu T) - \beta \sin. \eta (\cos. 2i\nu T - 1) \right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma} \left[\frac{1-\gamma^2}{2} (\sin. 2i\sigma T - 2i\sigma T) - \gamma \cos. \omega (\cos. 2i\sigma T - 1) \right];$$

c'est-à-dire qu'il faudra ajouter à sa longitude un angle égal à cette quantité.

On en dira autant de Saturne, avec cette seule différence qu'il faudra marquer les lettres d'un trait.

XC. Nous verrons plus bas dans l'Art. suiv. que les coefficients $i\nu$ & $i\sigma$ sont = environ $\frac{1}{10000}$; de sorte que durant plusieurs revolutions les angles $2i\nu T$ & $2i\sigma T$ seront absès petits pour qu'on puisse supposer, sans erreur sensible, $\sin. 2i\nu T = 2i\nu T$, $\sin. 2i\sigma T = 2i\sigma T$, & $\cos. 2i\nu T = 1$, $\cos. 2i\sigma T = 1$. Donc

1.° L'augmentation de l'excentricité de Jupiter fera à très-peu près dans la raison de $1 + i v \beta \sin. n \times T$ à 1 ; c'est-à-dire de $1 + \frac{iP}{b} b \sin. A \times T$ à 1 ; de sorte que la valeur de $i \delta$ croitra de la quantité $i \delta' \times \frac{iP}{b} \sin. A \times T$.

Or on fait que dans les ellipses qui sont peu excentriques, la plus grande équation est à très-peu près égale au double de l'excentricité ; d'où il s'enfuit que la plus grande équation de Jupiter ira en augmentant, & que sa variation sera, au bout de n revolutions à compter depuis l'époque donnée de,

$$2 i \delta' \times \frac{iP}{b} \sin. A \times 360^\circ n.$$

2.° La tangente de l'inclinaison de Jupiter à l'écliptique croitra de même d'une quantité égale à $i \lambda' \times \frac{iQ}{b} \sin. E \times T$, & comme cette tangente est fort petite, ainsi qu'on le verra plus bas, on aura pour la variation de l'inclinaison de Jupiter à l'écliptique pendant n revolutions

$$i \lambda' \times \frac{iQ}{b} \sin. E \times 360^\circ n.$$

3.° Le mouvement de l'aphelie sera représenté à très-peu près par $-(i \mu + \frac{i v \beta \cos. n}{1 + i v \beta \sin. n \cdot T}) T$, ou encore par $-(i \mu + i v \beta \cos. n) T + i^2 v^2 \beta^2 \cos. n \times \sin. n \times T^2$, c'est-à-dire par $-(\frac{i k}{b} + \frac{iP}{b} b \cos. A) T + \frac{iP}{b} b \sin. A (\frac{i k - i k'}{2 b} + \frac{iP}{b} b \cos. A) T^2$; où l'on voit que le terme $-(\frac{i k}{b} + \frac{iP}{b} b \cos. A) T$ exprime le mouvement moyen & uniforme de l'aphelie, & que le terme $\frac{iP}{b} b \sin. A (\frac{i k - i k'}{2 b} +$

$\frac{iP}{b}$ b cof. A) T^2 donne une inégalité du mouvement de l'aphélie, laquelle augmente comme les quarrés des tems.

Ainsi le mouvement moyen de l'aphélie de Jupiter fera pour n revolutions de cette Planète de

$$- \left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b cof. } A \right) 360^\circ n,$$

& l'inégalité croissante du mouvement de cet aphélie fera de

$$\frac{iP}{b} \text{ b fin. } A \left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b} \text{ b cof. } A \right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

4.^o Le mouvement des nœuds de Jupiter sera composé de même de deux parties, dont l'une croitra uniformément, & donnera le mouvement moyen du nœud de

$$- \left(\frac{il}{b} + \frac{iQ}{b} \text{ c cof. } E \right) 360^\circ n,$$

& dont l'autre suivra la loi du quarré du tems, & donnera une inégalité croissante de

$$\frac{iQ}{b} \text{ c fin. } E \left(\frac{il - il'}{2b} + \frac{iQ}{b} \text{ c cof. } E \right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

5.^o Le mouvement de Jupiter en longitude sera sujet à une altération de $\left(\frac{5i\delta^2\nu}{2} \beta \text{ fin. } \eta + \frac{i\lambda^2\nu}{2} \gamma \text{ fin. } \omega \right) T^2$ à très-peu

près, c'est-à-dire de $\left(\frac{5}{2} i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ fin. } A + \frac{1}{2} i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ fin. } E \right) T^2$; ce qui donne, comme l'on voit, dans le mouvement de cette Planète une inégalité croissante comme les quarrés des tems, & qui fera au bout de n revolutions de

$$\left(\frac{5}{2} i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ fin. } A + \frac{1}{2} i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ fin. } E \right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

On trouvera de la même manière

1.^o Que, pendant n révolutions de Saturne à compter depuis la même époque, la plus grande équation de cette Planète variera de

$$- 2 i \delta \times \frac{i P'}{b'} \sin. A \times 360^\circ n .$$

2.° Que l'inclinaison de son orbite à l'écliptique variera dans le même tems de

$$- i \lambda \times \frac{i Q'}{b'} \sin. E \times 360^\circ n .$$

3.° Que le mouvement moyen & uniforme de l'aphelie de Saturne sera exprimé par

$$- \left(\frac{i k'}{b'} + \frac{i P'}{b'} \times \frac{1}{b} \cos. A \right) 360^\circ n ,$$

& que de plus le mouvement de cet aphelie sera sujet à une inégalité croissante comme les quarrés des tems, laquelle sera pour n révolutions de

$$- \frac{i P'}{b'} \times \frac{1}{b} \sin. A \left(\frac{i k' - i k}{2 b'} + \frac{i P'}{b'} \times \frac{1}{b} \cos. A \right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2 .$$

4.° Que le mouvement moyen des nœuds de Saturne sera de

$$- \left(\frac{i l'}{b'} + \frac{i Q'}{b'} \times \frac{1}{c} \cos. E \right) 360^\circ n ,$$

& qu'il y aura aussi, dans le mouvement des nœuds de cette Planète, une inégalité de la même espèce, laquelle sera représentée par

$$- \frac{i Q'}{b'} \times \frac{1}{c} \sin. E \left(\frac{i l' - i l}{2 b'} + \frac{i Q'}{b'} \times \frac{1}{c} \cos. E \right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2 .$$

5.° Qu'enfin le mouvement de Saturne en longitude sera sujet à une inégalité croissante comme les quarrés des tems, & dont la valeur sera, au bout de n révolutions, de

$$- \left(\frac{5}{2} i \delta \times i \delta' \times \frac{i P'}{b'} \sin. A + \frac{1}{2} i \lambda \times i \lambda' \times \frac{i Q'}{b'} \sin. E \right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2 .$$

Au reste il faut se ressouvenir que ces propositions cessent d'être exactes, lorsqu'après un grand nombre des révolutions, les angles $2 i \nu T$, $2 i \sigma T$, & $2 i \nu' T'$, $2 i \sigma' T'$ commencent à devenir considérables.

XCI. Suivant les tables de M. Halley, le mouvement moyen de Jupiter en 100. années Juliennes est 8. rev.

5° 6' 28' 11", c'est-à-dire 10931291", d'où retranchant la precession séculaire des équinoxes, laquelle est de 5034" on a pour le mouvement séculaire de Jupiter 10926257".

Les mêmes tables donnent le mouvement moyen de Saturne en 100. ans de 3 rev. 4° 23' 6" 0", c'est-à-dire de 4403160", d'où l'on trouve pour le mouvement séculaire de Saturne 4398126".

On aura donc $\frac{b'}{b} = \frac{4398126}{10926257} = 0, 402528$; d'où

l'on tire $a = 0, 545169$.

De là on trouvera

$$A = 2, 178104$$

$$B = 3, 183228$$

$$C = 2, 080116$$

$$D = 1, 294032$$

&c.

$$P = 6, 891711$$

$$Q = 12, 403290$$

$$R = 9, 890764$$

$$S = 7, 315770$$

&c.

& ensuite

$$A_2 = - 0, 120125$$

$$A_3 = 0, 041029$$

$$A_4 = 0, 473042$$

$$B_2 = - 0, 143482$$

$$B_5 = - 0, 946083$$

$$P = 3, 997995$$

$$q = 8, 300535$$

$$r = 7, 306455$$

$$P_4 = - 0, 232789$$

$$P_7 = - 0, 184498$$

$$Q_5 = 0, 700695$$

$$A'_2 = 1, 310407$$

$$A'_3 = - 2, 744209$$

$$A'_4 = 0, 867697$$

$$B'_2 = 4, 793425$$

$$B'_5 = - 1, 735395$$

$$P_1 = - 10, 532304$$

$$q_1 = - 17, 850234$$

$$r_1 = - 13, 546971$$

$$P'_4 = - 3, 488506$$

$$P'_7 = 7, 537649$$

$$Q'_5 = - 4, 354384.$$

Donc, à cause de $\frac{J}{I} = \frac{1}{1067} = 0, 000937207$, &

de $\frac{J'}{I} = \frac{1}{3021} = 0, 000331016$, on aura

$$\frac{ik}{b} = - 0, 000078292$$

$$\frac{il}{b} = 0, 000078293$$

$$\frac{iP}{b} = 0, 000051192$$

$$\frac{iQ}{b} = - 0, 000078293$$

$$\frac{ik'}{b'} = - 0, 000406604$$

$$\frac{il'}{b'} = 0, 000406606$$

$$\frac{iP'}{b'} = 0, 000265701$$

$$\frac{iQ'}{b'} = - 0, 000406606$$

& l'on trouvera

$$i\mu = - 0, 000120981$$

$$i\nu = 0, 000085425$$

$$i\rho = 0, 000120981$$

$$i\sigma = 0, 000120981$$

$$i\mu' = - 0, 000300553$$

$$i\nu' = 0, 000212221$$

$$i\rho' = 0, 000300553$$

$$i\sigma' = 0, 000300553$$

Or selon M. Halley on a pour l'année 1750

$$i\delta = \frac{25078}{520098} = 0, 048218$$

$$i\delta' = \frac{54381}{954007} = 0, 057003$$

$$i\lambda = \text{tang. } 1^{\circ} 19' 10'' = 0, 023032$$

$$i\lambda' = \text{tang. } 2^{\circ} 30' 10'' = 0, 043710$$

$$\alpha = 6^{\circ} 10' 33' 46'', \quad \varepsilon = 3^{\circ} 8' 15' 49''$$

$$\alpha' = 8^{\circ} 29' 39' 58'', \quad \varepsilon' = 3^{\circ} 21' 20' 5''$$

d'où l'on tire

$$b = 1, 182190, \quad A = 79^{\circ} 6' 12'',$$

$$c = 1, 897725, \quad E = 13^{\circ} 4' 16''.$$

Si donc on substitue ces valeurs numériques dans les formules de l'Art. préc. on formera la Table suivante, dans laquelle n est le nombre des révolutions que Jupiter ou Saturne a achevées depuis le commencement de l'année 1750. que nous avons prise pour époque; de sorte qu'il faudra faire n positif pour les tems qui suivent cette époque, & négatif pour ceux qui la précédent.

TABLE de la variation des élémens de Jupiter
& de Saurne, suivant la théorie.

	De Jupiter	De Saurne
Variation de la plus grande équation du centre	+ 7", 4254 n	- 32", 6086 n
Variation de l'inclinaison à l'écliptique	- 1", 0030 n	+ 2", 7449 n
Mouvement moyen de l'aphélie par rapport aux étoiles fixes	+ 86", 6311 n	+ 471", 8632 n
Inégalité croissante dans le mouvement de l'aphélie	+ 0", 0262 n ²	+ 0", 1141 n ²
Mouvement moyen des nœuds par rapport aux étoiles fixes	+ 86", 1075 n	- 256", 4655 n
Inégalité croissante dans le mouvement des nœuds	+ 0", 0513 n ²	- 0", 0405 n ²
Inégalité croissante dans le mouvement en longitude	+ 2", 7402 n ²	- 14", 2218 n ²



A D D I T I O N

Pour les Articles LXXVIII. & LXXIX.

Nous avons dit dans le premier de ces deux Articles que la quantité $\int \Psi d\zeta$ contient un terme, qui par l'intégration se trouve divisé par des quantités de l'ordre de i ; & nous avons, en conséquence, conservé les termes où cette quantité se trouvoit multipliée par i^n , en rejettant toutes fois ceux, où la même quantité auroit été multipliée par i^n . Mais il est facile de se convaincre par la substitution des valeurs de ζ , & de ζ' (*Art. LXXXIV.*), que le diviseur du terme dont il s'agit sera réellement de l'ordre de i^n ; de sorte que, si on veut avoir égard dans les valeurs de y & de z aux quantités de l'ordre de i^2 , il n'est pas permis de négliger les termes de l'ordre de i^n , où se trouve la quantité $\int \Psi d\zeta$; car l'intégration réduira à l'ordre de i^2 les coefficients de ces termes. Il en sera de même de quelque termes de l'ordre de i qui se trouveront dans la quantité $n \int \Phi dy$.

Ainsi on trouve qu'il faut ajouter à la valeur de $\int \frac{dx^2}{d^2} dy$ le terme $- 2 i^n \int dy \int \Psi d\zeta$, & par conséquent

à la valeur de $\int \zeta^2 dy$ le terme $-\frac{4i^n}{3b^2} \int dy \int \Psi d\zeta$; d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (o) doit être augmenté du terme $4 i^n \int dy \int \Psi d\zeta$, & que le premier membre de l'équation (p) doit être augmenté du terme $- 8 i^n \int dy \int \Psi d\zeta$.

De là on trouvera, après avoir achevé toutes les opérations, qu'il faudra ajouter (*Art. LXXIX.*) à la valeur de Y les termes

$$8 i^3 (\beta - 2 \gamma) \int dy \int \Psi d\zeta + 12 i^3 \delta y \int \Phi dy \\ + 4 i^3 (\varepsilon - \eta h^2) y \int \Psi d\zeta,$$

& à la valeur de Z les termes

$$12 i^3 \pi z \int \Psi dz + 4 i^2 (\rho - \sigma h^2) z \int \Phi dy.$$

Au reste cette omission n'influe point sur le reste de nos calculs.



EXTRAIT DE DIFFERENTES LETTRES

DE M. D'ALEMBERT A M. DE LA GRANGE

écrites pendant les années 1764. & 1765.

I.

Votre problème sur l'intégration de l'équation $P y + \frac{Q dy}{dx} + \frac{R d^2 y}{dx^2} \dots + \frac{M d^m y}{dx^m} = X$, lorsque l'on a $m - 1$ valeurs de x dans l'équation $P y + \frac{Q dy}{dx} + \frac{R d^2 y}{dx^2} + \dots + \frac{M d^m y}{dx^m} = 0$, m'a paru si beau, que j'en ai cherché une solution que voici.

Soit $y = V \zeta$, V étant une indéterminée, & ζ une des valeurs de y qui satisfait à l'équation $P y + \frac{Q dy}{dx} + \dots + \frac{M d^m y}{dx^m} = 0$, & soit substituée cette valeur dans l'équation $P y + \frac{Q dy}{dx} + \dots + \frac{M d^m y}{dx^m} = X$; la transformée sera composée 1.^o d'une partie $V' (P \zeta + \frac{Q dz}{dx} \dots + \frac{M d^m z}{dx^m})$, où X ne se trouvera point, laquelle sera évidemment $= 0$, à cause de $P \zeta + \frac{Q dz}{dx} + \dots + \frac{M d^m z}{dx^m} = 0$ (*hyp.*) 2.^o d'une partie où V ne se trouvera point, & qui ne contenant que dV avec ses différences jusqu'à $d^m V$ inclusivement, pourra par conséquence être abaissée au $(m - 1)^e$ degré, en faisant $dV = V' dx$; or puisqu'on a $m - 1$ valeurs de y , que $y = V \zeta$, & que ζ est déjà une des valeurs de y , on aura donc $m - 2$ valeurs de V , en n'y comprenant pas l'unité; donc supposant que ζ' soit une de ces valeurs, & faisant $V' = \zeta' f V'' dx$, com-

me on a fait $y = \zeta \int V' dx$, on abaissera de même l'équation en V' , & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui sera de cette forme $dV'''' \&c. + K V'''' \&c. dx = X$, K & X étant des fonctions de x . Or on fait que cette équation est intégrable.

Il est aisé de voir par cet exposé, 1.^o qu'à chaque transformation il dispaeroit un des coëfficiens, savoir celui de y par la première, celui de dy par la seconde &c., enforte que dans la dernière transformée il ne restera que les deux coëfficiens de $d^m y$ & $d^{m-1} y$; or si on a une quantité de cette forme $\frac{\omega d^{m-1} \lambda}{dx^{m-1}} + \frac{\beta d^m \lambda}{dx^m}$, & qu'on fasse $d\lambda = \zeta \eta dx$, on aura dans la transformée (en laissant à part les autres termes) 1.^o $\beta \zeta$ à la place de β & $\frac{d^{m-1} \eta}{d\lambda^{m-1}}$ à la place de $\frac{d^m \lambda}{dx^m}$. 2.^o $[\omega \zeta + \frac{\beta d \zeta}{dx} \chi(m-1)] \frac{d^{m-2} \eta}{dx^{m-2}}$ au lieu de $\frac{\omega d^{m-1} \lambda}{dx^{m-1}}$. Donc si on suppose que $\frac{Nd^{m-1} y}{dx^{m-1}} +$

$\frac{Md^m y}{dx^m}$ soient les deux derniers termes du premier membre de la proposée, & qu'on fasse $y = \zeta \int \zeta' dx \int \zeta'' dx \int \zeta''' \dots \int V'''' \&c. dx$, il sera aisé de trouver, par la remarque précédente, la forme de la dernière transformée, d'où l'on tirera aisément la valeur de $V'''' \&c.$ Je ne fais, Monsieur, qu'indiquer l'opération, qui seroit très-simple & très-courte; vous supplerez aisément à ce que je ne dis pas.

II.

Vous me marquez que lorsque $y = f + hx$, f & h étant des constantes, vous trouvez moyen de satisfaire à l'équation $\phi(x + y \sqrt{-1}) - \phi(x - y \sqrt{-1}) = 2M \sqrt{-1}$, en prenant $\phi x = \frac{M \log. (f + bx)}{\theta \pi} + A(f + hx)^{\frac{\mu}{\theta}} + B$, A & B étant des constantes ar-

bitraires, μ un nombre quelconque entier, π le rapport de la circonférence au diamètre, & θ un nombre tel, que la tangente de $\theta\pi = h$. J'ai trouvé, par une méthode assez simple, le moyen d'arriver à cette élégante formule, & même à une plus générale. Voici d'abord comment j'arrive à votre formule.

Je considère en premier lieu que $(1 + h\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, A & B étant les *cosinus* & *sinus* de m fois l'angle dont la tangente est h ; c'est ce que j'ai démontré le premier dans les Mém. de Berlin 1746. & ailleurs; donc si $(1 + h\sqrt{-1})^m - (1 - h\sqrt{-1})^m = 0$, on aura $B = 0$, donc B est le *sinus* de $\mu\pi$, π étant la demi-circonférence, & μ un nombre entier positif ou négatif; donc si $h = \text{tang. } \theta\pi$, on aura $\mu\pi = m\theta\pi$, donc $m = \frac{\mu}{\theta}$.

Je considère en second lieu, que $\log. (x + hx\sqrt{-1}) - \log. (x - hx\sqrt{-1}) = \log. \left(\frac{1 + b\sqrt{-1}}{1 - b\sqrt{-1}} \right) = 2\sqrt{-1} \int \frac{db}{1 + bb} = 2\sqrt{-1} \chi \theta\pi$. De là il est aisé de voir que

si on fait $\phi(x) = \frac{M \log. (f + bx)}{\theta\pi} + A(f + hx)^{\frac{\mu}{\theta}} + B$, on aura $\phi(x + y\sqrt{-1}) - \phi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$; ce qui se verra facilement, en mettant $x \pm y\sqrt{-1}$ au lieu de x dans la valeur de ϕx , & ensuite $f + hx$ au lieu de y .

Or il est aisé de voir qu'au lieu de $A(f + gx)^{\frac{\mu}{\theta}}$ dans la valeur de ϕx , on peut écrire une suite de termes tels que $A[(f + gx)^{\frac{k}{\theta}} + \lambda]^p$, A & λ étant des constantes arbitraires, & p , k des nombres entiers posi-

rifs ou négatifs. On peut même écrire dans tous, ou dans plusieurs de ces termes. (que j' appelle ξ pour abréger) e^{ξ} au lieu de ξ .

On remarquera de plus que θ peut avoir une infinité de valeurs ; car soit $\theta \pi$ le plus petit angle dont la tangente est h , cette tangente sera aussi celle de l'angle $(\theta' \pm 2n) \pi$, n étant un nombre quelconque positif ; donc au lieu de θ on peut mettre $\theta' \pm 2n$. Par la même raison au lieu du terme $\frac{M \log. (f + bx)}{\theta \pi}$, on pourra substituer une suite de termes $A \log. (f + hx)^r + A' \log. (f + hx)^{r'} + \&c.$, pourvu que l'on ait $M = Ar (\theta \pm 2n) \pi + A' r' (\theta' \pm 2n') \pi \&c.$

En général on pourra trouver par une méthode semblable la valeur de ϕx dans l'équation

$$a \phi (ax + \beta y \sqrt{-1}) + a' \phi (a'x + \beta' y \sqrt{-1}) + \&c. = 0;$$

dans l'hypothèse que $y = f + hx$. Pour cela il suffira de considérer, que si on élève $\alpha + \beta h \sqrt{-1}$ à la puissance $m + k \sqrt{-1}$ on aura, suivant mes formules des Mém. de Berlin 1746., $(\alpha + \beta h \sqrt{-1})^{m+k\sqrt{-1}} =$

$$A + B \sqrt{-1}, \quad A \text{ étant } [(\alpha^2 + \beta^2 h^2)^{\frac{m}{2}} c^{-k(\theta \pi \pm 2n\pi)}] \\ \times [\cos. (k \log. \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 h^2)} + m(\theta \pm 2n)\pi)], \quad \&$$

$B = [(\alpha^2 + \beta^2 h^2)^{\frac{m}{2}} c^{-k(\theta \pi \pm 2n\pi)}] \sin. [k \log. \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 h^2)} + m(\theta \pm 2n)\pi]$; on trouvera de même la valeur de A' , & celle de B' en a' & en β' &c.; & il ne restera qu'à faire $aA + a'A + a''A'' + \&c. = 0$; $bB + b'B + b''B'' + \&c. = 0$, ce qui donnera toujours m & k , au moins par une construction géométrique; d'où il sera facile de tirer, par une méthode semblable à la précédente, la valeur de k . De même si on fait $b \log. (\alpha + \beta \sqrt{-1}) + b' \log. (a' + \beta' \sqrt{-1}) + \&c. = 2M + 2N \sqrt{-1}$, (M & N étant données) on dé-

terminera b & b' par une semblable méthode; je n'en présente ici, Monsieur, que l'esprit & l'idée générale; cette légère idée suffit à un aussi grand Géomètre que vous, pour voir tout ce qu'on en peut tirer.

Si au lieu de x on mettoit une fonction quelconque X de x , enforte que $a \varphi (aX + \beta y \sqrt{-1}) + a' \varphi (aX + \beta' y \sqrt{-1}) + \&c.$ dût être $= 0$, on trouveroit de même la valeur de φaX , pourvu que y fut $= f + hX$. Si le second membre de l'équation, au lieu d'être $= 0$ étoit $= Kx^m$, alors il faudroit faire $(a + \beta \sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, $(a' + \beta' \sqrt{-1})^m = A' + B'\sqrt{-1}$; &, prenant ω pour un coëfficient indéterminé, supposer $\omega a (A + B\sqrt{-1}) + \omega a' (A' + B'\sqrt{-1}) + \&c. = K$, ce qui donnera ω . Si le second membre étoit $Kx^m + K'x^{m'} + \&c.$ on feroit de plus $(a + \beta \sqrt{-1})^{m'} = (A) + (B)\sqrt{-1}$, & on prendroit $\omega' a [(A) + (B)\sqrt{-1}] + \omega' a' [(A') + (B')\sqrt{-1}] + \&c. = K'$, & ainsi du reste. Si le second membre étoit $K \log. x + M$; alors il faudroit faire $a \omega \log. x (a + \beta \sqrt{-1}) + a' \omega \log. x (a' + \beta' \sqrt{-1}) + \&c. = K \log. x + M$; d'où l'on tirera $a \omega + a' \omega + \&c. = K$, & supposant $\log. a + \beta \sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$, &c., on auroit $a \omega (A + B\sqrt{-1}) + a' \omega (A' + B'\sqrt{-1}) + \&c. = M$. Mais en voila assez sur ce sujet.

Au reste, ces formules ne peuvent avoir, ce me semble, aucune application pour trouver le mouvement d'un fluide dans un vase dont les parois auroient pour équation $y = f + hx$; & on peut même remarquer, que toutes les fois que l'équation des parois donnera $y = 0$ pour une seule valeur de x à volonté, l'équation $\varphi (x + y \sqrt{-1}) - \varphi (x - y \sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$ sera illusoire pour représenter le mouvement du fluide. Car d'abord on aura $M = 0$ dans la courbe des parois, puisque $y = 0$ donne $M = 0$; or M ne sauroit être $= 0$ dans les autres cour-

bes, puisqu'elles ne sont distinguées de la courbe des paroïs que par la valeur de M ; donc ces courbes ne sauroient couper, ni l'axe, puisque y seroit alors $= 0$, ce qui donneroit $M = 0$, ni la courbe des paroïs, puisque dans le point commun aux deux courbes M seroit nécessairement $= 0$ dans l'une, comme il l'est (*hyp.*) dans l'autre; ces courbes ne pourroient donc que rentrer en elles-mêmes, & par conséquent ne représenteroient pas le mouvement progressif; ce qui peut d'ailleurs se voir aisément à *priori*.

I I I.

Voici de quelle manière je m'y prends pour trouver, dans l'équation du problème des trois corps, la valeur du rayon par approximation, sans être obligé de substituer, à chaque opération, la valeur du rayon trouvée dans l'opération précédente.

Soit par exemple $d d t + N^2 t d z^2 + \beta t \cos. p z = 0$; je remarque que, par la nature de la solution que j'ai donnée de ces sortes d'équations, tout terme de cette forme $+ \omega \cos. \lambda z$ dans la valeur de t , produira dans $\beta t \cos. p z$, deux termes de cette forme $-\frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \chi \omega \cos.$

$$(\lambda z + p z) - \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \chi \omega \cos. (\lambda z - p z),$$

& deux autres de cette forme $+\frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \chi$

$\omega \cos. N z + \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \chi \omega \cos. N z$. Donc prenant,

par exemple, $k \cos. N z$ pour la première valeur de t , il n'y a qu'à 1.^o augmenter & diminuer successivement N

de $+ p$ & de $- p$, multiplier k par $-\frac{\beta}{2}$ & diviser le

produit par N^2 moins le quarré du coëfficient de z . 2.^o écrire chaque terme ainsi trouvé, l'un dans une colonne verti-

cale à droite, l'autre dans une colonne verticale à gauche, de celui qu'on vient d'avoir par l'opération précédente, & sous la colonne dont le terme le plus haut est $k \text{ cof. } N\zeta$, mettre de suite les coefficients de $\text{cof. } N\zeta$ semblables à ceux qu'on vient d'indiquer, & qui peuvent se réduire à un seul, savoir $+$ $\frac{\beta \omega (N^2 - \lambda^2 - p^2)}{(N^2 - \lambda^2 - p^2)^2 - 4\lambda^2 p^2} \text{ cof. } N\zeta$. De là il est

$$\frac{\beta k \text{ cof. } (Nz \pm pz)}{2(N^2 - (N \pm p)^2)} + \frac{\beta \beta k \text{ cof. } (Nz \pm 2pz)}{2.2.(N^2 - (N \pm 2p)^2) \times (N^2 - (N \pm p)^2)}$$

$$\frac{\beta^3 k \text{ cof. } (Nz \pm 3pz)}{2.2.2.(N^2 - (N \pm 3p)^2) \times (N^2 - (N \pm 2p)^2) \times (N^2 - (N \pm p)^2)}$$

$$+ \frac{\beta^4 k \text{ cof. } (Nz \pm 4pz)}{2^4 (N^2 - (N \pm 4p)^2) \times (N^2 - (N \pm 3p)^2) \times (N^2 - (N \pm 2p)^2) \times (N^2 - (N \pm p)^2)}$$

- &c., le signe $+$ étant pour les colonnes à droite de celle où est $k \text{ cof. } N\zeta$, & le signe $-$ pour les colonnes à gauche. A l'égard du terme $k \text{ cof. } N\zeta$, il sera de même succes-

$$\text{sivement augmenté des termes } + \frac{\beta k \text{ cof. } Nz}{2(N^2 - (N \pm p)^2)}$$

$$- \frac{\beta \beta k \text{ cof. } Nz}{2.2.(N^2 - (N \pm 2p)^2) \times (N^2 - (N \pm p)^2)} + \frac{\beta^3 k \text{ cof. } Nz}{2.2.2. \&c.}$$

lesquels en produiront eux mêmes de nouveaux, analogues à ceux que le terme $k \text{ cof. } N\zeta$ a produit. Vous verrez aisément, Monsieur, par cette vuë générale, comment on peut trouver facilement les différens termes successifs de la série qui exprime la valeur de t . Si on avoit $\lambda \pm p = N$, le dénominateur seroit $= 0$; en ce cas au lieu des quatre nouveaux termes que le terme $\omega \text{ cof. } (\lambda \zeta \pm p \zeta)$ produit dans la valeur de t , il faudroit seulement changer le coefficient N de $N\zeta$ en un autre N' , tel que N'^2 fût $= N^2 + \frac{\beta R}{2k'}$, k' étant le coefficient de $\text{cof. } N\zeta$ dans la valeur de t trouvée par les opérations précédentes, & R le coefficient du terme $R \text{ cof. } (N\zeta \pm p\zeta)$ qui multiplié par $\beta \text{ cof. } pz$

donnera dans la différentielle un nouveau terme de la forme $d\zeta^2 \text{ cof. } N\zeta$. Le fondement de cette méthode se trouve dans mes Recherches sur le système du monde pag. 37., 244., 245. &c. Il faut cependant apporter à ce que je viens de dire, une modification suffisamment expliquée à la page 242. de ce même Ouvrage & qui fait distinguer les cas où le dénominateur $N^2 - (\lambda + p)^2$ devenant $= 0$, change simplement le coefficient K , & ceux où il donne réellement des arcs de cercle dans la valeur du rayon.

I V.

J'ai lu, Monsieur, avec autant de plaisir que de fruit, votre belle Pièce sur la libration de la Lune bien digne du prix qu'elle a remporté; elle m'a fait faire sur la solution de ce problème plusieurs reflexions qui me meneroient trop loin; je me bornerai à une seule qui a rapport au problème de la précession des équinoxes, lequel est du même genre que celui de la libration de la Lune; c'est que toutes les solutions qu'on a données jusqu'à présent de ce problème, ont une imperfection dont personne ne s'est aperçu. Pour la faire connoître en peu de mots, supposons que les deux équations du problème soient

$$\Psi d\zeta^2 = d(d\varepsilon \text{ cof. } \pi^2) + k' d\zeta d(\sin. \pi) \dots (A) \text{ \& } \\ d d \pi = \Gamma d\zeta^2 - d\varepsilon^2 \text{ cof. } \pi \sin. \pi + k' d\varepsilon d\zeta \text{ cof. } \pi \dots (B);$$

Ψ & Γ étant des fonctions qui dépendent des forces perturbatrices. En réduisant, comme on le suppose ordinairement, ces équations à

$$\Psi d\zeta = k' d(\sin. \pi) \text{ \& } \Gamma d\zeta - k' d\varepsilon \text{ cof. } \pi = 0,$$

$d\varepsilon$ & $d\pi$ ne seroient point égaux à zéro, lorsque $\zeta = 0$; il est pourtant aisé de voir qu'ils le doivent être.

Pour se tirer de cette difficulté, il faut intégrer ces équations plus rigoureusement; d'abord on supposera $\pi = \pi' + \alpha$, π' étant la valeur de π lorsque $\zeta = 0$; & α une quantité fort petite, & on aura, en négligeant les termes très-

très-petits, & supposant pour plus de généralité $\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = \mu$ lorsque $\zeta = 0$, $d\varepsilon = \frac{d\zeta f' \Psi d\zeta}{\text{cof. } \pi^2} + \mu d\zeta - k' \alpha \frac{d\zeta}{\text{cof. } \pi}$; & $d d \alpha + \alpha k'^2 d \zeta^2 - k' \frac{d\zeta f' \Psi d\zeta}{\text{cof. } \pi} - k' \mu \text{cof. } \pi d \zeta^2 - \Gamma d \zeta^2 = 0$. Donc faisant encore $\frac{d\alpha}{d\zeta} = \nu$ lorsque $\zeta = 0$, on aura la valeur de α par les méthodes d'intégration connues, & ensuite celle de $d\varepsilon$. Si on suppose μ & $\nu = 0$, ces valeurs seront $= 0$, lorsque $\zeta = 0$, comme elles le doivent être; & en négligeant dans les valeurs de α & de ε les termes très-petits, on retombera dans les mêmes valeurs que donneroient les équations $\Psi d\zeta = k' d\zeta \sin. \pi$ & $\Gamma d\zeta + d\varepsilon k' \text{cof. } \pi = 0$.

V.

Je suis charmé que nous soyons enfin presque absolument d'accord sur le problème des cordes vibrantes. Vous avez reconnu, suivant ce que vous me dites, que la solution ne peut avoir lieu, comme je le prétendois, si les branches alternatives ne sont pas assujetties à la loi de continuité; vous y mettez seulement une restriction, la solution peut avoir lieu, selon vous, si la courbe initiale n'est assujettie à aucune équation, pourvu que dans cette courbe $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne fasse de saut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives. Mais comment concevez vous qu'il puisse ne point y avoir de pareils sauts dans une courbe tracée au hasard, & qui ne sera assujettie, comme vous l'exigez, à aucune équation? Il me paroît que cette propriété ne peut appartenir qu'à une courbe régulièrement tracée, & assujettie à une équation; en effet pour que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne fasse de saut nulle part, il faut qu'en

prenant une partie infiniment petite de la courbe partout ou l'on voudra, & y faisant commencer les coordonnées, on puisse supposer que dans cette petite portion y soit égale à $A + Bx^m + Cx^n + Dx^p + \&c.$ Prenons maintenant une petite partie contigue à celle-là, on aura par la même raison $y = A' + B'x^{m'} + C'x^{n'} + D'x^{p'} + \&c.$ Or si les exposans m & m' , n & n' , p & p' &c. n'étoient pas les mêmes, & si les coefficients A & A' , B & B' , C & C' &c. n'étoient pas tels qu'il doivent être pour appartenir à une courbe continue, il y auroit un saut dans quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ au point commun qui unit ces deux parties infiniment petites. Donc puisqu'on suppose qu'il n'y a point de saut dans $\frac{d^n y}{dx^n}$, il s'ensuit que ces deux parties, & par la même raison toutes les suivantes à droite & à gauche, sont assujetties à une même équation. D'ailleurs quand il seroit vrai que la solution seroit applicable à certaines courbes tracées au hasard, comment s'assurera-t-on que dans ces courbes $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'y fera point de saut? condition nécessaire, selon vous, pour que la solution soit applicables à ces courbes. Vous trouverez, Monsieur, beaucoup d'autres réflexions sur cette matière dans un long Mémoire que je destine au quatrième Volume de mes Opuscules. En attendant je désire beaucoup de savoir votre avis sur les observations que j'ai l'honneur de vous proposer, & je ne désire pas moins que cet avis nous rapproche entièrement quant au point sur lequel nous différons encore, & qui me semble purement métaphysique.

Je ne pense pas au reste que la solution ne puisse avoir lieu dans une courbe à équation, si elle n'est représentée par $y = \alpha \sin. \pi x + \beta \sin. 2 \pi x + \gamma \sin. 3 \pi x + \&c.$ à la manière de M. Daniel Bernoulli. Il me paroît évi-

dent au contraire que la solution peut avoir lieu dans beaucoup d'autres courbes, par exemple dans celle qui

auroit pour équation $y = a \sin. \pi x^{\frac{p}{q}}$, a étant fort petit, & p, q des nombres impairs, tels que p soit $> q$, afin que dy ne soit nulle part $= \infty$, ce qui est contre l'hypothèse, sur laquelle la solution est appuyée. Je fais que dans ces courbes il y auroit quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ qui seroit infini; mais cela n'empêche pas, ce me semble, la solution d'être bonne, il suffit que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne fasse point de saut, c'est-à-dire ne passe pas brusquement du fini à l'infini, ou de l'infini au fini, ou d'une valeur finie à une autre valeur finie.

V I.

Votre formule pour exprimer par une suite sans imaginaires la valeur de $\phi(x + y\sqrt{-1}) + \phi(x - y\sqrt{-1})$, ou celle de $\frac{\phi(x + y\sqrt{-1}) - \phi(x - y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ me paroît très-

élégante. J'en ai imaginé une toute différente pour parvenir au même objet, & qui a cet avantage, que quand ϕx est $= Ax^m + Bx^n + \&c.$ m & n étant des nombres entiers positifs, la suite n'a qu'un nombre fini de termes, comme il arrive dans la formule du Binome. Il seroit trop long de vous exposer ici tout le procédé du calcul, qui peut même être encore plus simplifié que je n'ai fait jusqu'à présent; je vous dirai seulement qu'il est fondé sur les considérations suivantes.

$$1.^{\circ} \phi(x + y) = \phi x + y \frac{d\phi x}{dx} + y^2 \frac{d^2\phi x}{2 dx^2} + y^3 \frac{d^3\phi x}{2.3 dx^3} + \&c., \&c.$$

$$\varphi(x + by\sqrt{-1}) = \varphi x + by\sqrt{-1} \frac{d\varphi x}{dx} - b^2 y^2 \frac{d^2 \varphi x}{2 dx^2} - b^3 y^3 \sqrt{-1} \frac{d^3 \varphi x}{2.3 dx^3} + b^4 y^4 \frac{d^4 \varphi x}{2.3.4 dx^4} + \&c.$$

$$2.^{\circ} \varphi(x + y) - \varphi x = y \frac{d\varphi x}{dx} + y^2 \frac{d^2 \varphi x}{2 dx^2} + y^3 \frac{d^3 \varphi x}{2.3 dx^3} + \&c.$$

Donc $\varphi(x + 2y) - \varphi(x + y) - [\varphi(x + y) - \varphi x]$, ou $\varphi(x + 2y) - 2\varphi(x + y) + \varphi x$, se trouvera, en mettant dans chaque terme $Ay^n \frac{d^n \varphi x}{dx^n}$ du second membre, au

$$\text{lieu de } \frac{d^n \varphi x}{dx^n}, \frac{d^n \varphi(x + y)}{dx^n} - \frac{d^n \varphi x}{dx^n} = y \frac{d^n \varphi x}{dx^n} + y^2 \frac{d^{n+1} \varphi x}{2 dx^{n+1}} + y^3 \frac{d^{n+2} \varphi x}{2.3 dx^{n+2}} + \&c. \&c.;$$

d'où il est aisé de conclure qu'en général $\varphi[x + my] - m\varphi[x + (m-1)y] + \frac{m(m-1)}{2} \varphi[x + (m-2)y] - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$

$$\varphi[x + (m-3)y] + \&c. \text{ est } = Ay^m \frac{d^m \varphi x}{dx^m} + By^{m+1} \frac{d^{m+1} \varphi x}{dx^{m+1}} + \&c. A \& B \&c. \text{ étant des coefficients}$$

qu'il est très-aisé de déterminer; on peut même imaginer pour cela des méthodes très-simples, dans le détail desquelles il seroit trop long d'entrer, & qui donneront la loi de ces coefficients.

Cela posé, on fera

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x = y\sqrt{-1} \frac{d\varphi x}{dx} - y^2 \frac{d^2 \varphi x}{2 dx^2} - y^3 \sqrt{-1} \frac{d^3 \varphi x}{2.3 dx^3} + y^4 \frac{d^4 \varphi x}{2.3.4 dx^4} + \&c.$$

$$\varphi(x + y) - \varphi x = y \frac{d\varphi x}{dx} + y^2 \frac{d^2 \varphi x}{2 dx^2} + y^3 \frac{d^3 \varphi x}{2.3 dx^3} + \&c.$$

$$\varphi(x+2y) - 2\varphi(x+y) + \varphi x = ay^2 \frac{d^2\varphi x}{dx^2} + by^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + cy^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \&c.$$

$$\varphi(x+3y) - 3\varphi(x+2y) + 3\varphi(x+y) - \varphi x = a'y^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + b'y^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \&c.$$

&c.

a, b, c &c. & a', b', c' &c. étant des coefficients connus, & trouvés par ce qu'on vient de dire; on multipliera ensuite la seconde équation par r , la troisième par r' , la quatrième par r'' &c. r, r', r'' étant des coefficients indéterminés, & après les avoir ajoutées ensemble on fera chaque terme du second membre = 0, ce qui donnera

$$\sqrt{-1} + r = 0, \quad -\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + ar' = 0, \quad \frac{\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{r}{2.3} + br + a'r'' = 0 \text{ \&c.},$$

& ainsi de suite; d'où l'on tirera r, r', r'' &c. & le problème sera résolu.

Je ne fais ici, Monsieur, qu'indiquer les principaux points de la solution, qu'il est d'ailleurs aisé de simplifier, ainsi que je l'ai déjà dit. Je crois au reste que toutes ces méthodes pour déterminer $\varphi(x + by\sqrt{-1})$ sont plus curieuses qu'utiles; car 1.° si φx n'est point une fonction algébrique, mais une fonction discontinue, en ce cas il y aura un *saut* dans quelqu'un des $d^n\varphi x$, & par conséquent l'expression trouvée ci-dessus de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x$, ou toute autre, je crois, qu'on y voudroit substituer, sera fautive, si je ne me trompe. 2.° si φx est algébrique, on peut imaginer différentes méthodes pour déterminer algébriquement, ou au moins géométriquement, les quantités $\varphi(x + by\sqrt{-1}) + \varphi(x - by\sqrt{-1})$ ou $\frac{\varphi(x + by\sqrt{-1}) - \varphi(x - by\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$.

J'oublie de vous faire remarquer que si, par exemple, $\varphi x = x^m$, la série que je propose se terminera après le terme $\varphi [x + my] - m \varphi [x + (m-1)y] + \frac{m \cdot m-1}{2}$
 $\varphi [x + (m-2)y] + \&c.$; car si, par exemple, $m = 2$, on aura $\varphi (x + 3y) - 3 \varphi (x + 2y) + 3 \varphi (x + y) - \varphi x = 0$.

En général on aura

$$\begin{aligned} \varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x &= +r\varphi x - r'\varphi x + r''\varphi x - \&c. \\ -r\varphi(x + y) + 2r'\varphi(x + y) - 3r''\varphi(x + y) + \&c. \\ -r'\varphi(x + 2y) + 3r''\varphi(x + 2y) - 3r''\varphi(x + 2y) + \&c. \\ +r''\varphi(x + 3y) + 4r'''\varphi(x + 3y) - 10r'''\varphi(x + 3y) + \&c. \\ \&c. \text{ ainsi de suite.} \end{aligned}$$

Il est aisé de voir aussi que si on eût cherché de même la valeur de $\varphi(x - y\sqrt{-1}) - \varphi x$, & combiné les deux opérations ensemble, il en seroit résulté beaucoup d'abréviation dans le calcul; par exemple on a $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2\varphi x - 2y^2 \frac{d^2 \varphi x}{2 dx^2} + 2y^4 \frac{d^4 \varphi x}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \&c.$ & $\varphi(x + y) + \varphi(x - y) = 2\varphi x + 2y^2 \frac{d^2 \varphi x}{2 dx^2} + 2y^4 \frac{d^4 \varphi x}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \&c.$; d'où il est facile de conclure que les y^2 , y^6 , y^{10} , &c. disparaîtront; ce qui simplifiera beaucoup les formules.

V I I.

Je dois vous faire observer, à l'occasion de mes Recherches sur les verres optiques, insérées dans le troisième Tome de mes Opuscules, que la substitution prescrite dans l'Art. 441. de $\frac{1-m}{r} + \frac{m}{s}$ à la place de $\frac{1}{s'}$ doit donner de plus dans le résultat final le terme $+ \frac{P-1}{2\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$ qui a été omis par inadvertance, sans que cette omission touche en rien au fond de ma méthode pour trouver

l'aberration, lorsque le point lumineux est hors de l'axe; méthode que vous trouverez, je crois, plus naturelle & plus simple que celles qui ont été employées par d'autres Géomètres pour résoudre le même Problème. Quoiqu'il en soit, la restitution de ce terme a simplifié beaucoup mes formules pour l'aberration latitudinale, & m'a donné les dimensions de deux excellens objectifs, composés chacun de deux lentilles de verre commun ou *crownglafs*, & d'une de crystal d'Angleterre ou *flintglafs*, qui est entre les deux autres, & collée contre elles. Voici les dimensions de ces objectifs; R étant la distance focale, & r, r', r'', r''' , les rayons des quatre surfaces, on a pour l'un des objectifs

$$\begin{aligned} r &= +0,5986R \\ r' &= -0,3255R \\ r'' &= +0,7288R \\ r''' &= -1,8116R \end{aligned}$$

& pour l'autre

$$\begin{aligned} r &= +0,4630R \\ r' &= +2,7574R \\ r'' &= +0,2081R \\ r''' &= -15,594R. \end{aligned}$$

Ces deux objectifs ont chacun cela d'excellent, qu'ils resteroient encore très-bons, quand on commettrait dans les valeurs de r, r' &c. des erreurs considérables. C'est ce que je me propose de détailler plus au long, soit dans les Mém. de l'Académie des Sciences de Paris, soit dans le quatrième Volume de mes Opuscules.

Au reste les dimensions que je viens de donner supposent que le rapport de dP à dP' soit $\frac{2}{3}$; il est inutile de dire qu'elles changeroient si $\frac{dP}{dP'}$ avoit une autre va-

leur, par exemple celle de 20 à 32; comme plusieurs expériences le donnent; dans ce cas l'aberration de réfrangibilité ne seroit pas détruite, mais $= \frac{11}{45}$ de celle d'une lentille biconvexe isocèle, ce qui est considérable; mais il est aisé de remédier à cet inconvénient par différens moyens qu'il seroit trop long de détailler ici.

F I N.

ERRATA PARTIS PHYSICAE

Sic corrigenda.

- Pag.* 41. *lin.* 6. quam vis affricus - quum vis affricus.
P. 49. *l.* 10. conversa sunt vel angulum - conversa sunt, &
 vel angulum.
P. 61. *l.* 23. ab infima ad supremum - ab infima ad supre-
 mam.
P. 165. *l.* 7. quos in calida - - - quos in calidam.
l. 18. in ignem diffabilem - - in igne diffabilem.
P. 166. *l.* 2. atque insuper deprehendimus - atque adeo depre-
 hendimus.

Ad *P.* 174. thermometrum reaurianum de quo hic, & alibi in praecedentibus Tomis mentio fit erat mercuriale, cujus scala inter frigus liquefcentis glaciei, & calorem aquae ebullientis in octuaginta gradus divisa erat: quae monenda esse censuimus, quum hujusmodi gradus a similibus gradibus thermometri spiritu vini confecti, qualia sunt reauriana, ob varias, ut notum est causas, valde dissentiant.

- P.* 180. *l.* 11. Botanicas - - - Botanices.
P. 199. *l.* 4. nigruans, ventre ad - nigricans, ventre ad
P. 204. *l.* 16. 24. agarium - - - agaricum.
P. 210. *l.* 25. Ignotam - - - ignotum.
P. 215. *l.* 16. pervia est - - - pervia est.
l. 25. duplicis densa - - - duplici densa.
l. 27. parviis - - - parvis.

Fautes à corriger dans les Mémoires de M.^{rs} DE LA GRANGE
& D'ALEMBERT.

Page 185. ligne dernière au lieu de à la fin de l'Article précédent lisez par l'autre méthode.

P. 189. l. 4. à compter d'en bas au lieu du terme $+ q$ lisez $+ q^2$.

P. 214. l. 7. à la fin effacez 1.

P. 216. l. 5. à compter d'en bas mettez le signe — avant le second membre de l'équation.

P. 249. l. prem. au lieu de la méthode lisez par la méthode.

P. 258. l. 6. à compter d'en bas au lieu de le nombre a lisez le nombre n.

P. 265. l. 6. & 11. au lieu de $\sqrt{\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)}$ lisez

$\sqrt{\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2N\right)}$.

P. 272. l. 4. au lieu de $\frac{15M^2}{12K^2}$ lisez $\frac{5M^2}{12K^2}$.

P. 315. l. 2. & 3., & au lieu de *sin.* $(h' + im) t$ lisez *sin.* $(h + im) t$, au lieu de *cos.* $(h' + im) t$ lisez *cos.* $(h + im) t$.

Même page l. 3. & 5. à compter d'en bas au lieu de $4h'(m_1 - m_2)$ au dénominateur lisez $4h(m_1 - m_2)$.

P. 323. l. 5. à compter d'en bas au lieu d'espace lisez espèce.

P. 326. l. 12. à compter d'en bas au lieu de S lisez s.

P. 381. l. 6. à compter d'en bas au lieu de conséquence lisez conséquent.

P. 388. l. 7. à compter d'en bas au lieu de $-k'd\epsilon \cos. \pi$ lisez $+k'd\epsilon \cos. \pi$.

P. 394. l. 10. au lieu de $-3r''\phi(x + 2y)$ lisez $-6r''\phi(x + 2y)$.

Imprimatur. PISELLI Vic. Generalis S.Officii Taurini.

Se ne permette la stampa

GALLI per la Gran Cancelleria.

Department of the Interior, Bureau of Land Management

Washington, D. C.



1880

Fig 1.

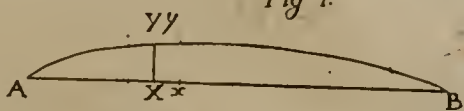


Fig 2.

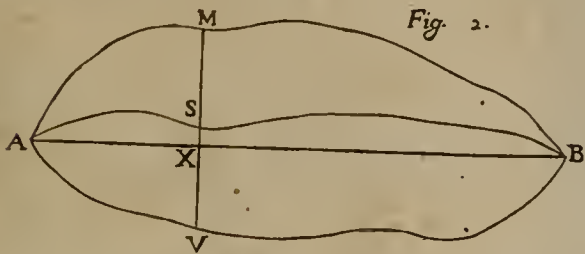


Fig 3.

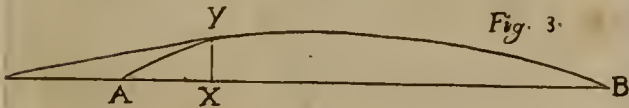


Fig 4.

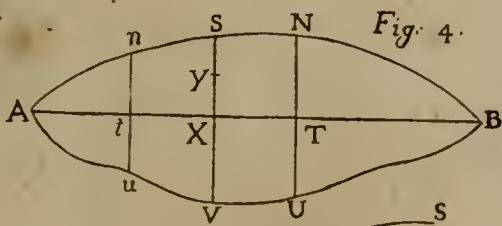


Fig *

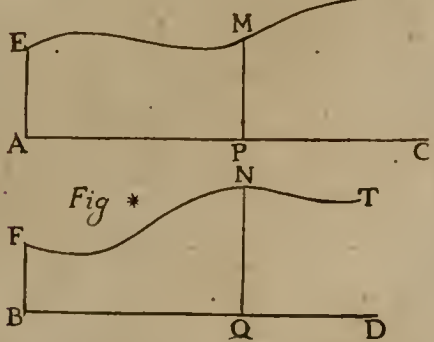


Fig. 1.

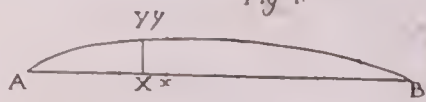


Fig. 2.

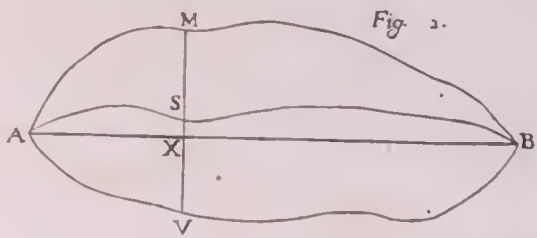


Fig. 3.

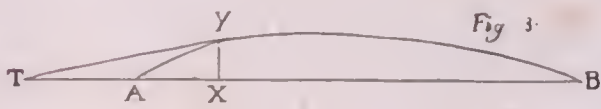


Fig. 4.

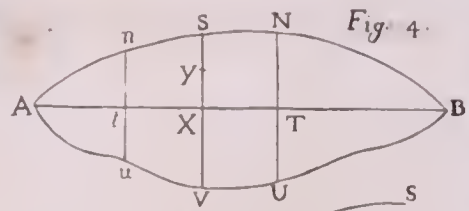


Fig. 5.

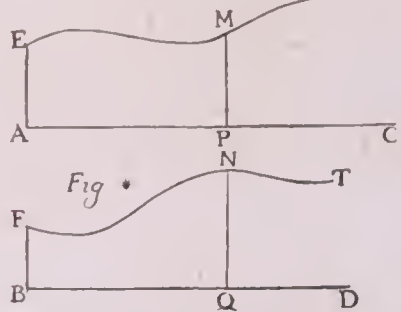


Fig. 5.

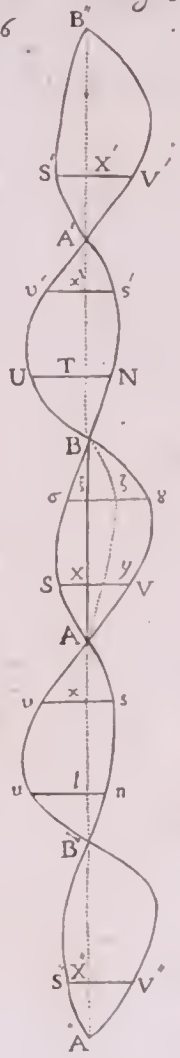
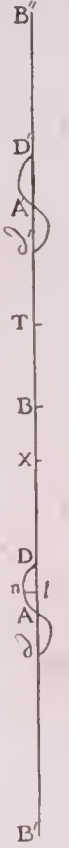
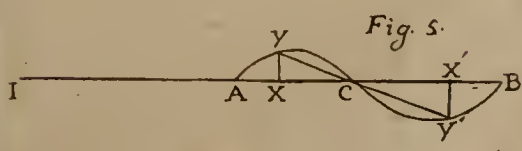
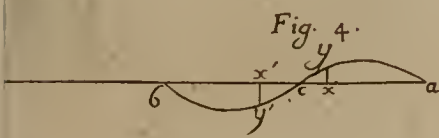
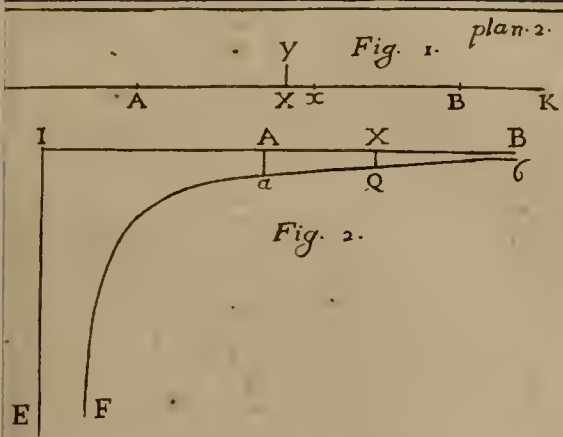


Fig. 6.





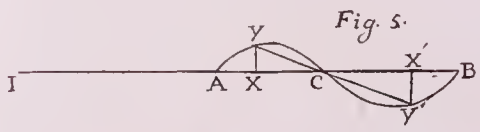
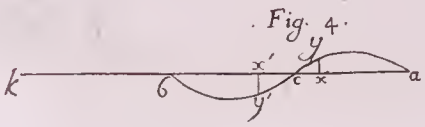
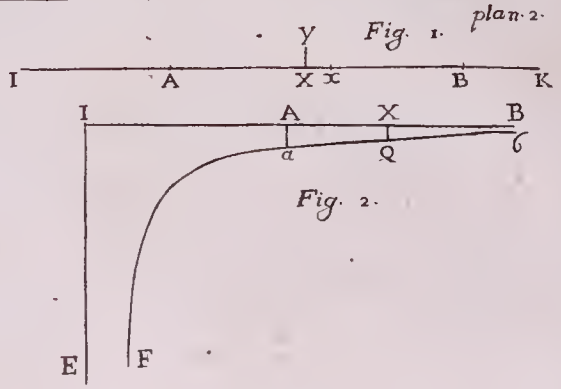
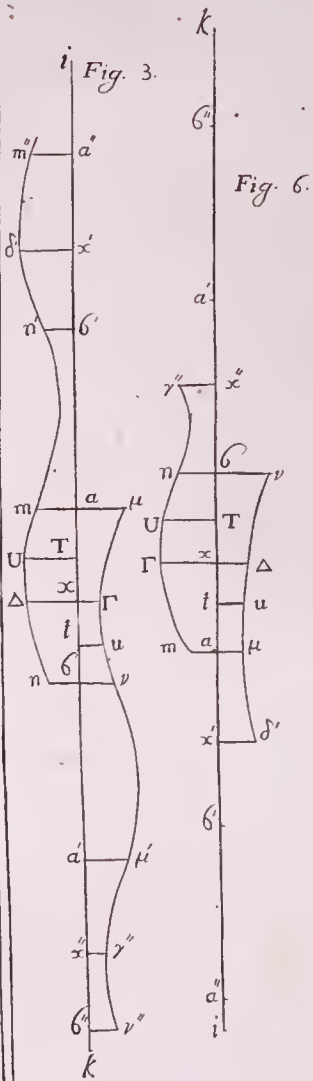
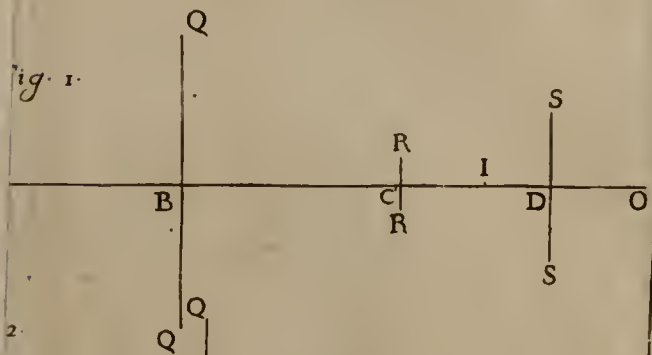
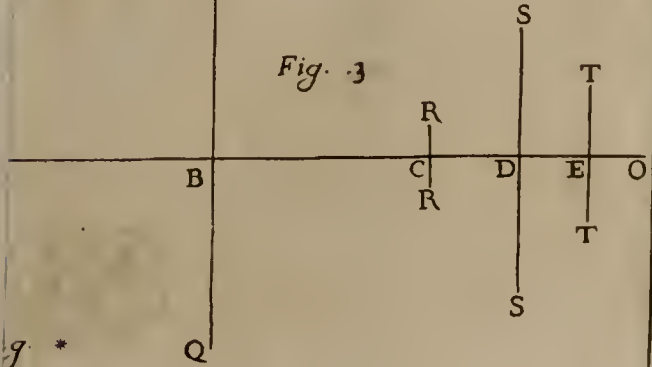


Fig. 1.



2.

Fig. 3.



f *

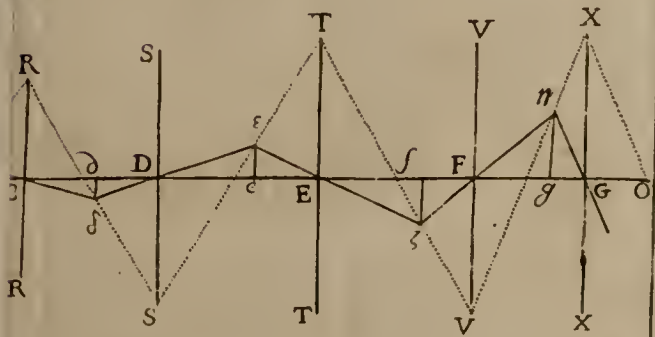


Fig. 1

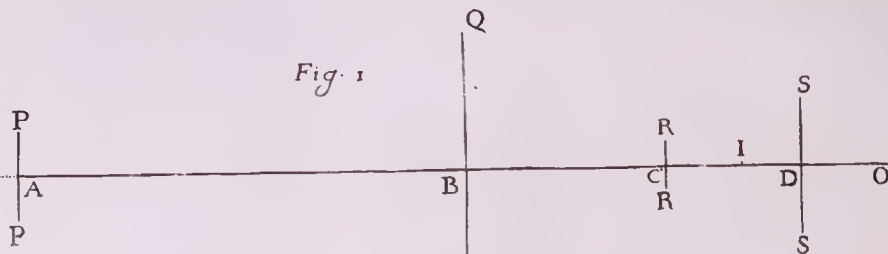


Fig. 2.

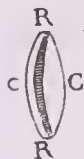


Fig. 3

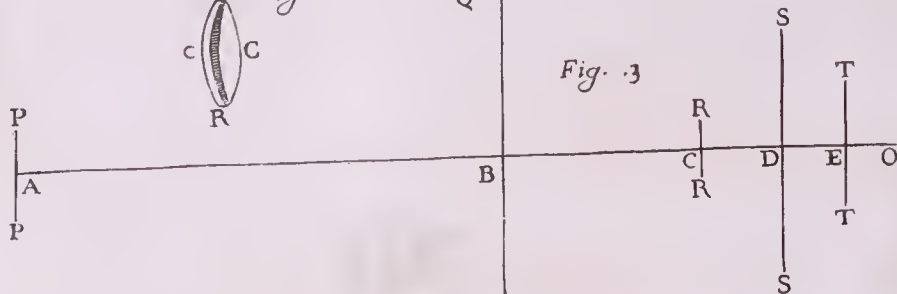
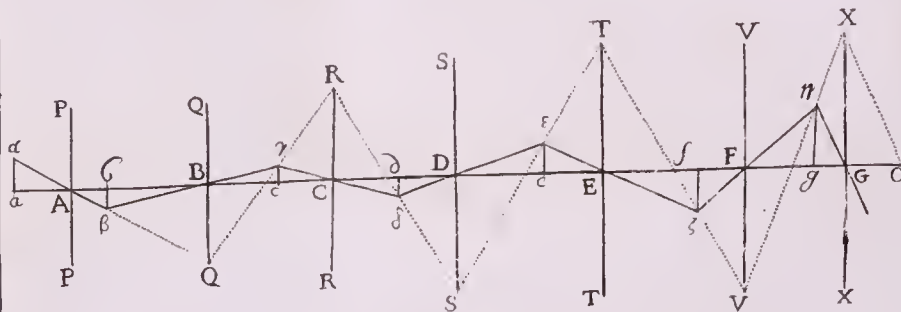
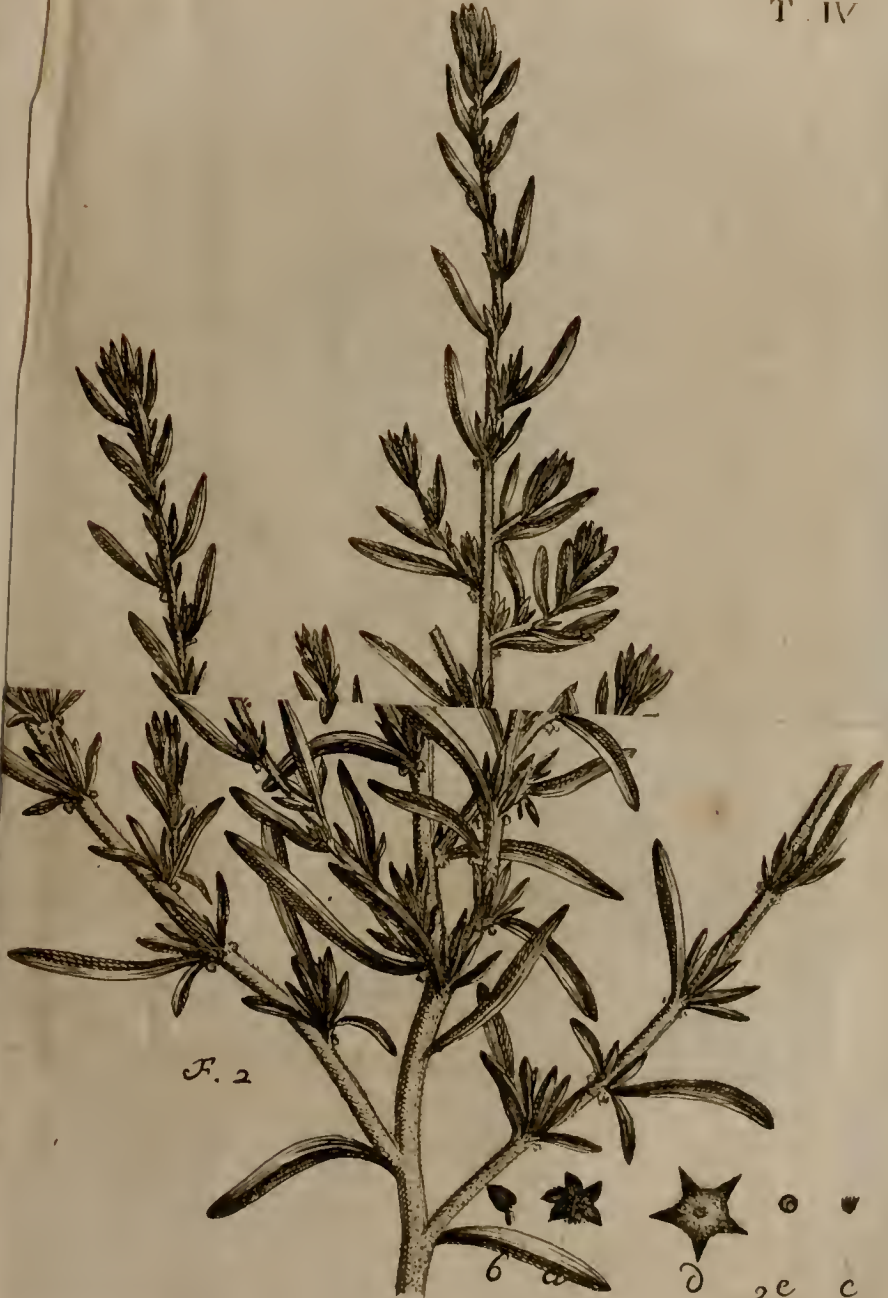


Fig. *





F. 2

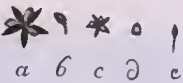
b c



d e c
Tom. 3.



F. 1



F. 2







F. 1

F. 2

g. 1



f. 2



f. 3



f. 5



f. 6

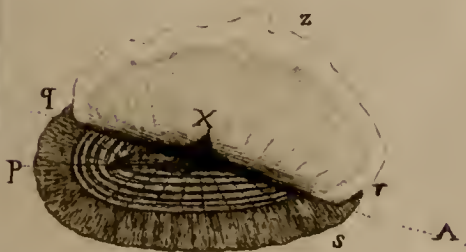


fig. 1



f. 2



f. 3



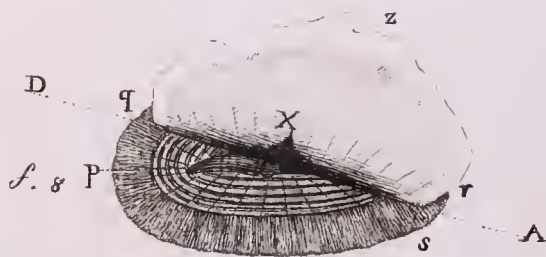
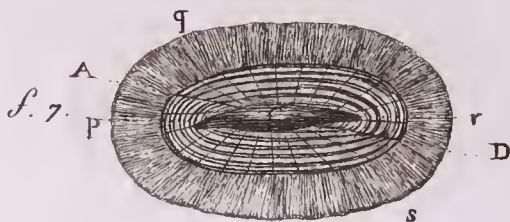
f. 4



f. 5

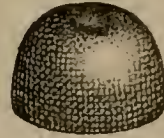
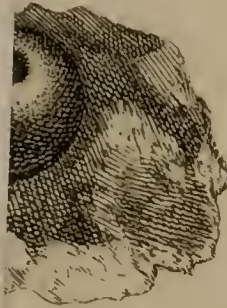


f. 6



T. VII

f. 2



f. 4



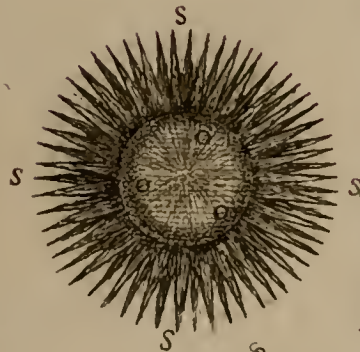
f. 5



6

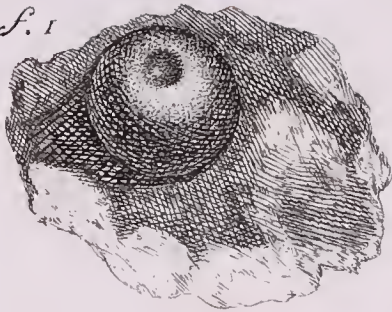


f. 7

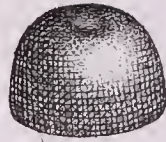


Tom. 3.

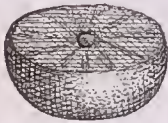
f. 1



f. 2



f. 3



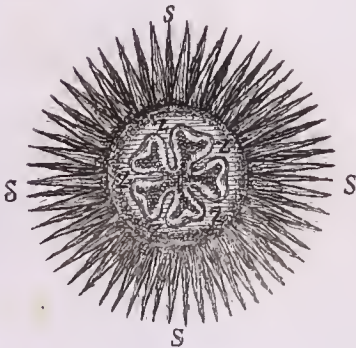
f. 4



f. 5



f. 6



f. 7

